

Schirmung gegen Störfelder.

Einleitung: Maxwellsche Differentialgleichungen und Randbedingungen; äquivalente Leitschichtdicke.

In der Fernmelde- und Hochfrequenztechnik kommt die Aufgabe sehr häufig vor, die Ausbreitung elektrischer und magnetischer Felder im Raum zu verhindern, insbesondere einen Teil des Raumes gegen Störfelder zu schützen. So soll z. B. das Innere eines Fernsprechkabels frei von den Feldern sein, die eine danebenliegende Leitung umgeben; oder es soll die Umgebung einer Spule unbeeinflusst von den in ihr fließenden Strömen bleiben. In allen solchen Fällen schirmt man den felderfüllten vom feldfreien Raum durch metallische Hüllen ab. Während elektrische Felder schon durch dünne Metallfolien vollständig abgeschirmt werden, beruht die Schirmwirkung der nichtmagnetischen Metalle auf der Wechselwirkung der in ihnen induzierten Ströme mit dem erzeugenden magnetischen Feld. Sie nimmt daher mit wachsender Frequenz und Wandstärke des Schirmes zu. Viele Autoren wie z. B. J. Hak [17] und [19] und W. Herzog [6]¹⁾ behandeln derartige Probleme mit den Mitteln der Schaltungstechnik, indem sie z. B. den Schirm als Leiter mit einer bestimmten Induktivität, Gegeninduktivität usw. auffassen. Es ist klar, daß man auf diese Weise nur für niedrige Frequenzen zu richtigen Ergebnissen kommt, bei denen in der metallischen Schirmwand noch keine Strom- bzw. Flußverdrängung herrscht. Eine universelle Methode jedoch ergibt sich aus der Auffassung, daß die Schirmwand selbst einen Teil des gesamten Raumes einnimmt, in dem man den Verlauf des magnetischen Feldes ebenso wie in dem umgebenden Luftraum zu untersuchen hat. Formal bedeutet dies die Integration der Maxwellschen Differentialgleichungen in dem gesamten Raum einschließlich des von dem Metall der Hülle eingenommenen Raumteils. Wir werden im folgenden nur eine einzige Einschränkung voraussetzen, nämlich die, daß die Wellenlänge des Störfeldes groß im Vergleich zu der charakteristischen Abmessung des Schirmes sein soll. Dies bedeutet, daß der Verschiebungsstrom sowohl in Luft als auch im Metall vernachlässigt werden darf. Im Schirm fließen dann nur Leitungsströme mit der Stromdichte $\kappa \mathcal{E}$, wobei κ die Leitfähigkeit des Schirmmetalls und \mathcal{E} die elektrische Feldstärke bedeu-

¹⁾ Literaturverzeichnis S. 268ff.

ten. In den Fällen, wo dies nicht mehr zutrifft, kann man dann nicht mehr von magnetischen Feldern sprechen, die von konzentrierten Schaltelementen wie z. B. Spulen erzeugt werden, so daß hier eine neue Technik, z. B. die der cm-Wellen einsetzt, die andere Gesichtspunkte erforderlich macht alshier zur Diskussion stehen. Wir schreiben daher die bekannten Maxwell'schen Differentialgleichungen in der sogenannten *quasistationären* Form :

$$\operatorname{rot} \mathfrak{H} = \kappa \mathfrak{E} \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -j \omega \mu \mathfrak{H}, \quad (2)$$

wobei bereits die zeitliche Periodizität der beiden Feldvektoren, nämlich des magnetischen \mathfrak{H} und des elektrischen Feldvektors \mathfrak{E} eingeführt ist, die die Kreisfrequenz $\omega = 2\pi f$ haben. Der Periodizitätsfaktor $\exp(j\omega t)$ fällt dabei heraus. Es sei hier darauf hingewiesen, daß hier wie im folgenden alle Gleichungen als Größengleichungen aufzufassen sind im Sinne des A.E.F. (siehe ETZ 51, 1936, Seite 586). Dabei ist die Permeabilität μ nicht mehr dimensionslos; so setzt man für die Permeabilität des leeren Raumes $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Henry}}{\text{cm}}$.

