

# Springer-Lehrbuch

---

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

**Physics and Astronomy**  **ONLINE LIBRARY**

<http://www.springer.de/phys-de/>

May-Britt Kallenrode

---

# Rechenmethoden der Physik

Mathematischer Begleiter  
zur Experimentalphysik

Mit 47 Abbildungen,  
297 Aufgaben und Lösungen



Springer

Professor Dr. May-Britt Kallenrode  
Universität Osnabrück  
Fachbereich Physik  
Barbarastrasse 7  
49069 Osnabrück, Deutschland  
e-mail: mkallenr@uni-osnabrueck.de

ISBN 978-3-540-44387-2 ISBN 978-3-662-09693-2 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-662-09693-2

**Bibliografische Information der Deutschen Bibliothek:**

Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

<http://www.springer.de>

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2003

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2003

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Druckfertige Vorlage vom Autor erstellt unter Verwendung eines Springer  $\text{\LaTeX}$  Makropakets  
Einbandgestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN: 10895148 56/3141 ba - 5 4 3 2 1 0

# Vorwort




Mathematik ist die Sprache der Physik. Jedem Physikstudierenden wird dies bereits im ersten Semester beim Blick auf den Studienplan deutlich: Mathematik nimmt einen großen Raum ein. Sie ist notwendig, um Grundkonzepte der Physik elegant und eindeutig zu formulieren. In dieser Sprache Mathematik hat die Physik die Möglichkeit gefunden, sich von einer phänomenologisch orientierten Naturbeschreibung zu einer Wissenschaft zu entwickeln, die mit wenigen fundamentalen Gesetzen und Konzepten, wie z.B. den Erhaltungssätzen, selbst komplexe und der direkten Beobachtung nicht zugängliche Prozesse beschreiben kann, wie z.B. die Energieerzeugung im Innern der Sterne. Ein weiterer Aspekt der Physik ist die Vorhersagefähigkeit: Physik will nicht nur den Ist-Zustand eines Systems beschreiben sondern auch Vorhersagen über seine weitere Entwicklung oder sein Verhalten unter anderen Bedingungen geben – wieder unter Verwendung einer mathematischen Formulierung.

An der Notwendigkeit der Mathematik in der Physikausbildung besteht keine Zweifel. Schwierigkeiten gibt es in der praktischen Durchführung: das sorgfältige Studium und Verständnis der mathematischen Grundlagen kostet Zeit. Andererseits möchte die Physik bereits früh im Studium den Übergang zur Konzept orientierten formalen Wissenschaft vermitteln und benötigt dafür die Mathematik. Die Rechenmethoden möchten aus dieser Zwickmühle heraus helfen. Es will kein Lehrbuch der Sprache Mathematik sein sondern ein Sprachführer, der Ihnen in verschiedenen Situationen die notwendigen Rechenmethoden zur Verfügung stellt; z.B. bei der Bestimmung von Trägheitsmomenten die Mehrfachintegrale, bei der Beschreibung von Bewegungen die Differentialgleichungen oder bei der Beschreibung von Feldern die Vektoranalysis. Ebenso, wie Sie aus einem Sprachführer keine Sprache lernen können, können Sie aus diesem Buch nicht die Mathematik in ihren Feinheiten und ihrer formalen Strenge erlernen. Aber, wie bei einem Sprachführer, sollen die Rechenmethoden Ihnen helfen, die zum Verständnis der Experimentalphysik notwendigen mathematischen Werkzeuge in ihren Grundzügen zu erfassen und anwenden zu können.

Das vorliegende Buch basiert auf einer über 2 Semester jeweils einstündig gehaltenen Vorlesung, deren Aufbau in enger Anlehnung an den zeitlichen Ablauf der Experimentalphysik-Vorlesung gewählt wurde. Für die vorliegen-

de Buchform wurde der Aufbau so modifiziert, daß die einzelnen Themen im wesentlichen in der Reihenfolge eingeführt werden, wie sie in einem Lehrbuch zur Experimentalphysik benötigt werden. Hier stand, meinem persönlichen Geschmack folgend, der Demtröder [3–6] Pate.

Das Buch gliedert sich in drei Teile. In Teil 1 werden die Rechenmethoden eingeführt, die in der Mechanik benötigt werden: der Umgang mit Vektoren, Mehrfachintegrale, Matrizen und Differentialgleichungen. Teil 2 soll beim Verständnis der Elektrodynamik unterstützen: er führt ein in die Vektoranalysis und partielle Differentialgleichungen. Der dritte Teil befaßt sich mit Verteilungsfunktionen und legt die Basis zum Verständnis der statistischen Mechanik einerseits und der Grundlagen der Meßdatenauswertung andererseits.

