

ANALYTISCHE DYNAMIK DER PUNKTE UND STARREN KÖRPER

MIT EINER EINFÜHRUNG IN DAS
DREIKÖRPERPROBLEM UND MIT
ZAHLREICHEN ÜBUNGS-AUFGABEN

VON

E. T. WHITTAKER

PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER
UNIVERSITÄT EDINBURGH

NACH DER ZWEITEN AUFLAGE ÜBERSETZT VON
DR. F. UND K. MITTELSTEN SCHEID
IN MARBURG A. D. LAHN



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

1924

ISBN 978-3-662-24567-5 ISBN 978-3-662-26714-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-26714-1

ALLE RECHTE, INSBESONDERE
DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN, VORBEHALTEN.

Vorwort.

Whittakers Lehrbuch der Dynamik ist längst als eine der besten Darstellungen seines Gegenstandes bekannt. Es bedarf daher keiner besonderen Begründung, wenn mit der vorliegenden Übersetzung der Versuch gemacht wird, dieses Werk im deutschen Sprachgebiet zugänglicher zu machen. Die Auswahl des Stoffes von den Elementen bis tief in die Probleme der höheren Mechanik, die eindringende und klare Gedankenentwicklung, die gründlichen historischen und literarischen Verweisungen, die reiche Fülle der Beispiele und Aufgaben werden dem Werke auch bei dem Deutsch lesenden Publikum einen hervorragenden Platz sichern.

Herr und Frau Dr. Mittelsten Scheid, die sich in dankenswerter Weise der Übersetzungsaufgabe unterzogen haben, sind dabei weitgehend von Dr. H. Kneser unterstützt worden.

Besonderer Dank gebührt dem Autor und der Cambridge University Press für ihr Entgegenkommen bei der Überlassung des Übersetzungsrechtes.

Der Herausgeber.

Inhaltsverzeichnis.

Erstes Kapitel.

Einleitendes aus der Kinematik.

	Seite
§ 1. Die Bewegung starrer Körper	1
§ 2. Der Eulersche Satz von der Drehung um einen Punkt	1
§ 3. Der Satz von Rodrigues und Hamilton	3
§ 4. Die Zusammensetzung entgegengesetzt gleicher Drehungen um parallele Achsen.	3
§ 5. Der Chaslessche Satz von der allgemeinsten Bewegung eines starren Körpers	4
§ 6. Halphens Satz von der Zusammensetzung zweier beliebiger Bewegungen	5
§ 7. Die analytische Darstellung einer Bewegung	6
§ 8. Die Zusammensetzung infinitesimaler Rotationen	7
§ 9. Eulers Parameterdarstellung der Rotation um einen Punkt	8
§ 10. Die Eulerschen Winkel.	9
§ 11. Zusammenhang der Eulerschen Winkel mit den Parametern ξ, η, ζ, χ	10
§ 12. Zusammenhang der Rotation mit den linearen Transformationen; die Cayley-Kleinschen Parameter	11
§ 13. Vektoren	14
§ 14. Geschwindigkeit und Beschleunigung; ihr Vektorcharakter	14
§ 15. Die Winkelgeschwindigkeit; ihr Vektorcharakter	15
§ 16. Die Komponenten der Winkelgeschwindigkeit eines Systems als Funktionen der Eulerschen Winkel bzw. der Eulerschen Parameter	16
§ 17. Die zeitliche Ableitung eines Vektors, dessen Komponenten nach bewegten Achsen gegeben sind.	17
§ 18. Spezielle Komponentenzerlegung der Geschwindigkeit und Beschleunigung	19
Übungsaufgaben	24

Zweites Kapitel.

Die Bewegungsgleichungen.

