

**LEHRBUCH
DER DARSTELLEN DEN
GEOMETRIE**

IN ZWEI BÄNDEN

VON

DR.-ING. E. H., DR. PHIL. G. SCHEFFERS
O. PROFESSOR AN DER TECHNISCHEN HOCHSCHULE BERLIN

ZWEITER BAND

ZWEITE, DURCHGESEHENE AUFLAGE
(MANULDRUCK)

MIT 396 TEXTFIGUREN



SPRINGER-VERLAG BERLIN HEIDELBERG GMBH 1927

ISBN 978-3-662-40642-7
DOI 10.1007/978-3-662-41122-3

ISBN 978-3-662-41122-3 (eBook)

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung
in fremde Sprachen, vorbehalten.

Copyright 1920 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1920
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1920

Vorwort zur ersten Auflage.

Wie beim Erscheinen des ersten Bandes angekündigt wurde, bringt der zweite zunächst die Perspektive oder Zentralprojektion und dann in einem umfangreichen letzten Kapitel Anwendungen und Ergänzungen. Während sonst für die Anordnung des Stoffes die Projektionsverfahren maßgebend waren, sind es im letzten Kapitel die abzubildenden Gegenstände. Ihre Eigenschaften werden mit den Hilfsmitteln der darstellenden Geometrie erforscht. Schon beim Durcharbeiten des ersten Bandes kann man ohne weiteres Abschnitte aus diesen Anwendungen und Ergänzungen heranziehen. Überhaupt bleibt es jedem überlassen, aus dem letzten Kapitel auszuwählen, was ihm besonders wichtig erscheint. In Vorträgen über darstellende Geometrie wird man mit der zur Verfügung stehenden Zeit zu rechnen haben und sich dementsprechend mit einer bescheidenen Auswahl aus der Fülle der Dinge begnügen müssen. Das Buch muß dagegen über alle wichtigeren Anwendungen Auskunft geben, um im Falle des Bedarfs als Berater dienen zu können.

Nicht gebracht wurde die Lehre von den Linien gleicher Helligkeit auf Flächen, da ihre herkömmliche Begründung mit der Wirklichkeit im Widerspruche steht, indem sie nur den Einfallswinkel der Lichtstrahlen und nicht auch den Einfallswinkel der Sehstrahlen bei der Betrachtung des Grundrisses oder Aufrisses berücksichtigt. Will man auch dies tun, also die subjektiven Lichtgleichen ermitteln, so entsteht eine Aufgabe, deren Schwierigkeit in keinem vernünftigen Verhältnis zum Gewinn steht, womit nicht gesagt sein soll, daß sie an sich mathematisch behandelt zu werden verdient. Beiseite gelassen wurde auch die Photogrammetrie oder Auswertung photographischer Aufnahmen zur Wiederauffindung der wahren Abmessungen der Gegenstände, da sie bei ihrem großen Umfang ein ganzes Kapitel erfordert hätte. Auch wurde davon abgesehen, die eigentliche Kurven- und Flächentheorie zu entwickeln. Denn die darstellende Geometrie hat andere Ziele als die Differential- und Integralrechnung. Diese mag die Kurven und Flächen in ihrer Allgemeinheit erforschen, die darstellende Geometrie soll sie nur durch besonders lehrreiche Beispiele in einigen kennzeichnenden Hauptzügen beleuchten.

Die geschichtlichen Anmerkungen wird mancher Techniker als Ballast ansehen. Vielleicht aber wird er mit dieser Meinung ein wenig zurückhalten, wenn er sich die Frage vorlegt, was eigentlich die letzten Gründe dafür sind, daß zwar die Technik selbst in der Allgemeinheit hoch geschätzt wird, der Techniker jedoch immer noch nicht die ihm gebührende Achtung genießt. Zwischen Zivilisation und Kultur besteht eben ein gewisser Unterschied; wer ihn nicht kennt oder nicht kennen will, darf sich nicht über die Folgen beklagen.