Der physikalische Inhalt der Gl. (1) und (2) läßt sich sehr leicht aussprechen, wenn man von der differentiellen zur integralen Form übergeht. Integriert man nämlich beide Seiten der Gl. (1) und (2) über eine beliebige Fläche, so kann man die linken Seiten mit Hilfe des Stokes'schen Integralsatzes in ein Linienintegral über die Berandung der Fläche verwandeln. Dann besagt Gl. (1), daß die magnetische Umlaufspannung längs eines geschlossenen Weges gleich dem Strom ist, der durch eine von diesem Weg begrenzte Fläche hindurchgeht. Gl.(2) liefert die elektrische Umlaufspannung längs eines geschlossenen Weges, die gleich dem Schwund des magnetischen Kraftflusses durch die von diesem Weg begrenzte Fläche ist. Anlässlich der Definition des Kopplungswiderstandes im zweiten Teil durch die Gl. (601) und (602) werden wir der Integralform der Gl (2) wieder begegnen.

Wie wir bereits andeuteten, gehen wir im allgemeinen bei den Schirmungsaufgaben so vor, daß wir den gesamten Raum in drei Teile trennen, wobei wir für jeden von ihnen die Maxwell'schen Gleichungen zu integrieren haben. Wir unterscheiden folgende drei Raumteile: 1. den unendlichen Luftraum außerhalb des Schirmes, 2. den abgeschirmten inneren Luftraum und 3. den von der Schirmwand eingenommenen Raum. Da in den beiden *Lufträumen* die Leitfähigkeit $\kappa = 0$ ist, so ist nach Gl. (1) $\operatorname{rot} \mathfrak{H} = 0$. Infolgedessen ist das magnetische Feld ein Potentialfeld, dessen skalares Potential wir X nennen wollen. Die magnetische Feldstärke läßt sich dann einfach als Gradienten dieser Potentialfunktion angeben entsprechend der Beziehung

$$\mathfrak{H} = \operatorname{grad} X. \quad (3)$$

Da nach Gl. (2) auch $\operatorname{div} \mathfrak{S} = 0$ ist, weil der Operator $\operatorname{div} \operatorname{rot}$ identisch Null ergibt, so berechnet sich die Potentialfunktion X aus der Laplaceschen Differentialgleichung zweiter Ordnung zu

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} X \equiv \Delta X = 0. \quad (4)$$

In der *Metallwand* des Schirmes ist nun die Leitfähigkeit κ von Null verschieden, so daß hier $\operatorname{rot} \mathfrak{S}$ nicht wie in Luft verschwindet. Das bedeutet, daß in diesem Bereich sich die magnetische Feldstärke nicht mehr aus einem Potential herleiten läßt. Wir gehen hier so vor, daß wir die elektrische Feldstärke \mathfrak{E} bevorzugen, indem wir die magnetische Feldstärke eliminieren. Dies geschieht, weil der Schirmstrom, dem \mathfrak{E} proportional ist, anschaulich gegeben ist; in vielen Fällen hat \mathfrak{E} nur eine einzige Komponente. Aus Gl. (1) und (2) erhält man nun nach der Elimination von \mathfrak{S}

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} + k^2 \mathfrak{E} = 0. \quad (5)$$

Hierin ist $k^2 = j \omega \mu \kappa$. Wir nennen k die Wirbelstromkonstante, auf die wir weiter unten noch näher eingehen werden. Oft kann man nun Gl. (5) mit Hilfe der Relation $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathfrak{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathfrak{E} - \Delta \mathfrak{E}$ umformen. Da $\operatorname{div} \mathfrak{E} = 0$ ist wegen Gl. (1), so erhält man an Stelle von Gl. (5), die einfachere Beziehung