Randmarkierungen helfen, den jeweiligen Stoff einzuschätzen. Ausgehend von der Sprachführeranalogie verfolgen die Rechenmethoden den Ansatz, daß sie ohne Vorkenntnisse verwendet werden können. Daher wird in verschiedenen Abschnitten Schulstoff wiederholt, der gegebenenfalls übersprungen werden kann. Diese Anschnitte sind durch eine Tafel  markiert, versehen mit einem Querverweis zu dem Abschnitt, ab dem Stoff vermittelt wird, der nicht mehr zum normalen Oberstufenrepertoire gehört. Andere Kapitel bzw. Abschnitte behandeln sehr speziellen Stoff und können beim ersten Durcharbeiten weggelassen werden. Diese sind durch einen etwas ratlosen und überforderten Leser  gekennzeichnet, ebenfalls mit dem Hinweis, an welcher Stelle im normalen Text weiter gearbeitet werden sollte. An anderen Stellen gibt es bei etwas komplexeren Problemen für Ratlose eine Zusammenfassung der Rechenschritte. Zum leichteren Auffinden sind diese Kochrezepte am Rande mit  gekennzeichnet.

Viele der hier vorgestellten Rechenmethoden werden Ihnen im Laufe Ihres Studiums immer wieder begegnen. Diese Methoden müssen Ihnen vertraut werden; so vertraut, daß Sie bei einem physikalischen Problem erkennen können, welches Werkzeug Sie zu seiner Behandlung aus Ihrem Werkzeugkasten 'Rechenmethoden' ziehen müssen. Diese Vertrautheit können Sie nur durch wiederholte Anwendung erreichen. Daher enthält dieses Buch Übungsaufgaben. Nehmen Sie das Angebot wahr, rechnen Sie. Und wenn Sie nicht sehr viel Zeit haben, erarbeiten Sie sich zumindest die Lösungsansätze. Viele weitere Aufgaben, zu einem großen Teil auch mit Lösungen, finden Sie als Rechenaufgaben im Papula [18–20] sowie als Aufgaben mit physikalischem Hintergrund im Greiner [8–12]. Der Papula kann auch als Ergänzung zum vorliegenden Buch dienen, insbesondere für die Studierenden, die einen etwas größeren Abstand zur Mathematik haben. Weitere empfehlenswerte Bücher sind der Korsch [17], der sich noch stärker am Demtröder orientiert und bei ähnlicher Stoffauswahl wie das vorliegende Buch ein höheres Niveau erreicht, sowie Großmann [13], Hassani [14] und Seaborn [21], die alle Teilaspekte des vorliegenden Buches in erweiterter Form abdecken.



→ x.y.z



→ x.y.z



Die Entstehung dieses Buches wurde von vielen Personen unterstützend begleitet. Insbesondere möchte ich mich bei Rainer Pacena bedanken, der nicht nur die allerersten Versionen der Vorlesungsskripte begleitet hat, sondern auch die vollständige Buchversion durchgearbeitet und kommentiert hat. Sven-Lars Schulz und Tobias Hahn gebührt ein großer Dank für ihre hilfreichen Kommentare sowie für die vielen Aufgaben, die sie in die Vorlesung und die begleitenden Übungen eingebracht haben. Ulrich Fischer danke ich ganz herzlich für seine Erlaubnis, Aufgaben aus dem Fundus der Kieler Experimentalphysik zu verwenden. Trotz dieser Unterstützung werden sich verschiedene (Tipp)Fehler, korrektur-resistent wie sie ein können, auch in das endgültige Buch eingeschmuggelt haben. Über Hinweise auf diese, ebenso wie über Anregungen und Kritik, an [mkallenr@uos.de](mailto:mkallenr@uos.de) würde ich mich freuen.

Bedanken möchte ich mich auch bei meinen Betreuern im Springer-Verlag, Thorsten Schneider und Jacqueline Lenz, für die angenehme und effiziente Zusammenarbeit sowie bei meiner Arbeitsgruppe, insbesondere Elena Bondarenko und Bernd Heber, die mein Chaos während des Schreibens ertragen haben. Und – last not least – einen ganz herzlichen Dank an Klaus Betzler.

