Springer-Lehrbuch

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg GmbH

Grundwissen Mathematik

Ebbinghaus et al.: Zahlen
Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie
Hämmerlin†/Hoffmann: Numerische Mathematik
Koecher†: Lineare Algebra und analytische Geometrie
Leutbecher: Zahlentheorie
Remmert: Funktionentheorie 1
Remmert: Funktionentheorie 2
Walter: Analysis 1
Walter: Analysis 2

Herausgeber der Grundwissen-Bände im Springer-Lehrbuch-Programm sind: F. Hirzebruch, H. Kraft, K. Lamotke, R. Remmert, W. Walter

Jürgen Elstrodt

Maß- und Integrationstheorie

Zweite, korrigierte Auflage

Springer

Jürgen Elstrodt
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstraße 62
D-48149 Münster

Mathematics Subject Classification (1991): 28-01, 28-03

Die Deutsche Bibliothek - CIP-Einheitsaufnahme

Elstrodt, Jürgen:
Maß- und Integrationstheorie / Jürgen Elstrodt. - 2., korr. Aufl.

(Springer-Lehrbuch)

ISBN 978-3-540-65420-9 ISBN 978-3-662-08528-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-08528-8

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage vom Autor
Einbandgestaltung: *design & production GmbH*, Heidelberg
SPIN: 10696667 44/3143 - 5 4 3 2 1 0 - Gedruckt auf säurefreiem Papier

Vorwort zur zweiten Auflage

Im Text der zweiten Auflage wurden einige kleinere Korrekturen und Ergänzungen vorgenommen und die Literaturhinweise aktualisiert. Ich verweise hier insbesondere auf die verbesserte Fassung von Satz I.6.5, die ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. D. Plachky (Münster) verdanke, und eine Korrektur im Beweis des Satzes VIII.3.11, die auf einen hilfreichen Hinweis von Herrn Prof. Dr. U. Krengel (Göttingen) zurückgeht. Weitere wertvolle Hinweise verdanke ich den Herren Priv.-Doz. Dr. L. Mattner (Hamburg) und Akad. Dir. Priv.-Doz. Dr. H. Pfister (München). Neben den Genannten gilt mein herzlicher Dank besonders Frau G. Weckermann, die erneut mit größter Sorgfalt und höchstem Geschick die Druckvorlage erstellt hat. – Herrn Dr. Heinze und den Mitarbeiter(inne)n des Springer-Verlags danke ich für ihr aufmerksames Entgegenkommen.

Münster, den 30.11.98 Jürgen Elstrodt

Vorwort zur ersten Auflage

> Wer kann was Dummes, wer was Kluges denken,
> das nicht die Vorwelt schon gedacht?
>
> (J.W. v. GOETHE: Faust II, II. Akt, 1. Szene)

Das vorliegende Buch richtet sich an einen breiten Kreis von möglichen Interessenten. In erster Linie ist es ein Lehrbuch, das im Studium ab Beginn der Vorlesungen für dritte Semester eingesetzt werden kann. Daneben soll es auch für das Selbststudium und als Nachschlagewerk für wohlbekannte und weniger bekannte Dinge dienen. Zusätzlich will es Einblicke in die historische Entwicklung geben und über Leben und Werk einiger Mathematiker unterrichten, die zum Gegenstand des Buchs wesentliche Beiträge geliefert haben.

Bei der Auswahl des Stoffes habe ich zwei Ziele im Auge: Zum einen soll dem „reinen“ Mathematiker, der etwa mit konkreten Integralen zu tun hat, der funktionalanalytische Interessen verfolgt, der Fourier-Analysis oder harmonische Analyse auf Gruppen betreiben will, eine sichere Basis für seine Aktivitäten geboten werden. Zum anderen soll auch dem „angewandten“ Mathematiker oder mathematischen Physiker, der sich z.B. für Funktionalanalysis oder Wahrscheinlichkeitstheorie interessiert, eine zuverlässige Grundlage vermittelt werden. Diese Ziele lassen sich m.E. am besten verwirklichen mit Hilfe des bewährten klassischen Aufbaus der Maß- und Integrationstheorie, der den Begriff eines auf einer σ-Algebra über einer Menge X definierten Maßes voranstellt und darauf den Integralbegriff gründet. Die Kapitel I–IV realisieren dieses Konzept bis hin zu den klassischen Konvergenzsätzen von B. LEVI, P. FATOU und H. LEBESGUE. Die Reihenfolge der weiteren Kapitel ist mehr durch den persönlichen Geschmack des Autors bestimmt als durch interne strukturelle Notwendigkeiten. Bei Bedarf kann der weitere Stoff daher auch in anderer Reihenfolge erarbeitet werden. In dem Bestreben, das Buch auch als mögliche Grundlage für eine Vorlesung über Analysis III zu konzipieren, behandle ich als nächstes Thema in Kapitel V die mehrfache Integration und die Transformationsformel. Die folgenden Kapitel VI, VII widmen sich zwei Gegenständen, die für Funktionalanalysis und Wahrscheinlichkeitstheorie von grundlegender Bedeutung sind: Kapitel VI behandelt die Vollständigkeit der Räume L^p und zahlreiche Konvergenzsätze, die das Wechselspiel der verschiedenen Konvergenzbegriffe beschreiben. Zentrales Resultat in Kapitel VII ist der Satz von RADON–NIKODÝM, der in der Wahrscheinlichkeitstheorie als Basis für die Definitionen der bedingten Wahrscheinlichkeit und des bedingten Erwartungswerts dient. Kapitel VII wird abgerundet durch ein eingehendes Studium der absolut stetigen Funktionen auf $\mathbb{R}$ – ein Thema, das in der Vorlesungspraxis oft dem zu knappen Zeitplan zum Opfer fällt. So beweise ich z.B. den berühmten Satz von LEBESGUE über die Differenzierbarkeit fast überall der monotonen Funktionen und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral.