$$\Delta \mathfrak{E} = k^2 \mathfrak{E}. \quad (6)$$

Diese Beziehung stellt jedoch nur dann eine Vereinfachung von Gl. (5) dar, wenn \mathfrak{E} Komponenten nach geradlinigen Koordinaten hat. In diesem Fall kann man den Laplaceschen Operator Δ in Gl. (6) einfach auf jede Komponente einzeln anwenden. Bei unseren Untersuchungen hat \mathfrak{E} oft nur eine einzige geradlinige Komponente, dann wird Gl. (6) natürlich besonders einfach. Es sei hier angemerkt, daß Gl. (6) z. B. nicht für den Fall einer Kugel anwendbar ist, bei der \mathfrak{E} eine zirkulare Komponente hat. Hierfür greift man zweckmäßig auf Gl. (5) zurück. Selbstverständlich kann man unter der gleichen Einschränkung auch für den magnetischen Feldvektor dieselbe Beziehung herleiten

$$\Delta \mathfrak{S} = k^2 \mathfrak{S}, \quad (7)$$

die in solchen Fällen nützlich ist, wo \mathfrak{S} nur eine Komponente hat wie z. B. beim Plattenschirm.

Alle die Gleichungen (4) bis (7) sind partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung. Infolgedessen kommen in den drei allgemeinen Lösungen für die drei Raumteile je zwei unbekannte Konstanten vor, so daß im ganzen sechs Unbekannte vorhanden sind. Hiervon sind jedoch zwei bereits durch folgende Bedingungen festgelegt, wobei wir zwischen den Alternativen a und b unterscheiden:

a) Bei einem äußeren Störfeld muß die Lösung im Außenraum für große Entfernungen vom Schirm

in das vorgegebene Störfeld übergehen. Ferner darf die Lösung im abgeschirmten Innenraum nicht unendlich groß werden.

b) Bei innerer Felderregung

muß die Lösung im abgeschirmten Innenraum eine der Felderregung entsprechende Singularität annehmen, während sie außen für große Entfernungen verschwinden muß. — Die restlichen vier Konstanten werden nun durch die bekannten Übergangsbedingungen an den beiden Grenzflächen zwischen den drei Raumbereichen festgelegt. Hiernach fordern wir, daß die tangentielle Komponente sowohl der magnetischen als auch der elektrischen Feldstärke an der inneren und äußeren Schirmoberfläche stetig, d. h. ohne Sprung, übergeht. Diese Forderungen führen zu vier Gleichungen, die zur Berechnung der vier unbekanntenen Konstanten ausreichen. Oft ist es für die Rechnung bequemer, an Stelle der Stetigkeitsforderung für die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke diejenige für die Normalkomponente der Induktion $\mu \mathfrak{H}$ zu nehmen. Daß diese Bedingungen gleichbedeutend sind, ergibt sich aus Gl. (2), wonach die Normalkomponente von $\mu \mathfrak{H}$ gleich ist der Änderung der Tangentialkomponente von \mathfrak{E} in einer senkrecht zu ihr verlaufenden Tangentialrichtung.

Für die technische Verwertung der gefundenen Ergebnisse ist die im Anschluß an Gl. (5) erwähnte Wirbelstromkonstante k von grundlegender Bedeutung. Diese ist komplex mit gleichem Real- und Imaginärteil. Wir definieren nun an ihrer Stelle eine zweite reelle Größe δ entsprechend der Formel:

$$k = \frac{1 + j}{\delta}, \quad (8)$$

die wir die äquivalente Leitschichtdicke nennen, und die die Dimension einer Länge hat. Sie ist eine Materialkonstante, in die noch die Frequenz eingeht, und berechnet sich aus der Gleichung:

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu \kappa}} = \frac{10^4}{2\pi} \frac{\text{mm}}{\sqrt{f/\text{kHz} \kappa / \frac{\text{S}}{\text{cm}} \mu / \mu_0}} = \frac{10^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\varrho / \Omega \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}}{f/\text{kHz} \mu / \mu_0}}, \quad (9)$$

in der $\varrho = 1 : \kappa$ der spezifische Widerstand und μ / μ_0 die relative Permeabilität des Schirmmetalls bedeuten. Die äquivalente Leitschichtdicke δ hat folgende anschauliche Bedeutung, auf die auch ihre Benennung zurückzuführen ist: Ein kreiszylindrisches, dünnwandiges Rohr der Stärke δ setzt dem Gleichstrom denselben Widerstand entgegen wie der massive Zylinder gleichen Durchmessers und gleichen Materials dem Hochfrequenzstrom. Man erkennt aus Gl. (9), daß δ um so kleiner ist, je höher die Frequenz f ist, die mit der Wurzel eingeht. Aus Bild 1 kann