Osnabrück/Prerow, im Januar 2003

*May-Britt Kallenrode*

# Inhaltsverzeichnis

---

## Teil I Erste Schritte

### Rechnen in der Mechanik

---

<b>1</b>	<b>Rechnen mit Vektoren</b> .....	<b>3</b>
1.1	Grundlagen .....	3
1.2	Orts- und Verschiebungsvektor .....	4
1.3	Koordinatensysteme .....	5
1.3.1	Kartesische Koordinaten .....	5
1.3.2	Polarkoordinaten .....	6
1.3.3	Winkel in Grad- und Bogenmaß .....	8
1.3.4	Zylinderkoordinaten .....	10
1.3.5	Kugelkoordinaten .....	11
1.4	Vektoralgebra in kartesische Koordinaten .....	12
1.4.1	Gleiche, inverse und parallele Vektoren .....	12
1.4.2	Vektoraddition und -subtraktion .....	13
1.4.3	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar .....	14
1.5	Skalarprodukt .....	15
1.5.1	Komponentenweise Darstellung .....	15
1.5.2	Rechenregeln und Anwendungen .....	16
1.6	Kreuzprodukt .....	18
1.6.1	Grundlagen .....	18
1.6.2	Rechenregeln .....	19
1.6.3	Komponentenweise Darstellung .....	19
1.7	Spatprodukt .....	22
1.8	Mehrfachprodukte .....	24
	Aufgaben .....	25
<b>2</b>	<b>Differentiation</b> .....	<b>29</b>
2.1	Funktionen .....	29
2.1.1	Eigenschaften von Funktionen .....	30
2.1.2	Wichtige Funktionen .....	31
2.2	Differentialrechnung .....	36
2.2.1	Grundbegriffe .....	36
2.2.2	Differentialquotient .....	37
2.2.3	Wichtige Ableitungen .....	37



2.2.4	Ableitung einer in Parameterform dargestellten Funktion . . . . .	38
2.3	Funktionen von Vektoren . . . . .	38
2.3.1	Differentiation von Vektoren . . . . .	39
2.4	Partielle Ableitung . . . . .	41
2.4.1	Funktion zweier Variablen . . . . .	41
2.4.2	Partielle Ableitung . . . . .	42
2.4.3	Koordinatensysteme: Transformation der Basisvektoren . . . . .	44
2.5	Potenzreihenentwicklung . . . . .	49
2.5.1	Folgen und Reihen . . . . .	49
2.5.2	Taylor-Entwicklung . . . . .	50
2.5.3	MacLaurin'sche Reihe . . . . .	51
	Aufgaben . . . . .	53
<b>3</b>	<b>Integration . . . . .</b>	<b>59</b>
3.1	Grundlagen . . . . .	59
3.1.1	Bestimmtes und unbestimmtes Integral . . . . .	60
3.1.2	Wichtige Integrale . . . . .	62
3.2	Grundregeln des Integrierens . . . . .	62
3.2.1	Faktorregel . . . . .	63
3.2.2	Summenregel . . . . .	63
3.2.3	Substitutionsmethode . . . . .	64
3.2.4	Partielle Integration (Produktintegration) . . . . .	66
3.2.5	Rotationskörper . . . . .	68
3.2.6	Fläche zwischen zwei Kurven . . . . .	68
3.3	Mehrfachintegrale . . . . .	69
3.3.1	Doppelintegrale . . . . .	70
3.3.2	Dreifachintegrale . . . . .	72
3.4	Integration einer vektorwertigen Funktion (Riemann-Integral) . . . . .	75
	Aufgaben . . . . .	76
<b>4</b>	<b>Komplexe Zahlen . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1	Definition und Darstellung . . . . .	81
4.2	Elementare Rechenvorschriften . . . . .	83
4.2.1	Addition und Subtraktion . . . . .	83
4.2.2	Multiplikation zweier komplexer Zahlen . . . . .	84
4.2.3	Konjugiert komplexe Zahl . . . . .	84
4.2.4	Division zweier komplexer Zahlen . . . . .	85
4.3	Euler'sche Formel . . . . .	85
4.4	Potenzieren und komplexe Wurzel . . . . .	86
	Aufgaben . . . . .	88

