

Josef Stoer

Numerische Mathematik 1

Eine Einführung – unter Berücksichtigung
von Vorlesungen von F. L. Bauer

Achte, neu bearbeitete
und erweiterte Auflage

Mit 11 Abbildungen



Springer

Prof. Dr. Josef Stoer
Institut für Angewandte Mathematik
und Statistik der Universität Würzburg
Am Hubland
D-97074 Würzburg

Mathematics Subject Classification (1991):

65-01, 65B05, 65B15, 65D05, 65D07, 65D30, 65D32, 65F05, 65F20, 65F25,
65F35, 65F50, 65G05, 65H05, 65H10, 65K05

Bis zur 4. Auflage (1983) erschienen als Band 105 der Reihe
Heidelberger Taschenbücher

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Numerische Mathematik: eine Einführung – unter Berücksichtigung von Vorlesungen
von F. L. Bauer / Josef Stoer; Roland Bulirsch.

(Springer-Lehrbuch)

Bd. 1 verf. von Josef Stoer

Früher u.d.T.: Einführung in die numerische Mathematik

1. - 8., neu bearb. und erw. Aufl. - 1999

ISBN 978-3-540-66154-2 ISBN 978-3-662-09021-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-09021-3

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1972, 1976, 1979, 1983, 1989, 1993, 1994, 1999
Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1999

Umschlaggestaltung: *design & production* GmbH, Heidelberg

Satz: Neuformatierung der Autoredaten durch Kurt Mattes, Heidelberg, unter Verwendung von Springer TEX-Makros.

Vorwort zur achten Auflage

Aus Anlaß der vorliegenden Neuauflage wurde der Text an vielen Stellen verbessert, aber auch ergänzt.

Insbesondere wurde die Beschreibung der Splinefunktionen und speziell der B-Splines präzisiert. Neu ist ein Abschnitt über Multi-Resolutions-Verfahren und B-Splines, der eine doppelte Funktion besitzt: er soll im Anschluß an die bisherigen Abschnitte die Rolle der B-Splines im Rahmen dieser Verfahren beschreiben und zwar anhand von B-Splines niedriger Ordnung, die zu besonders einfachen Multi-Resolutions-Algorithmen führen. Andererseits sollten dabei auch zumindest die Prinzipien von Multi-Resolutions-Verfahren erläutert werden, die in der Signal- und Bildverarbeitung zunehmend wichtiger werden.

An der Vorbereitung der Neuauflage haben viele mitgewirkt. Zu besonderem Dank bin ich Herrn Prof. Dr. R. D. Grigorieff für seine zahlreichen fundierten Verbesserungsvorschläge verpflichtet. Herrn Prof. Dr. M. v. Golitschek danke ich für Anregungen und sachverständigen Rat zum Thema B-Splines und ihren Anwendungen, sowie Herrn Dipl.-Math. M. Wenzel für die kritische Lektüre.

Frau W. Wrschka und Herr J. Launer sorgten für die kompetente Erledigung der Schreibebeiten, für ihre Hilfe möchte ich ihnen an dieser Stelle herzlich danken. Der gleiche Dank gilt auch den Mitarbeitern des Springer-Verlages, auf deren verständnisvolle und tatkräftige Unterstützung ich mich stets verlassen konnte.