§ 19. Die Begriffe der Ruhe und Bewegung	28
§ 20. Die Gesetze der Bewegung	29
§ 21. Kraft	31
§ 22. Arbeit	32
§ 23. Kräfte, die keine Arbeit leisten	33
§ 24. Die Koordinaten eines dynamischen Systems	35
§ 25. Holonome und nicht-holonome Systeme	36
§ 26. Die Lagrangeschen Bewegungsgleichungen eines holonomen Systems	37
§ 27. Konservative Kräfte; das kinetische Potential	40
§ 28. Die explizite Form der Lagrangeschen Gleichungen	41

	Seite
§ 29. Die Bewegung eines Systems, das gezwungen ist, gleichförmig um eine Achse zu rotieren	42
§ 30. Die Lagrangeschen Gleichungen in Quasi-Koordinaten	44
§ 31. Kräfte, die aus einer von den Geschwindigkeiten abhängigen Potentialfunktion entspringen	47
§ 32. Anfangsbewegungen	48
§ 33. Ähnlichkeit dynamischer Systeme	49
§ 34. Bewegung bei Umkehrung der Krafrichtung.	50
§ 35. Stoßbewegung	51
§ 36. Die Lagrangeschen Gleichungen der Stoßbewegung	53
Übungsaufgaben	54

Drittes Kapitel.

Integrationsprinzipien.

§ 37. Durch Quadraturen lösbare Probleme	55
§ 38. Systeme mit zyklischen Koordinaten	57
§ 39. Spezielle Fälle der Reduktion: die Integrale der Bewegungsgröße und des Moments der Bewegungsgröße	61
§ 40. Der allgemeine Satz von dem Moment der Bewegungsgröße	64
§ 41. Die Energiegleichung	65
§ 42. Reduktion eines dynamischen Problems auf ein Problem mit weniger Freiheitsgraden mit Hilfe der Energiegleichung	67
§ 43. Trennung der Veränderlichen; dynamische Systeme vom Liouville'schen Typus	71
Übungsaufgaben	73

Viertes Kapitel.

Die lösbaren Probleme der Punktdynamik.

§ 44. Der Massenpunkt mit einem Freiheitsgrad; das Pendel	75
§ 45. Bewegung eines Punktes auf einer bewegten Kurve	78
§ 46. Bewegung zweier freier Massenpunkte unter gegenseitiger Einwirkung	80
§ 47. Allgemeiner Fall der Zentralkräfte. Der Satz von Hamilton.	81
§ 48. Durch Quadraturen lösbare Fälle von Zentralbewegung; Integration mit Kreisfunktionen und elliptischen Funktionen	85
§ 49. Bewegung nach dem Newtonschen Anziehungsgesetz	91
§ 50. Das Feld einer Zentralkraft und das Feld einer Parallelkraft in ihrer Wechselbeziehung.	98
§ 51. Der Satz von Bonnet	99
§ 52. Bestimmung des allgemeinsten Kraftfeldes, in dem eine gegebene Kurve oder Kurvenschar beschrieben werden kann	100
§ 53. Das Problem der zwei Anziehungszentren	102
§ 54. Bewegung auf einer Fläche	104
§ 55. Bewegung auf einer Rotationsfläche; die durch Kreisfunktionen und elliptische Funktionen lösbaren Fälle	108
§ 56. Der Satz von Joukowski	115
Übungsaufgaben	117

Fünftes Kapitel

Das dynamische Verhalten starrer Körper.

	Seite
§ 57. Definitionen	123
§ 58. Trägheitsmomente einfacher Körper	124
§ 59. Bestimmung des Trägheitsmoments um eine beliebige Achse aus dem Trägheitsmoment um eine parallele Achse durch den Schwerpunkt	127
§ 60. Der Zusammenhang der Trägheitsmomente in bezug auf verschiedene Koordinatensysteme mit gemeinsamem Ursprung	128
§ 61. Die Hauptträgheitsachsen; das Cauchysche Trägheitsellipsoid	130
§ 62. Berechnung des Moments der Bewegungsgröße eines bewegten starren Körpers	130
§ 63. Berechnung der kinetischen Energie eines bewegten starren Körpers	132
§ 64. Unabhängigkeit der Bewegung des Schwerpunkts und der Bewegung relativ zum Schwerpunkt voneinander	133
Übungsaufgaben	135

Sechstes Kapitel.