Auch der zweite Band bringt an einigen Stellen Neues. Die Abbildungen nebst ihrer Beschriftung habe ich wieder selbst hergestellt; sie wurden bloß mechanisch wiedergegeben, so daß alle an ihnen etwa zu bemerkenden Mängel mir allein zur Last fallen. Bei der sehr großen Zahl von Abbildungen wird man aber mildernde Umstände zugestehen, da es überhaupt eine nicht ganz leichte Sache war, trotz der Überlastung, unter der wir Hochschullehrer seit zwei Jahren leiden, das Werk zu Ende zu führen.

Auch beim Abschlusse des zweiten Bandes bringe ich dankbar zum Ausdruck, daß der Herr Verleger ihn aufs beste ausgestattet hat.

Berlin - Dahlem, im August 1920.

Vorwort zur zweiten Auflage.

Zu wesentlichen Änderungen lag kein Anlaß vor. Ein paar Irrtümer, auf die ich freundlicher Weise hingewiesen wurde, sind ausgemerzt. Selbstverständlich sind auch alle bekannt gewordenen Druckfehler beseitigt. Da sich in der Anlage und Einteilung nichts geändert hat, kann man ohne Störung beide Bände des Werkes in der ersten oder zweiten Auflage nebeneinander benutzen.

Durch Hinzufügung eines Namenverzeichnisses zu beiden Bänden komme ich einem von befreundeter Seite geäußerten Wunsche nach. Es bezieht sich hauptsächlich auf die geschichtlichen Ausführungen, denn sonst habe ich im allgemeinen nur da Autoren erwähnt, wo ich mir bewußt war, daß ich mich auf sie gestützt habe.

Dies Vorwort gibt mir Gelegenheit, auf eine Einzelheit im ersten Bande zurückzukommen: In der zweiten Auflage des ersten Bandes ist der Übergang vom Grund- und Aufriß zum Kreuzriß durch Benutzung der Hilfsgeraden unter 45 Grad bewerkstelligt worden, siehe insbesondere die Fig. 305 auf S. 284. Dies Verfahren ist bei Anwendung der Reißschiene bequemer als das sonst gebräuchliche; immerhin scheint es kaum der Mühe wert zu sein, das hier besonders hervorzuheben. Aber es gewinnt eine größere Bedeutung, wenn man nach einer Mitteilung meines verehrten Kollegen E. Waelsch in Brünn, dem ich diese Vereinfachung verdanke, daran die hübsche Bemerkung knüpft: Grundriß, Aufriß und Kreuzriß eines beweglichen Punktes sind drei Ecken eines veränderlichen Rechtecks, dessen Seiten immer dieselben Richtungen behalten, während die vierte Ecke jene 45-Grad-Linie durchläuft.

Berlin - Dahlem, im Dezember 1926.

Georg Scheffers.

Inhalt.

Viertes Kapitel: Zentralprojektion oder Perspektive.