Vorwort zur ersten Auflage

Dieses Buch gibt den Stoff des ersten Teils einer zweisemestrigen Einführungsvorlesung in die Numerische Mathematik wieder, die der Verfasser in den letzten Jahren an mehreren Hochschulen halten konnte. Neben der Beschreibung der theoretischen Grundlagen der Probleme und Methoden der numerischen Mathematik waren folgende Ziele für die Auswahl des Stoffes und seine Darstellung maßgeblich: Von den vielen Methoden der numerischen Mathematik sollten hauptsächlich diejenigen behandelt werden, die sich auch leicht auf Digitalrechner realisieren lassen. Dementsprechend wird auf die algorithmische Beschreibung der Verfahren großer Wert gelegt – kritische Teile von Algorithmen werden häufig in Algol 60 beschrieben. Wenn mehrere Methoden zur Lösung eines Problems vorgestellt werden, wird gleichzeitig nach Möglichkeit versucht, diese Methoden bezüglich ihrer praktischen Brauchbarkeit zu vergleichen und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit anzugeben. Bei diesen Vergleichen sollten nicht nur die Anzahl der Operationen, Konvergenzeigenschaften usw. eine Rolle spielen, wichtiger ist es, die numerische Stabilität der Algorithmen zu vergleichen, um einen Einblick in die Gründe für die Zuverlässigkeit oder Unzuverlässigkeit von Verfahren zu geben. Das Einleitungskapitel über Fehleranalyse spielt dabei eine besondere Rolle: In ihm werden die Begriffe der numerischen Stabilität und Gutartigkeit von Algorithmen, die nach Meinung des Verfassers im Zentrum der numerischen Mathematik stehen, präzisiert und ihre Wichtigkeit genauer, als dies vielfach noch üblich ist, begründet und dargestellt. Nicht zuletzt dienen zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben dazu, die numerischen und theoretischen Eigenschaften von Verfahren zu illustrieren.

Da eine auch nur annähernd vollständige Aufzählung und Beschreibung brauchbarer Methoden weder möglich noch beabsich-

tigt war, sei der interessierte Leser auf folgende Zeitschriften hingewiesen, in denen er zahlreiche weitere Algorithmen teilweise sogar in der Form von Algol- oder Fortran-Programmen beschrieben findet: Numerische Mathematik, Communications of the ACM, Journal of the ACM, The Computer Journal, Computing, Mathematics of Computation, BIT, SIAM Journal on Numerical Analysis, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik. Wegen ihrer Zuverlässigkeit werden insbesondere die Algol-Programme empfohlen, die in der Zeitschrift „Numerische Mathematik“ im Rahmen der sog. „Handbook Series“ erscheinen.

An Inhalt und Aufbau der diesem Buch zugrunde liegenden Vorlesung haben viele mitgewirkt. Insbesondere möchte ich dankbar den Einfluß von Professor Dr. F. L. Bauer und Professor Dr. R. Baumann anerkennen, auf deren Vorlesungsausarbeitungen ich mich stützen konnte. Darüber hinaus haben sie zusammen mit den Herren Professor Dr. R. Bulirsch und Dr. Chr. Reinsch mit wertvollen Verbesserungsvorschlägen zur Klärung einer Reihe von kritischen Punkten beigetragen.

Eine vorläufige Fassung des Buches entstand 1970 in Form eines Skriptums der Universität Würzburg unter der maßgeblichen Mitwirkung meiner Mitarbeiter Dipl.-Math. K. Butendeich, Dipl.-Phys. G. Schuller und Dipl.-Math. Dr. J. Zowe. Für ihre Einsatzbereitschaft, mit der sie bei der Redaktion der verschiedenen Fassungen des Manuskripts mithalfen, möchte ich ihnen besonders herzlich danken. Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank Frau I. Brugger, die mit großer Gewissenhaftigkeit und Geduld die umfangreichen Schreibarbeiten ausführte.

Würzburg, im November 1971

J. Stoer

Inhaltsverzeichnis

1	Fehleranalyse	1
1.1	Zahldarstellung	2
1.2	Rundungsfehler und Gleitpunktrechnung	5
1.3	Fehlerfortpflanzung	9
1.4	Beispiele	22
1.5	Intervallrechnung, statistische Rundungsfehlerabschätzungen	29
	Übungsaufgaben zu Kapitel 1	34
	Literatur zu Kapitel 1 und weitere allgemeine Literatur	37
2	Interpolation	41
2.1	Interpolation durch Polynome	42
2.1.1	Theoretische Grundlagen. Die Interpolationsformel von Lagrange	42
2.1.2	Der Algorithmus von Neville	44
2.1.3	Die Newtonsche Interpolationsformel. Dividierte Differenzen	48
2.1.4	Das Restglied bei der Polynominterpolation	53
2.1.5	Hermite-Interpolation	56
2.2	Interpolation mit rationalen Funktionen	62
2.2.1	Allgemeine Eigenschaften der rationalen Interpolation	62
2.2.2	Inverse und reziproke Differenzen. Der Thielesche Kettenbruch	66
2.2.3	Neville-artige Algorithmen	70
2.2.4	Anwendungen und Vergleich der beschriebenen Algorithmen	75
2.3	Trigonometrische Interpolation	77
2.3.1	Theoretische Grundlagen	77
2.3.2	Algorithmen zur schnellen Fouriertransformation	82