Die lösbaren Probleme der Dynamik starrer Körper.

§ 65. Die Bewegung eines Systems mit einem Freiheitsgrad; Bewegung um eine feste Achse usw.	138
§ 66. Die Bewegung eines Systems mit zwei Freiheitsgraden	144
§ 67. Anfangsbewegungen	148
§ 68. Die Bewegung von Systemen mit drei Freiheitsgraden	151
§ 69. Kräftefreie Bewegung eines Körpers um einen festen Punkt	152
§ 70. Die kinematische Darstellung der Bewegung nach Poinso; Polhodie und Herpolhodie	161
§ 71. Bewegung eines Kreisels auf einer völlig rauhen Ebene; Bestimmung des Eulerschen Winkels ϑ	164
§ 72. Bestimmung der übrigen Eulerschen Winkel und der Cayley-Kleinschen Parameter; der Kugelkreisel	168
§ 73. Die Bewegung eines Kreisels auf einer glatten Ebene	173
§ 74. Der Kowalewskische Kreisel	174
§ 75. Stoßbewegung	177
Übungsaufgaben	180

Siebentes Kapitel.

Theorie der Schwingungen.

§ 76. Schwingungen um eine Gleichgewichtslage	188
§ 77. Normalkoordinaten	190
§ 78. Der Satz von Sylvester über die Realität der Wurzeln der Determinantengleichung	194
§ 79. Integration der Differentialgleichungen. Die Perioden. Stabilität.	196
§ 80. Beispiele von Schwingungen um eine Gleichgewichtslage	198
§ 81. Die Wirkung einer neuen Bindung auf die Perioden eines schwingenden Systems	202
§ 82. Der stationäre Charakter der Normalschwingungen	204
§ 83. Schwingungen um einen stationären Bewegungszustand	205
§ 84. Die Integration der Gleichungen	208
§ 85. Beispiele von Schwingungen um einen stationären Bewegungszustand	216
§ 86. Schwingungen von Systemen mit veränderlichen Bindungen	220
Übungsaufgaben	221

Achtes Kapitel.

Nicht-holonome Systeme. Systeme mit Energiezerstreuung.

	Seite
§ 87. Lagrangesche Gleichungen mit unbestimmten Multiplikatoren . . .	227
§ 88. Bewegungsgleichungen, bezogen auf beliebig bewegte Achsen . . .	229
§ 89. Anwendung auf spezielle nicht-holonome Systeme.	231
§ 90. Schwingungen nicht-holonomer Systeme	234
§ 91. Systeme mit Energiezerstreuung. Reibungskräfte	240
§ 92. Von der Geschwindigkeit abhängige Widerstandskräfte	242
§ 93. Die Zerstreungsfunktion von Rayleigh	244
§ 94. Schwingungen von Systemen mit Energiezerstreuung	245
§ 95. Der Stoß	247
§ 96. Der Energieverlust beim Stoß	248
§ 97. Beispiele für Stoßbewegungen.	249
Übungsaufgaben	252

Neuntes Kapitel.

Die Prinzipien der kleinsten Wirkung und kleinsten Krümmung.

§ 98. Die Bahn eines dynamischen Systems	259
§ 99. Das Hamiltonsche Prinzip für konservative holonome Systeme . .	259
§ 100. Das Prinzip der kleinsten Wirkung für konservative holonome Systeme	261
§ 101. Ausdehnung des Hamiltonschen Prinzips auf nicht-konservative dynamische Systeme	263
§ 102. Ausdehnung des Hamiltonschen Prinzips und des Prinzips der kleinsten Wirkung auf nicht-holonome Systeme	264
§ 103. Sind die stationären Integrale Minima? Kinetische Brennpunkte .	265
§ 104. Darstellung der Bewegung eines dynamischen Systems mit Hilfe der geodätischen Linien	269
§ 105. Das Gauß-Hertzsche Prinzip der geradesten Bahn	270
§ 106. Die Krümmung der Bahn als Funktion der allgemeinen Koordinaten	272
§ 107. Die Appellschen Gleichungen	274
§ 108. Der Bertrandsche Satz	276
Übungsaufgaben	277

Zehntes Kapitel.