	Seite
§ 1. Grundbegriffe	1
290. Erklärung der Zentralprojektion oder Perspektive. S. 1. — 291. Hauptpunkt und Distanz. S. 3. — 292. Verschwindungsebene. S. 5. — 293. Schlag Schatten bei Zentralbeleuchtung aufgefaßt als Zentralprojektion. S. 5. — 294. Perspektivische Bilder von Geraden. S. 6. — 295. Perspektivische Abbildung von Ebenen. S. 10. — 296. Bestimmung von Geraden und Ebenen durch ihre perspektivischen Bilder. S. 11. — 297. Distanzkreis. S. 12. — 298. Schnitt von Geraden und Ebenen. S. 13. — 299. Übungen. S. 16.	
§ 2. Gebundene oder unfreie Perspektive	16
300. Horizont. S. 16. — 301. Das Punkt- und Geradenverfahren. S. 18. — *302 ¹⁾ . Der Perspektivzeichner von Hauck. S. 21. — 303. Das Schichtenverfahren. S. 25. — 304. Perspektivische Abbildung unbegrenzter Gegenstände. S. 27. — *305. Der Perspektivzeichner von Ritter. S. 28. — 306. Versenkung des Grundrisses. S. 31. — 307. Spiegelung im Wasser. S. 32. — 308. Wahre Längen lotrechter und waagrechter Strecken. S. 33. — 309. Vergrößerung des Bildes. S. 40. — 310. Verzicht auf die Benutzung des Aufrisses. S. 42. — 311. Vergrößerung der Distanz. S. 44. — 312. Gleichzeitige Vergrößerung des Bildes und der Distanz. S. 47. — 313. Hilfsmittel im Fall unerreichbarer Punkte. S. 49. — *314. Beliebige Änderung des Auges. S. 52. — *315. Stereoskopbilder. S. 54. — 316. Perspektivische Darstellung auf nicht lotrechter Tafel. S. 55. — 317. Übungen. S. 59.	
§ 3. Schattenkonstruktionen in der Perspektive	60
318. Zentralbeleuchtung. S. 60. — 319. Lotrechte Strecken in Zentralbeleuchtung. S. 61. — 320. Zentralbeleuchtung eines Innenraumes. S. 63. — 321. Lichtquelle hinter dem Beobachter. S. 65. — 322. Lichtquelle unterhalb der Grundebene. S. 68. — 323. Lichtquelle in der Verschwindungsebene. S. 70. — 324. Parallelbeleuchtung oder Beleuchtung durch die Sonne. S. 71. — 325. Unerreichbarer Fluchtpunkt der Sonnenstrahlen. S. 75. — 326. Übungen. S. 76.	
§ 4. Perspektivität	76
327. Unveränderlichkeit von Doppelverhältnissen bei perspektivischer Abbildung. S. 76. — 328. Hilfssatz über Doppelverhältnisse. S. 79. — 329. Bedingung für die perspektivischen Bilder von vier Punkten einer Geraden. S. 81. — 330. Projektive Punktreihen. S. 81. — 331. Drehung perspektivischer Punktreihen um ihren Schnittpunkt. S. 83. — 332. Doppelverhältnis ausgedrückt durch einfaches Verhältnis und umgekehrt. S. 84. — 333. Harmonisches Doppelverhältnis. S. 85. — 334. Perspektivität zweier Ebenen. S. 87. — 335. Perspektivität in einer Doppelsebene. S. 88. — 336. Drehung perspektivischer Ebenen um die Perspektivitätsachse. S. 90. — 337. Handhabung der Perspektivität in der Umlegung. S. 93. — 338. Deckelemente bei der Perspektivität in einer Doppelsebene. S. 95. — *339. Involutionen. S. 96. — 340. Übungen. S. 99.	
§ 5. Anwendungen der Perspektivität	99
341. Die Perspektivität beim Schichtenverfahren. S. 99. — 342. Quadrat und quadratische Täfelung in beliebiger Ebene. S. 101. — 343. Verschiebung einer Ebene. S. 102. — 344. Drehung einer Ebene um eine zur Tafel parallele Achse. S. 103. — 345. Ebene Schnitte von Pyramiden. S. 105. — 346. Parallelogrammschnitt einer	

¹⁾ Die mit Sternchen versehenen Nummern sind überschlagbar.

vierseitigen Pyramide. S. 107. — **347.** Abbildung eines ebenen Vierecks als Quadrat. S. 108. — **348.** Winkel, die sich in wahrer Größe abbilden. S. 111. — ***349.** Eine Parabelschar, die sich als Parabelschar abbildet. S. 113. — **350.** Perspektivische rechte Winkel. S. 116. — ***351.** Konfokale Ellipsen und Hyperbeln. S. 117. — **352.** Perspektivität zwischen einer Ebene und ihrem Schlagschatten. S. 119. — **353.** Spiegelbild einer Ebene. S. 121. — **354.** Übungen. S. 122.

