

DIE GRUNDLEHREN DER
MATHEMATISCHEN
WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER
BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

GEMEINSAM MIT

W. BLASCHKE
HAMBURG

M. BORN
GÖTTINGEN

C. RUNGE †
GÖTTINGEN

HERAUSGEGEBEN VON

R. COURANT
GÖTTINGEN

BAND I
VORLESUNGEN ÜBER
DIFFERENTIALGEOMETRIE I
VON
WILHELM BLASCHKE



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1930

VORLESUNGEN ÜBER
D I F F E R E N T I A L -
G E O M E T R I E

UND GEOMETRISCHE GRUNDLAGEN VON
EINSTEINS RELATIVITÄTSTHEORIE

VON

WILHELM BLASCHKE

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
UNIVERSITÄT HAMBURG

I

ELEMENTARE DIFFERENTIALGEOMETRIE

DRITTE ERWEITERTE AUFLAGE

BEARBEITET UND HERAUSGEGEBEN

VON

GERHARD THOMSEN

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
UNIVERSITÄT ROSTOCK

MIT 35 TEXTFIGUREN



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH 1930

**ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG
IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.**

Copyright 1924 Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1924.
Softcover reprint of the hardcover 3rd edition 1924

ISBN 978-3-662-37623-2 ISBN 978-3-662-38409-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-38409-1

Vorwort zur dritten Auflage.

Dieses Lehrbuch umfaßt bisher drei Bände. Der erste bringt eine Einführung in die „elementare“, das heißt bewegungsinvariante Differentialgeometrie, der zweite eine Darstellung neuerer Untersuchungen über *affine Differentialgeometrie*, der dritte ist den *konformen und verwandten Kugelgeometrien* gewidmet.

Die Differentialgeometrie untersucht die Eigenschaften der krummen Linien und Flächen im unendlich Kleinen. Die verschiedenen Wendungen des Begriffs „Krümmung“ stehen dabei im Vordergrund, so daß man auch von „Krümmungstheorie“ spricht. Im Gegensatz dazu betrachtet man in der algebraischen Geometrie die geometrischen Gebilde von vornherein in ihrer Gesamterstreckung. Indessen verzichtet auch die Differentialgeometrie durchaus nicht auf das Studium der geometrischen Figuren im ganzen und die Fragen der „Differentialgeometrie im großen“, die die mikroskopischen mit den makroskopischen Eigenschaften verknüpfen, gehören zu den reizvollsten, allerdings auch zu den schwierigsten Fragen unserer Wissenschaft.

Die Krümmungstheorie erscheint, wenn man erst die Fesseln der Dimensionenzahl Drei und der Maßbestimmung EUKLIDS zerrissen hat, nicht mehr bloß als ein eng begrenztes Teilgebiet der Mathematik, sondern sie umfaßt einen erheblichen Teil der theoretischen Physik. Aus diesem weiten Gebiete soll in diesem Buch, das aus Vorlesungen in Tübingen und Hamburg entstanden ist, ein Ausschnitt geboten werden, der nicht allein im Werdegang der Anwendungen der Analysis auf die Geometrie, sondern auch in Geschmack und Arbeitsrichtung des Verfassers begründet ist. Als Leitstern wird uns F. KLEINS Erlanger Programm dienen. Ferner sollen besonders die Beziehungen zur Variationsrechnung gepflegt werden.

Die neue 3. Auflage enthält gegenüber den früheren einige Änderungen und Verbesserungen, insbesondere um die Lesbarkeit zu erleichtern. Zwischen die Theorie der Kurven und die der Flächen habe ich als Übergang ein Kapitel über *Streifen* eingefügt. Neben der bisherigen Behandlung der Flächentheorie habe ich jetzt noch gezeigt, wie man mittels der sogenannten *invarianten Ableitungen* ihre Formeln übersichtlicher schreiben kann. Einen Irrtum der 2. Auflage habe ich

auf Grund einer Mitteilung des Herrn HJELMSLEV richtigstellen können. Es bleibt jetzt die Frage nach allen Flächen wieder offen, die mit der Kugel die Eigenschaft teilen, „Gegenpunkte zu besitzen“, so daß die von einem Punkte ausstrahlenden geodätischen Linien sich immer wieder in einem Punkt vereinigen.

Die Neubearbeitung hat mein Freund und Kollege G. THOMSEN übernommen. Von ihm stammt insbesondere das Kapitel über invariante Ableitungen und deren Anwendung auf ein Problem von BONNET, ferner mehrere Zusätze über Vektoren.

An der Korrektur haben sich liebenswürdigerweise beteiligt die Herren BERWALD (Prag), dem ich für seine aufopfernde Mühewaltung ganz besonders dankbar bin, HAACK (Danzig), KÄHLER (Hamburg), SCHATZ (Innsbruck).