X Inhaltsverzeichnis

2.3.3	Die Algorithmen von Goertzel und Reinsch	89
2.3.4	Die näherungsweise Berechnung von Fourierkoeffizienten. Abminderungsfaktoren .	93
2.4	Spline-Interpolation	98
2.4.1	Theoretische Grundlagen	99
2.4.2	Die Berechnung von kubischen Splinefunktionen .	103
2.4.3	Konvergenzeigenschaften kubischer Splinefunktionen	108
2.4.4	B-Splines	113
2.4.5	Die Berechnung von B-Splines	118
2.4.6	Multi-Resolutions-Verfahren und B-Splines	123
	Übungsaufgaben zu Kapitel 2	136
	Literatur zu Kapitel 2	145
3	Integration von Funktionen	147
3.1	Elementare Integrationsformeln. Fehlerabschätzungen	148
3.2	Die Peanosche Fehlerdarstellung	154
3.3	Die Euler-Maclaurinsche Summenformel	158
3.4	Anwendung der Extrapolation auf die Integration .	161
3.5	Allgemeines über Extrapolationsverfahren	166
3.6	Die Gaußsche Integrationsmethode	172
3.7	Integrale mit Singularitäten	182
	Übungsaufgaben zu Kapitel 3	185
	Literatur zu Kapitel 3	188
4	Lineare Gleichungssysteme	191
4.1	Gauß-Elimination. Dreieckszerlegung einer Matrix .	192
4.2	Der Gauß-Jordan-Algorithmus	202
4.3	Das Cholesky-Verfahren	206
4.4	Fehlerabschätzungen	209
4.5	Rundungsfehleranalyse der Gaußschen Eliminationsmethode	218
4.6	Rundungsfehlereinfluß bei der Auflösung von gestaffelten Gleichungssystemen	223
4.7	Orthogonalisierungsverfahren. Die Verfahren von Householder und Schmidt	225
4.8	Ausgleichsrechnung	233
4.8.1	Das lineare Ausgleichsproblem. Die Normalgleichungen	235
4.8.2	Orthogonalisierungsverfahren zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems	237

4.8.3	Die Kondition des linearen Ausgleichsproblems . . .	239
4.8.4	Nichtlineare Ausgleichsprobleme	245
4.8.5	Die Pseudoinverse einer Matrix	247
4.9	Modifikationstechniken	250
4.10	Lineare Minimierungsprobleme. Die Simplexmethode	259
4.11	Phase I der Simplexmethode	272
4.12	Exkurs: Eliminationsverfahren für dünn besetzte Matrizen	275
	Übungsaufgaben zu Kapitel 4	284
	Literatur zu Kapitel 4	289
5	Verfahren zur Nullstellbestimmung.	
	Minimierungsmethoden	291
5.1	Entwicklung von Iterationsverfahren	292
5.2	Allgemeine Konvergenzsätze	295
5.3	Die Konvergenz des allgemeinen Newton-Verfahrens	301
5.4	Ein modifiziertes Newton-Verfahren	305
5.4.1	Über die Konvergenz von Minimierungsverfahren .	306
5.4.2	Anwendung auf das modifizierte Newton-Verfahren	311
5.4.3	Hinweise zur praktischen Realisierung des modifizierten Newton-Verfahrens. Ein Rang-1-Verfahren von Broyden	315
5.5	Nullstellenbestimmung für Polynome. Das Newtonsche Verfahren	319
5.6	Sturmsche Ketten und Bisektionsverfahren	330
5.7	Das Verfahren von Bairstow	335
5.8	Die Empfindlichkeit der Nullstellen von Polynomen	337
5.9	Interpolationsmethoden zur Bestimmung von Nullstellen	341
5.10	Die Δ^2 -Methode von Aitken	346
5.11	Minimierungsprobleme ohne Nebenbedingungen .	351
	Übungsaufgaben zu Kapitel 5	360
	Literatur zu Kapitel 5	363
	Namen- und Sachverzeichnis	365