§ 6. Perspektives Bild von Kreis und Kugel 122

355. Das Kreisbild als Kegelschnitt. S. 122. — **356.** Projektive Erzeugung des Kreises. S. 123. — **357.** Projektive Erzeugung der Kegelschnitte. S. 124. — **358.** Sonderfälle der projektiven Erzeugung der Kegelschnitte. S. 127. — **359.** Elliptisches Kreisbild. S. 130. — **360.** Nochmals die Polareigenschaften des Kreises. S. 132. — **361.** Polareigenschaften der Kegelschnitte. S. 133. — **362.** Nochmals das elliptische Kreisbild. S. 133. — **363.** Unmittelbare Bestimmung der Achsen des elliptischen Kreisbildes. S. 135. — **364.** Anwendungen des elliptischen Kreisbildes. S. 137. — **365.** Parabolisches Kreisbild. S. 140. — **366.** Hyperbolisches Kreisbild. S. 142. — **367.** Eine Anwendung der elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Kreisbilder. S. 144. — **368.** Hauptschnitte der Kugel. S. 147. — **369.** Perspektives Bild der Kugel. S. 148. — **370.** Vervollständigung der Zeichnung der Hauptschnitte einer Kugel. S. 152. — **371.** Darstellung der Kugel mittels der zur Tafel parallelen Kugelmreise. S. 153. — **372.** Unmittelbare Bestimmung des elliptischen Kugelummrisse. S. 154. — **373.** Kugelförmige Kuppeln. S. 155. — **374.** Sonne und Mond in der Perspektive. S. 157. — **375.** Hyperbolischer und parabolischer Kugelumriß. S. 159. — **376.** Gesamtheit derjenigen Kreise, die sich als Kreise abbilden. S. 161. — **377.** Stereographische Projektion. S. 162. — **378.** Stereographische Projektion des Gradnetzes der Kugel. S. 167. — **379.** Nochmals die zur Tafel parallelen Kreise der Kugel. S. 169. — **380.** Perspektivische Darstellung einer Kugel ohne Umriß. S. 170. — **381.** Übungen. S. 171.

§ 7. Eigenschaften und Anwendungen der Kegelschnitte 172

382. Pascalscher Satz. S. 172. — **383.** Brianchonscher Satz. S. 173. — ***384.** Kegelschnitt bestimmt durch fünf Punkte oder fünf Tangenten. S. 175. — ***385.** Ellipsen und Hyperbeln mit gegebenen Achsengeraden und zwei gegebenen Punkten oder Tangenten. S. 176. — **386.** Kegelschnittkonstruktionen. S. 180. — ***387.** Parabel mit gegebener Achsengeraden und zwei gegebenen Punkten oder Tangenten. S. 183. — **388.** Bestimmung der Parabel durch Einhüllung. S. 184. — **389.** Zur Anwendung der Sätze von Pascal und Brianchon. S. 185. — **390.** Perspektivische Abbildung der Kegelschnitte. S. 187. — **391.** Kreisschatten in der Perspektive. S. 188. — **392.** Kugelschatten bei Zentralbeleuchtung. S. 192. — **393.** Anderes Verfahren zur Bestimmung des Eigenschattens einer Kugel. S. 197. — **394.** Übungen. S. 199.

§ 8. Freie Perspektive 200

395. Begriff der freien Perspektive. S. 200. — **396.** Verbinden und Schneiden. S. 201. — **397.** Ersatz-Spurpunkte und Spurparallelen. S. 203. — ***398.** Nochmals das einschalige Hyperboloid. S. 205. — **399.** Wahre Länge einer Strecke. S. 206. — **400.** Kennzeichen für das Senkrechtstehen einer Geraden auf einer Ebene. S. 206. — **401.** Lot von einem Punkt auf eine Ebene oder Gerade. S. 207. — **402.** Kürzester Abstand windschiefer Geraden. S. 208. — **403.** Wahre Größe eines Winkels. S. 209. — **404.** Perspektivische Axonometrie. S. 210. — **405.** Würfel in allgemeiner Lage. S. 213. — **406.** Übungen. S. 216.

Fünftes Kapitel: Anwendungen und Ergänzungen.

§ 1. Ebene Kurven, Flachornamente, Gelände 218

407. Vorbemerkung. S. 218. — **408.** Ermittlung der Tangenten und Normalen gegebener ebener Kurven. S. 218. — **409.** Krümmungskreise beliebiger ebener Kurven. S. 222. — **410.** Evolute, Evolventen, Parallelkurven. S. 224. — **411.** Spitzen und Wendepunkte ebener Kurven. S. 227. — **412.** Flachornamente. S. 230. — **413.** Lehrbeispiel für Flachornamente. S. 231. — **414.** Schatten einer Ranke von beliebiger Gestalt. S. 233. — **415.** Höhenlinien des Geländes. S. 235. — **416.** Tangentenebenen und Normalen einer Fläche. S. 236. — **417.** Gipfel- und Talpunkte sowie Jochpunkte. S. 237. — **418.** Falllinien, Kamm- und Talwege. S. 239. — **419.** Schnitte des Geländes. S. 242. — **420.** Tangentenebenen des Geländes. S. 245. — **421.** Kurven auf dem

Gelände. S. 248. — **422.** Kurven konstanten Gefalles. S. 249. — **423.** Kürzeste Kurven auf dem Gelände. S. 250. — **424.** Böschungsf lächen. S. 252. — **425.** Böschungskörper. S. 255. — **426.** Wege im Gelände. S. 258. — ***427.** Die Peanosche Fläche. S. 261. — **428.** Übungen. S. 263.