Hamburg, im November 1929.

W. BLASCHKE.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Einleitung. Vektoren.	
§ 1. Skalare Produkte	1
§ 2. Determinanten und Vektorprodukte	4
§ 3. Das vollständige System der Invarianten einer Anzahl von Punkten	6
§ 4. Das vollständige System unabhängiger Invarianten	10
1. Kapitel.	
Kurventheorie.	
§ 5. Bogenlänge	12
§ 6. Tangente und Schmiegeebene	14
§ 7. Krümmung und Windung. Krümmungskreis	17
§ 8. Bestimmung der Invarianten einer Kurve	19
§ 9. Formeln von FRENET	24
§ 10. Über das Vorzeichen der Windung	27
§ 11. Kinematische Deutung von FRENETS Formeln	28
§ 12. Ebene Kurven, Vierecksatz	30
§ 13. Krümmungsmittelpunkt und Schmiegekreis	32
§ 14. Schmiegekugeln	33
§ 15. BERTRAND-Kurven	35
§ 16. Natürliche Gleichungen	36
§ 17. Hilfssatz über lineare Differentialgleichungen	38
§ 18. Böschungslinien	39
§ 19. Böschungslinien auf einer Kugel	40
§ 20. Böschungslinien auf einem Drehparaboloid	41
§ 21. Evoluten, Evolventen	42
§ 22. Isotrope Kurven	43
§ 23. Integrallose Darstellung der isotropen Kurven	45
§ 24. Aufgaben und Lehrsätze	46
2. Kapitel.	
Extreme bei Kurven.	
§ 25. Die erste Variation der Bogenlänge	50
§ 26. Variationsprobleme von J. RADON	51
§ 27. Bestimmung der Extremalen unserer Variationsprobleme	53
§ 28. Die Isoperimetrie des Kreises	55
§ 29. Beweis von CRONE und FROBENIUS	56
§ 30. Ein Beweis von A. HURWITZ	59
§ 31. Sätze über Raumkurven fester Krümmung	61
§ 32. Bemerkungen und Aufgaben	64
3. Kapitel.	
Flächenstreifen.	
§ 33. Das begleitende Dreibein eines Streifens	67
§ 34. Geometrische Deutung der Invarianten eines Flächenstreifens	69

	Seite
§ 35. Schmiegstreifen, Krümmungsstreifen und geodätische Streifen	72
§ 36. Drehung eines Streifens um seine Kurve	73
§ 37. Verbiegung eines Streifens	75
§ 38. Der Parallelismus von LEVI-CIVITA	79
§ 39. Beweis von RADON für einen Satz von SCHWARZ	80
§ 40. Aufgaben und Lehrsätze	82

4. Kapitel.

Anfangsgründe der Flächentheorie.

§ 41. Die erste Grundform	85
§ 42. Die zweite Grundform	88
§ 43. Sätze von MEUSNIER und EULER	89
§ 44. Die Hauptkrümmungen	91
§ 45. GAUSZENS Theorema egregium	93
§ 46. Krümmungslinien	94
§ 47. Nabelpunkte	97
§ 48. Satz von DUPIN über rechtwinklige Flächennetze	98
§ 49. Die winkeltreuen Abbildungen des Raumes	100
§ 50. GAUSZ' sphärisches Abbild einer Fläche	102
§ 51. Normalensysteme	104
§ 52. Schmiegtangentenkurven	106
§ 53. Schmiegtangentenlinien auf geradlinigen Flächen	107
§ 54. Konjugierte Netze	109
§ 55. Ableitungsformeln von WEINGARTEN	110
§ 56. Satz von BELTRAMI und ENNEPER über die Windung der Asymptoten- linien	113
§ 57. Die Ableitungsformeln von GAUSZ	114
§ 58. Grundformeln von GAUSZ und CODAZZI	115
§ 59. G. MONGE	117
§ 60. Aufgaben und Lehrsätze	119

5. Kapitel.

Invariante Ableitungen auf einer Fläche.

§ 61. Invariante Ableitungen längs der Krümmungslinien	123
§ 62. Übergang von beliebigen Parametern zu den invarianten Ableitungen	128
§ 63. Grundformeln der Flächentheorie in invarianter Schreibweise	134
§ 64. Gesimsflächen und Kanalfächen	139
§ 65. Invariante Ableitungen in beliebiger Richtung	143
§ 66. Aufgaben und Lehrsätze	144

6. Kapitel.

Geometrie auf einer Fläche.