Hamiltonsche Systeme und ihre Integralinvarianten.

§ 109. Die Hamiltonsche Form der Bewegungsgleichungen	279
§ 110. Aus Variationsproblemen hervorgehende Gleichungen	281
§ 111. Integralinvarianten	283
§ 112. Die Variationsgleichungen	284
§ 113. Integralinvarianten erster Ordnung	285
§ 114. Relative Integralinvarianten	287
§ 115. Eine allen Hamiltonschen Systemen gemeinsame relative Integralinvariante	288
§ 116. Über die Systeme mit der relativen Integralinvariante $\int \sum p \delta q$. .	289
§ 117. Die Integralinvarianten als Funktionen der Integrale	290
§ 118. Der Satz von Lie und Koenigs	291
§ 119. Der letzte Multiplikator	292

	Seite
§ 120. Ableitung eines Integrals aus zwei Multiplikatoren	296
§ 121. Anwendung der Theorie des letzten Multiplikators auf Hamiltonsche Systeme; Benutzung eines einzigen bekannten Integrals	297
§ 122. Integralinvarianten, deren Ordnung gleich der Ordnung des Systems ist	300
§ 123. Reduktion von Differentialgleichungen auf die Lagrangesche Form.	301
§ 124. Der Spezialfall, daß die kinetische Energie eine quadratische Funktion der Geschwindigkeiten ist	302
Übungsaufgaben	303

Elftes Kapitel.

Die Transformationstheorie der Dynamik.

§ 125. Hamiltons charakteristische Funktion; Berührungstransformationen.	306
§ 126. Berührungstransformationen im Raum von beliebig vielen Dimensionen	311
§ 127. Die bilineare Kovariante einer allgemeinen Differentialform	314
§ 128. Die Bedingungen für eine Berührungstransformation, ausgedrückt durch die bilineare Kovariante.	315
§ 129. Die Bedingungen für eine Berührungstransformation, dargestellt mit Hilfe der Lagrangeschen Klammerausdrücke	316
§ 130. Die Poissonschen Klammerausdrücke	317
§ 131. Die Bedingungen für eine Berührungstransformation, dargestellt mit Hilfe der Poissonschen Klammerausdrücke	319
§ 132. Die Untergruppen der Mathieschen Transformationen und erweiterten Punkttransformationen	320
§ 133. Infinitesimale Berührungstransformationen	321
§ 134. Die neue Auffassung der Dynamik auf Grund der Berührungstransformationen	323
§ 135. Der Reziprozitätssatz von Helmholtz	323
§ 136. Der Jacobische Satz von der Transformation eines gegebenen dynamischen Systems in ein anderes dynamisches System	325
§ 137. Darstellung eines dynamischen Problems durch eine Differentialform	326
§ 138. Die Hamiltonsche Funktion der transformierten Gleichungen	328
139. Transformationen, bei denen auch die unabhängige Veränderliche transformiert wird	330
§ 140. Neue Formulierung des Integrationsproblems	330
Übungsaufgaben	331

Zwölftes Kapitel.

Die Eigenschaften der Integrale dynamischer Systeme.