man δ direkt für die wichtigsten Metalle ohne Rechnung entnehmen, wobei auf der Abszisse die Frequenz aufgetragen ist. Man erkennt, daß δ für Eisen besonders klein ist, weil die Wurzel aus der relativen Permeabilität im Nenner steht.

Metall	Chem. Zeich.	Spez. Wdst. $\rho/\text{Ohm} \frac{\text{mm}^2}{\text{m}}$	Leitfähigk. $\kappa/\frac{\text{Siemens}}{\text{cm}}$	Äquivalente Leitschichtdicke δ/mm
Aluminium	Al	0,03	$33,3 \cdot 10^4$	$2,75 \cdot \sqrt{\frac{1}{f/\text{kHz}}}$
Blei	Pb	0,21	$4,76 \cdot 10^4$	7,30 · „
Eisen	Fe	0,1 bei $\mu = 200 \mu_0$	$10 \cdot 10^4$	0,355 · „
		0,67 „ $\mu = 2000 \mu_0$	$1,5 \cdot 10^4$	0,290 · „
Kupfer	Cu	0,0175	$57 \cdot 10^4$	2,10 · „
Messing	—	$\approx 0,075$	$13,3 \cdot 10^4$	4,35 · „
Zink	Zn	0,06	$16,7 \cdot 10^4$	3,90 · „
Zinn	Sn	0,12	$8,35 \cdot 10^4$	5,50 · „

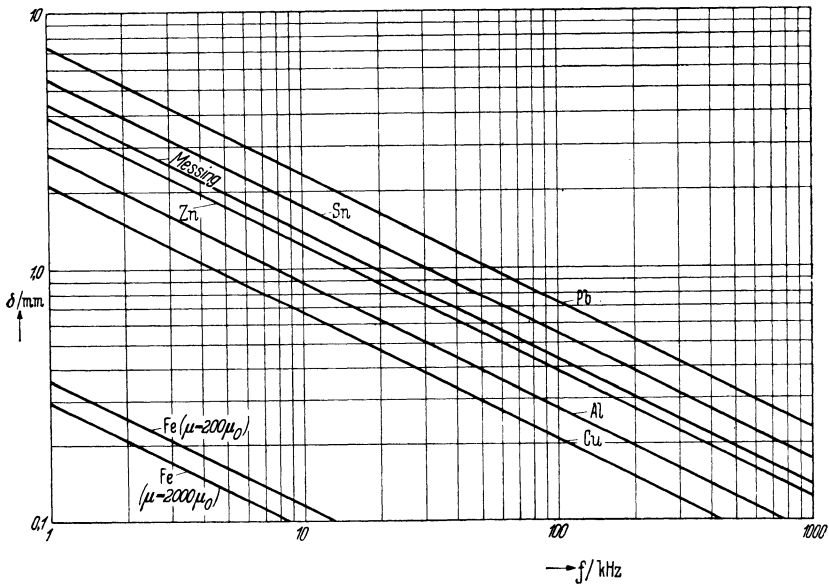


Abb. 1. Die äquivalente Leitschichtdicke in Abhängigkeit von der Frequenz für verschiedene Metalle.

Zuweilen findet man den Begriff der Eindringtiefe, der jedoch nicht eindeutig definiert ist. Nimmt man z. B. die Eindringtiefe als denjenigen Abstand von der Oberfläche an, in welchem das Feld auf 1% des Feldes

an der Oberfläche abgeklungen ist, so ist sie gleich $4,6 \delta$. Bei 10% Abschwächung wäre die Eindringtiefe gleich $2,3 \delta$; sie ist gleich δ , wenn man die Schwächung gleich $1 : e = 1 : 2,72$ setzt.