§ 2. Rotationsflächen und Rotationskörper 264

429. Breitenkreise und Meridiankurven. S. 264. — **430.** Tangentenebenen von Rotationsflächen. S. 265. — **431.** Senkrechte Projektion einer Rotationsfläche auf eine beliebige Tafel. S. 267. — **432.** Umriß einer Rotationsfläche bei senkrechter Projektion. S. 268. — **433.** Spitzen des Umrisses einer Rotationsfläche. S. 270. — **434.** Umriß des Wulstes. S. 272. — **435.** Ebene Schnitte von Rotationsflächen. S. 273. — **436.** Durchbohrung einer Rotationsfläche mit einer Geraden. S. 275. — **437.** Eigenschattengrenze einer krummen Fläche bei Parallelbeleuchtung. S. 275. — **438.** Schatten eines Rotationskörpers bei Parallelbeleuchtung. S. 277. — **439.** Treffpunkte von Schlag- und Eigenschattengrenzen auf krummen Flächen. S. 279. — **440.** Über die Tangenten der Eigenschattengrenze einer krummen Fläche. S. 281. — **441.** Tangentialkegel einer Rotationsfläche. S. 282. — **442.** Rotationsflächen zweiten Grades. S. 284. — **443.** Einschaliges Rotationshyperboloid. S. 286. — ***444.** Hyperboloidräder-Paare. S. 291. — ***445.** Allgemeine Räderpaare für windschiefe Achsen. S. 293. — **446.** Krümmungskreise der Scheitel ebener Schnitte von Rotationsflächen. S. 294. — **447.** Hauptkrümmungsrichtungen und Krümmung einer Rotationsfläche. S. 295. — **448.** Kreisschnitte des Wulstes. S. 298. — ***449.** Rotationsflächen mit übereinstimmenden ebenen Schnitten. S. 301. — ***450.** Rotationsflächen mit übereinstimmenden Umrissen. S. 304. — **451.** Angenäherte Abwicklung von Rotationsflächen. S. 306. — **452.** Loxodromen. S. 308. — **453.** Rotationsflächen in Kavalierperspektive. S. 312. — **454.** Perspektive einer Rotationsfläche, deren Achse zur Tafel senkrecht ist. S. 314. — **455.** Perspektive einer Rotationsfläche, deren Achse zur Tafel parallel ist. S. 315. — **456.** Perspektives Bild einer Rotationsfläche in beliebiger Lage. S. 317. — **457.** Sogenannte windschiefe Rotationskörper. S. 318. — **458.** Affinität im Raum und allgemeine Flächen zweiten Grades. S. 320. — **459.** Übungen. S. 322.

§ 3. Schraubenlinien und Radlinien 323

460. Schraubenlinien. S. 323. — **461.** Die zur Ganghöhe der Schraubenlinie gehörige Kegelhöhe. S. 326. — **462.** Schmiegungebenen und Schmiegungeellipsen der Schraubenlinie. S. 327. — **463.** Schraubenlinie in beliebiger senkrechter Projektion. S. 330. — **464.** Senkrechte Projektionen der Schraubenlinie auf die Ebenen des begleitenden Achsenkreuzes. S. 332. — **465.** Verschraubung eines beliebigen Punktes um eine beliebige Achse. S. 332. — **466.** Senkrechte Projektion der Schraubenlinie auf eine zur Achse parallele Tafel. S. 334. — **467.** Zykloiden. S. 335. — **468.** Stetige Bewegung in der Ebene. S. 337. — **469.** Tangenten der Zykloiden. S. 340. — **470.** Doppelte Erzeugung der Epi- und Hypozykloiden. S. 341. — **471.** Zeichnung von Radlinien. S. 344. — **472.** Kreisevolventen. S. 346. — **473.** Archimedische Spiralen. S. 347. — **474.** Übungen. S. 348.