- 5 Lineare Differentialgleichungen erster Ordnung** ..... 91
  - 5.1 Was ist eine Differentialgleichung (DGL)? ..... 91
  - 5.2 Lösung durch Raten ..... 93
  - 5.3 Gewöhnliche lineare DGL erster Ordnung ..... 94
  - 5.4 Homogene lineare DGL erster Ordnung ..... 94
    - 5.4.1 Separation der Variablen ..... 95
    - 5.4.2 Anfangs- oder Randbedingungen ..... 95
    - 5.4.3 Zusammenfassung: Trennung der Variablen ..... 95
  - 5.5 Homogene lineare DGL erster Ordnung  
mit konstantem Summanden ..... 97
  - 5.6 Inhomogene lineare DGL erster Ordnung ..... 100
    - 5.6.1 Variation der Konstanten ..... 100
    - 5.6.2 Aufsuchen einer partikulären Lösung ..... 102
  - Aufgaben ..... 103
  
- 6 Differentialgleichungen zweiter Ordnung** ..... 107
  - 6.1 Grundlagen ..... 107
  - 6.2 Homogene Differentialgleichung zweiter Ordnung ..... 108
    - 6.2.1 Exponentialansatz ..... 108
    - 6.2.2 Linearer harmonischer Oszillator ..... 110
    - 6.2.3 Gedämpfte Schwingung ..... 113
    - 6.2.4 Zusammenfassung: Homogene DGL 2. Ordnung ..... 119
  - 6.3 Inhomogene DGL: Erzwungene Schwingung ..... 119
    - 6.3.1 Zusammenfassung: Inhomogene DGL ..... 121
  - Aufgaben ..... 121
  
- 7 Numerische Lösung von Differentialgleichungen** ..... 125
  - 7.1 Die Idee ..... 125
    - 7.1.1 Differentialgleichung erster Ordnung ..... 125
    - 7.1.2 Differentialgleichung zweiter Ordnung ..... 128
  - 7.2 Euler-Verfahren ..... 129
  - 7.3 Leapfrog-Verfahren (Halbschritt-Verfahren) ..... 131
  - 7.4 Runge-Kutta-Verfahren 4. Ordnung ..... 132
  - Aufgaben ..... 134
  
- 8 Matrizen** ..... 137
  - 8.1 Grundbegriffe ..... 137
    - 8.1.1 Transponierte einer Matrix ..... 138
    - 8.1.2 Quadratische Matrizen ..... 139
  - 8.2 Rechenoperationen und -regeln ..... 139
  - 8.3 Determinanten ..... 142
    - 8.3.1 Unterdeterminanten ..... 143
    - 8.3.2 Rechenregeln ..... 144
  - 8.4 Reguläre und orthogonale Matrizen ..... 147
  - 8.5 Komplexe Matrizen ..... 148

8.6	Eigenwerte und Eigenvektoren .....	150
8.6.1	Diagonalform .....	152
8.7	Drehungen .....	153
8.7.1	Drehmatrix .....	153
8.7.2	Transformation von Vektoren und Matrizen .....	156
8.7.3	Trägheitstensor .....	157
	Aufgaben .....	159

**Teil II Von Feldern und Wellen  
Rechnen in der Elektrodynamik**

<b>9</b>	<b>Delta-Funktion .....</b>	<b>165</b>
9.1	Eindimensionale Delta-Funktion .....	165
9.1.1	Annäherungen .....	166
9.1.2	Eigenschaften der Delta-Funktion .....	167
9.2	Delta-Funktion in drei Dimension .....	170
	Aufgaben .....	171
<b>10</b>	<b>Differentiation von Feldern: Gradient, Divergenz und Rotation .....</b>	<b>173</b>
10.1	Skalar- und Vektorfelder .....	173
10.1.1	Spezielle Felder .....	174
10.1.2	Darstellung von Vektorfeldern in krummlinigen Koordinaten .....	175
10.2	Gradient .....	175
10.2.1	Definition und Eigenschaften .....	176
10.2.2	Spezielle Felder .....	177
10.2.3	Totales Differential .....	179
10.2.4	Gradient in krummlinigen Koordinaten .....	179
10.2.5	Rechenregeln .....	180
10.2.6	Richtungsableitung .....	180
10.3	Divergenz .....	181
10.3.1	Anschauung .....	181
10.3.2	Definition und Eigenschaften .....	182
10.3.3	Spezielle Felder .....	183
10.3.4	Rechenregeln .....	184
10.3.5	Krummlinige Koordinaten .....	185
10.4	Laplace-Operator .....	185
10.4.1	Krummlinige Koordinaten .....	186
10.5	Rotation .....	186
10.5.1	Definition und Eigenschaften .....	186
10.5.2	Spezielle Felder .....	187
10.5.3	Krummlinige Koordinaten .....	188
10.5.4	Rechenregeln .....	188