Wir haben bisher unsere Gleichungen in der bekannten Symbolik aus der Vektoranalysis geschrieben, die den Vorzug hat, unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem definiert zu sein. Wenn man nun praktische Aufgaben lösen will, so muß man die Vektoroperationen in einem bestimmten, dem jeweiligen Problem angepaßten Koordinatensystem hinschreiben. Um dem Leser das Verständnis für das folgende zu erleichtern, wollen wir hier die vorkommenden Vektoroperationen für die verschiedenen Koordinatensysteme, die im Text verwendet werden, zusammenstellen [33], [34]. Folgende Koordinatensysteme werden benutzt:

1. Kartesische Koordinaten x, y, z (Abb. 2)
2. Zylinderkoordinaten r, φ, z (Abb. 6)
3. Kugelkoordinaten r, φ, ϑ (Abb. 10).

Folgende Operationen kommen vor:

$\text{grad } X$ (sprich: „Gradient von einer Potentialfunktion X “) ist ein Vektorfeld

ΔX (sprich: „Delta von X “ oder Laplacescher Operator von X) ist eine skalare Feldgröße

$\text{rot } \mathfrak{A}$ (sprich: „Rotation des Vektorfeldes \mathfrak{A} “) ist wieder ein Vektorfeld

$\text{div } \mathfrak{A}$ (sprich: „Divergenz eines Vektorfeldes \mathfrak{A} “) ist eine skalare Feldgröße.

Im folgenden bezeichnet die Koordinate im Index immer die Komponente des Vektors nach der betreffenden Koordinate.

1. Operationen in kartesischen Koordinaten x, y, z .

$$\text{grad}_x X = \frac{\partial X}{\partial x}; \quad \text{grad}_y X = \frac{\partial X}{\partial y}; \quad \text{grad}_z X = \frac{\partial X}{\partial z}. \quad (10)$$

$$\Delta X \equiv \text{div grad } X = \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2}. \quad (11)$$

$$\text{rot}_x \mathfrak{A} = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$\text{rot}_y \mathfrak{A} = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad (12)$$

$$\text{rot}_z \mathfrak{A} = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

$$\text{div } \mathfrak{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}. \quad (13)$$

2. Operationen in Zylinderkoordinaten (Abb. 6)¹⁾

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \varphi ; y = r \sin \varphi ; z = z ; \\
 \text{grad}_r X &= \frac{\partial X}{\partial r} ; \text{grad}_\varphi X = \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \varphi} ; \text{grad}_z X = \frac{\partial X}{\partial z} .
 \end{aligned} \quad (14)$$

$$\Delta X \equiv \text{div grad } X = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 X}{\partial z^2} . \quad (15)$$

$$\begin{aligned}
 \text{rot}_r \mathfrak{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} , \\
 \text{rot}_\varphi \mathfrak{A} &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} ,
 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 \text{rot}_z \mathfrak{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} . \\
 \text{div } \mathfrak{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z} .
 \end{aligned} \quad (17)$$

3. Operationen in Kugelkoordinaten (Abb. 10)

$$\begin{aligned}
 x &= r \cos \vartheta \sin \varphi ; y = r \sin \vartheta \sin \varphi ; z = r \cos \vartheta ; \\
 \text{grad}_r X &= \frac{\partial X}{\partial r} ; \text{grad}_\varphi X = \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial X}{\partial \varphi} ; \text{grad}_\vartheta X = \frac{1}{r} \frac{\partial X}{\partial \vartheta} .
 \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
 \Delta X \equiv \text{div grad } X &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial X}{\partial r} \right) + \\
 &+ \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 X}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\sin \vartheta \frac{\partial X}{\partial \vartheta} \right) .
 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
 \text{rot}_r \mathfrak{A} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right] , \\
 \text{rot}_\varphi \mathfrak{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} , \\
 \text{rot}_\vartheta \mathfrak{A} &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \sin \vartheta \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] .
 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\text{div } \mathfrak{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta) A_\vartheta . \quad (21)$$

1) Für Polarkoordinaten ist $\frac{\partial}{\partial z} = 0$; im übrigen gelten die gleichen Formeln.