§ 4. Schraubenflächen und Schrauben 348

475. Stetige Schraubung. S. 348. — **476.** Schraubenflächen. S. 349. — **477.** Ermittlung des Profils und Querschnittes einer Schraubenfläche. S. 351. — **478.** Beziehung zwischen dem Profil und Querschnitt einer Schraubenfläche. S. 352. — **479.** Umriß einer Schraubenfläche bei senkrechter Projektion auf eine zur Achse parallele Ebene. S. 353. — **480.** Wendelfläche oder gemeine Schraubenfläche. S. 356. — **481.** Umriß der Wendelfläche bei senkrechter Projektion. S. 359. — **482.** Abwickelbare Schraubenflächen. S. 361. — **483.** Korkzieherflächen. S. 365. — **484.** Flachgängige Schrauben. S. 367. — **485.** Scharfgängige Schrauben. S. 368. — **486.** Querschnitte von Schrauben. S. 369. — **487.** Röhrenschraubenfläche. S. 370. — **488.** Schatten auf einer Schraube. S. 371. — **489.** Übungen. S. 374.

§ 5. Geradlinige Flächen 375

490. Abwickelbare und windschiefe Flächen. S. 375. — **491.** Striktionslinie. S. 377. — **492.** Geradlinige Flächen durch drei gegebene Kurven. S. 378. — **493.** Windschiefe Perspektivität. S. 379. — **494.** Allgemeine Konoide. S. 382. — **495.** Die zu einer Flächennormale benachbarten Flächennormalen. S. 383. — **496.** Konoide im engeren Sinne. S. 385. — **497.** Ringförmiges Kreuzgewölbe. S. 386. — **498.** Übungen. S. 389.

	Seite
§ 6. Verschiedene Flächen	389
499. Einseitige Flächen. S. 389. — 500. Bewegungsflächen. S. 392. — 501. Schiebungsflächen. S. 393. — 502. Gesimsflächen. S. 396. — 503. Röhrenflächen. S. 397. — 504. Von Kreisen erzeugte Kuppel mit elliptischer Grundfläche. S. 398. — *505. Krümmungskreise der Normalschnitte eines allgemeinen Flächenpunktes. S. 399. — 506. Übungen. S. 401.	
§ 7. Durchdringungen und Schatten	402
507. Darstellung der Kegeldurchdringung im Grundriß und Aufriß. S. 402. — 508. Darstellung der Zylinderdurchdringung im Grundriß und Aufriß. S. 405. — 509. Kurven vierten Grades. S. 406. — 510. Andere Verfahren für die Durchdringung von Kegeln und Zylindern. S. 407. — 511. Asymptoten der Durchdringungskurve zweier Kegel. S. 409. — 512. Durchdringung zweier Kegel zweiten Grades mit einer gemeinsamen Mantellinie. S. 409. — 513. Durchdringung zweier Kegel zweiten Grades mit zwei gemeinsamen Tangentialebenen. S. 410. — 514. Durchdringung der Kugel mit einem Kegel oder Zylinder. S. 410. — 515. Hilfssatz über Kegelschnitte mit vier gemeinsamen Punkten. S. 412. — 516. Durchdringung zweier Flächen zweiten Grades, die eine Symmetrieebene gemein haben. S. 413. — 517. Durchdringung von Rotationsflächen, deren Achsen sich schneiden. S. 415. — 518. Wie die Sichtbarkeit einer Durchdringungskurve endet. S. 417. — 519. Schatten in einem Torbogen. S. 418. — 520. Schatten auf einer Turmhaube. S. 420. — 521. Eckige Schatten stetiger Gebilde auf stetigen Flächen. S. 421. — 522. Übungen. S. 422.	
§ 8. Reliefperspektive	424
523. Begriff der Reliefperspektive. S. 424. — 524. Beispiel zur Reliefperspektive. S. 426. — 525. Die Augenebene und die Verschwindungsebene. S. 427. — 526. Reliefperspektive Abbildung von Kurven und Flächen zweiten Grades. S. 428. — 527. Mängel der Reliefperspektive. S. 428. — 528. Übungen. S. 430.	
Stichwörter	431
Namenverzeichnis	440