§ 67. Verbiegung	146
§ 68. Geodätische Krümmung	147
§ 69. Geodätische Linien	149
§ 70. Geodätische Polarkoordinaten	151
§ 71. Biegungsinvariante Deutung des Krümmungsmaßes	153
§ 72. Zwei verschiedene Erklärungen der geodätischen Kreise	154
§ 73. Flächen festen Krümmungsmaßes	155
§ 74. Abbildung der Flächen festen negativen Krümmungsmaßes auf POIN- CARÉ'S Halbebene	156
§ 75. Längentreue Abbildungen einer Fläche mit $K = -1$ auf sich selbst	158
§ 76. Das Integral der geodätischen Krümmung	161
§ 77. Folgerungen aus der Integralformel von GAUSZ und BONNET	163

	Seite
§ 78. Über Hüllkurven von geodätischen Linien	167
§ 79. BELTRAMIS erster Differentiator	168
§ 80. Eine geometrische Anwendung des ersten Differentiators von BEL- TRAMI	170
§ 81. BELTRAMIS zweiter Differentiator	172
§ 82. Formeln nach GREEN	173
§ 83. Neue Formel für die geodätische Krümmung	174
§ 84. Flächen, deren geodätische Krümmungskreise geschlossen sind	175
§ 85. Isotherme Parameter	177
§ 86. Winkeltreue Abbildung	180
§ 87. Isometrische Abbildung mit Erhaltung der Krümmungslinien (erster Fall)	181
§ 88. Isometrische Abbildung mit Erhaltung der Krümmungslinien (zweiter und dritter Fall)	185
§ 89. Die Förderung der Flächentheorie durch GAUSZ	190
§ 90. Aufgaben und Lehrsätze	191

7. Kapitel.

Fragen der Flächentheorie im Großen.

§ 91. Unverbiegbarkeit der Kugel	195
§ 92. Die Kugeln als einzige Eiflächen mit fester mittlerer Krümmung	197
§ 93. Starrheit der Eiflächen	199
§ 94. MINKOWSKIS Stützfunktion	202
§ 95. Ein Satz von CHRISTOFFEL über geschlossene Flächen	204
§ 96. Ein Satz von HILBERT über Flächen festen negativen Krümmungs- maßes	206
§ 97. Bemerkungen über geschlossene geodätische Linien auf einer Eifläche nach H. POINCARÉ	209
§ 98. ERDMANN'S Eckbedingung	212
§ 99. Die Bedingung von JACOBI	214
§ 100. Satz von BONNET über den Durchmesser einer Eifläche	218
§ 101. Das Vorhandensein kürzester Wege auf Eiflächen	220
§ 102. Flächen, deren konjugierte Punkte festen geodätischen Abstand haben	224
§ 103. Ein Satz CARATHÉODORY'S über die Hüllkurven geodätischer Linien auf Eiflächen	230
§ 104. Aufgaben und Lehrsätze	232

8. Kapitel.

Extreme bei Flächen.

§ 105. Erste Variation der Oberfläche	235
§ 106. Die Minimalflächen als Schiebflächen	236
§ 107. Formeln von WEIERSTRASZ für Minimalflächen	237
§ 108. Formeln von STUDY für Minimalflächen	239
§ 109. Eine allgemeine Formel von GAUSZ für die erste Variation der Ober- fläche	241
§ 110. Eine Formel von SCHWARZ für die Oberfläche einer Minimalfläche	243
§ 111. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen Streifen	245
§ 112. Ein Satz von T. CARLEMAN über den Kreis	246
§ 113. Isoperimetrie der Kugel	248
§ 114. Wirkung von STEINER'S Symmetrisierung auf die Oberfläche	249
§ 115. Konvergenzbeweis von WILHELM GROSS	251
§ 116. Zweite Variation der Oberfläche	255
§ 117. Erste Variation von H und K	257
§ 118. Aufgaben und Lehrsätze	259

9. Kapitel.

Liniengeometrie.

§ 119. Duale Zahlen	261
§ 120. STUDYS Übertragungsprinzip	263
§ 121. Geradlinige Flächen	267
§ 122. Besondere geradlinige Flächen	275
§ 123. Strahlensysteme	277
§ 124. Übertragung der Integralformel von GAUSZ-BONNET auf Strahlensysteme	280
§ 125. Brennflächen eines Strahlensystems	282
§ 126. Formeln von HAMILTON und MANNHEIM	283
§ 127. Isotrope Strahlensysteme	284
§ 128. Beziehungen der isotropen Strahlensysteme zu den Minimalflächen	286
§ 129. Grundformeln der Strahlensysteme in invarianten Ableitungen	289
§ 130. Darstellung der isotropen Strahlensysteme durch stereographische Linienkoordinaten	292
§ 131. Weitere Formeln für stereographische Linienkoordinaten	296
§ 132. Zusammenhang mit der Theorie der Minimalflächen von WEIERSTRASZ	297
§ 133. Bemerkungen und Aufgaben	299
Namen- und Sachverzeichnis	305