10.6	Der Nabla-Operator zusammengefaßt	189
	Aufgaben	190
<b>11</b>	<b>Integration von Feldern: Kurven- und Flächenintegrale</b>	<b>193</b>
11.1	Kurven und Flächen	193
11.1.1	Darstellung ebener und räumlicher Kurven	194
11.1.2	Flächen im Raum	195
11.1.3	Flächen vom Typ $z = f(x, y)$	196
11.2	Kurvenintegrale	196
11.2.1	Eigenschaften	198
11.2.2	Konservative Felder	198
11.3	Oberflächenintegrale	199
11.4	Gauß'scher Integralsatz	202
11.4.1	Divergenz als Quellstärke des Feldes	202
11.4.2	Gauß'scher Integralsatz	203
11.5	Stokes'scher Integralsatz	207
11.5.1	Rotation als Wirbelstärke	207
11.5.2	Stokes'scher Integralsatz	208
	Aufgaben	210
<b>12</b>	<b>Partielle Differentialgleichungen</b>	<b>215</b>
12.1	Partielle DGLs in der Physik	215
12.1.1	Die Poisson-Gleichung	216
12.1.2	Weitere partielle DGLs	216
12.2	Poisson-Gleichung	217
12.2.1	Punktladung	217
12.2.2	Allgemeine Ladungsdichteverteilung	219
12.2.3	Randbedingungen	221
12.2.4	Multipolentwicklung	221
12.2.5	Poisson-Gleichung in der Magnetostatik	223
12.3	Diffusionsgleichung	223
12.3.1	Random Walk und mittleres Abstandsquadrat – anschaulich	224
12.3.2	Eindimensionale Diffusionsgleichung	227
12.3.3	Lösung der Diffusionsgleichung für eine $\delta$ -Injektion	229
12.3.4	Allgemeine Lösung	229
12.4	Wellengleichung	230
12.4.1	Herleitung der Wellengleichung	230
12.4.2	Eindimensionale Wellen	231
12.4.3	Harmonische Wellen	232
12.4.4	Stehende Wellen	233
12.4.5	Separationsansatz	234
12.5	Zweidimensionale ebene Wellen	237
12.6	Dreidimensionale ebene Wellen	238
	Aufgaben	238

**Teil III Ein entschiedenes Jein  
Wahrscheinlichkeiten und Fehler**

<b>13</b>	<b>Wahrscheinlichkeit, Entropie und Maxwell-Verteilung</b>	243
13.1	Kombinatorik	243
13.2	Wahrscheinlichkeitsrechnung	245
13.2.1	Grundbegriffe	246
13.2.2	Wahrscheinlichkeit	246
13.2.3	Bedingte Wahrscheinlichkeit	248
13.2.4	Bayes'sche Formel	249
13.3	Wahrscheinlichkeitsverteilungen	251
13.3.1	Grundbegriffe	252
13.3.2	Kenngrößen einer Verteilung	256
13.3.3	Binominalverteilung	258
13.3.4	Poisson-Verteilung	260
13.3.5	Gauß'sche Normalverteilung	261
13.4	Entropie und Maxwell-Boltzmann-Verteilung	263
13.4.1	Information und Entropie	263
13.4.2	Maximale Unbestimmtheit	269
13.4.3	Boltzmann-Verteilung	270
	Aufgaben	272
<b>14</b>	<b>Messung und Meßfehler</b>	275
14.1	Charakterisierung von Meßdaten	276
14.2	Verteilung von Meßwerten, Mittelwert und Varianz	277
14.2.1	(Normalverteilte) Meßwerte	277
14.2.2	'Zählen' und Poisson-Verteilung	278
14.2.3	Mittelwert und Standardabweichung aus den Meßwerten	279
14.2.4	Vertrauensbereich für den Mittelwert	280
14.3	Fehlerfortpflanzung	281
14.3.1	Summen oder Differenzen	282
14.3.2	Multiplikation mit einer Konstanten	282
14.3.3	Multiplikation oder Division	283
14.3.4	Potenzgesetz	283
14.4	Ausgleichsrechnung	284
14.4.1	Lineare Regression	284
14.4.2	Lineare Regression unter Berücksichtigung der Meßfehler	289
14.4.3	Rang-Korrelation	291
	Aufgaben	292

<b>Lösungen</b> .....	295
<b>Literaturverzeichnis</b> .....	329
<b>Sachverzeichnis</b> .....	331