§ 141. Reduktion der Ordnung eines Hamiltonschen Systems mit Hilfe des Energieintegrals	333
§ 142. Die Hamiltonsche partielle Differentialgleichung	334
§ 143. Das Hamiltonsche Integral als Lösung der Hamiltonschen partiellen Differentialgleichung	337
§ 144. Der Zusammenhang der Integrale mit den infinitesimalen Transformationen des Systems	339
§ 145. Der Poissonsche Satz	340
§ 146. Die Konstanz der Lagrangeschen Klammerausdrücke	342
§ 147. Involutionssysteme	342

	Seite
§ 148. Lösung eines dynamischen Problems, von dem die Hälfte der Integrale bekannt ist	343
§ 149. Der Satz von Levi-Civita	346
§ 150. Systeme mit in den Bewegungsgrößen linearen Integralen	349
§ 151. Bestimmung der auf ein System wirkenden Kräfte, wenn ein Integral bekannt ist	352
§ 152. Anwendung auf das Problem eines Massenpunktes, dessen Bewegungsgleichungen ein in den Geschwindigkeiten quadratisches Integral besitzen	353
§ 153. Allgemeine dynamische Systeme mit Integralen, die quadratische Funktionen der Geschwindigkeiten sind	356
Übungsaufgaben	357

Dreizehntes Kapitel.

Die Reduktion des Dreikörperproblems.

§ 154. Einleitung	360
§ 155. Die Differentialgleichungen des Problems	361
§ 156. Die Jacobische Gleichung	363
§ 157. Reduktion auf die 12. Ordnung mit Hilfe der Integrale der Schwerpunktsbewegung	364
§ 158. Reduktion auf die 8. Ordnung mit Hilfe der Integrale des Moments der Bewegungsgröße und der Elimination der Knoten	366
§ 159. Reduktion auf die 6. Ordnung	369
§ 160. Eine andere Methode zur Reduktion des Systems von der 18. auf die 6. Ordnung	370
§ 161. Das ebene Dreikörperproblem.	373
§ 162. Das eingeschränkte Dreikörperproblem.	376
§ 163. Übertragung auf das n -Körperproblem	379
Übungsaufgaben	379

Vierzehntes Kapitel.

Die Sätze von Bruns und Poincaré.

§ 164. Der Satz von Bruns	381
§ 165. Der Satz von Poincaré.	406

Fünfzehntes Kapitel.

Allgemeine Theorie der Bahnkurven.

§ 166. Einleitung	414
§ 167. Periodische Lösungen	414
§ 168. Poincarés Normalkoordinaten für eine bekannte periodische Bahnkurve	415
§ 169. Ein Kriterium zur Auffindung periodischer Bahnkurven.	416
§ 170. Lagranges drei Massenpunkte	419
§ 171. Die Stabilität der Lagrangeschen Massenpunkte; benachbarte periodische Bahnen	422
§ 172. Die Differentialgleichung der Normalverrückung aus einer Bahnkurve	424
§ 173. Der Satz von Korteweg	425

	Seite
§ 174. Der Stabilitätsindex	427
§ 175. Charakteristische Exponenten	429
§ 176. Eigenschaften der charakteristischen Exponenten	431
§ 177. Anziehende und abstoßende Bereiche eines Kraftfeldes	432
§ 178. Anwendung des Energieintegrals auf das Stabilitätsproblem	436
§ 179. Verwertung von Integralinvarianten für Stabilitätsuntersuchungen	437
Übungsaufgaben	437

Sechszehntes Kapitel.

Integration durch trigonometrische Reihen.

§ 180. Reihen, die für alle Werte der Zeit konvergieren; Poincarésche Reihen	440
§ 181. Die Regularisierung des Dreikörperproblems	441
§ 182. Trigonometrische Reihen	443
§ 183. Beseitigung von Gliedern 1. Grades aus der Energiefunktion	444
§ 184. Bestimmung der Normalkoordinaten durch eine Berührungstransformation	445
§ 185. Transformation von H in die trigonometrische Form	448
§ 186. Andere Bewegungstypen, die auf Gleichungen derselben Form führen	450
§ 187. Beseitigung eines periodischen Gliedes aus H	451
§ 188. Beseitigung weiterer periodischer Glieder aus H	454
§ 189. Rückkehr zu den ursprünglichen Koordinaten	455
Übungsaufgaben	456
Namenverzeichnis	457
Sachverzeichnis.	459