Für die Lektüre der ersten Kapitel dieses Buchs sollte der Leser lediglich mit dem Begriff des metrischen Raums vertraut sein; es werden keine besonderen Kenntnisse in mengentheoretischer Topologie vorausgesetzt. Da aber viele Sachverhalte unverändert für beliebige topologische Räume gelten, greife ich gelegentlich zu Formulierungen wie: „Es sei X ein metrischer (oder topologischer) Raum...“ Wer nur metrische Räume kennt, betrachte in solchen Fällen X als metrischen Raum; wer topologische Räume kennt, lese das folgende unter der allgemeineren Prämisse. Auf diese Weise hoffe ich, den flexiblen Einsatz des Buchs für Lehr- und Nachschlagezwecke zu fördern.

Es liegt in der Natur der Sache, daß in Kapitel VIII über Maße auf topologischen Räumen beim Leser Kenntnisse über mengentheoretische Topologie im Umfang etwa einer einsemestrigen Vorlesung vorausgesetzt werden müssen. Dementsprechend ist dieses Kapitel für einen späteren Studienabschnitt (etwa ab dem fünften Semester) gedacht. In Kapitel VIII behandle ich zunächst die Regularitätseigenschaften von Borel-Maßen auf lokal-kompakten Hausdorff-Räumen und auf polnischen Räumen. Zentral für das folgende ist der Begriff des Radon-Maßes. Der neueren Entwicklung folgend, definiere ich Radon-Maße als von innen reguläre Borel-Maße. Diese Festlegung erweist sich als besonders vorteilhaft für die Behandlung des Darstellungssatzes von RIESZ, der in zahlreichen Versionen entwickelt wird, und zwar sowohl für lokal-kompakte als auch für vollständig reguläre Hausdorff-Räume. Als krönenden Abschluß beweise ich (nach A. WEIL) den Satz von der Existenz und Eindeutigkeit eines Haarschen Maßes auf jeder lokal-kompakten Hausdorffschen topologischen Gruppe und den entsprechenden Satz für Restklassenräume.

Das vorliegende Buch behandelt zwar vorrangig die Mathematik, enthält daneben aber viele Originalzitate und Hinweise auf die historische Entwicklung und einschlägige Quellen. Dabei kann es sich naturgemäß nicht um eine erschöpfende Darstellung der gesamten Historie handeln, doch hoffe ich beim Leser ein gewisses Verständnis für die historischen Abläufe zu wecken und ihn zu weitergehendem Studium der Originalarbeiten anzuregen. Damit auch der menschliche Aspekt nicht zu kurz kommt, füge ich Kurzbiographien einiger Mathematiker bei, die wesentliche Beiträge zum Thema des Buchs geliefert haben.

Mit dem Kleingedruckten ist es wie bei Versicherungsverträgen: Man kann es zunächst beiseite lassen, doch können Situationen eintreten, in denen es darauf ankommt. Das bezieht sich auch auf die Übungsaufgaben, von denen einige wenige an späterer Stelle im Text benutzt werden.

Dieses Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die ich im Laufe der Jahre an den Universitäten München, Hamburg und Münster gehalten habe. Bei der Vorlesungsvorbereitung waren mir die Vorläufer bzw. ersten Auflagen der Lehrbücher von BAUER [1], HEWITT–STROMBERG [1], LOÈVE [1] und RUDIN [1] eine wertvolle Hilfe.

Gern ergreife ich hier die Gelegenheit, allen zu danken, die mir während der langen Entstehungszeit des Manuskripts geholfen haben. An erster Stelle danke ich namentlich meinem verehrten Kollegen Prof. Dr. M. KOECHER (†), auf dessen Anregung hin ich mich auf das Abenteuer eingelassen habe, dieses Buch zu schreiben – ohne genau zu wissen, wieviel Arbeit damit verbunden sein würde. Wertvolle Hinweise verdanke ich besonders den Kollegen Prof. Dr. V. EBERHARDT (München), Prof. Dr. D. PLACHKY (Münster), Prof. Dr. P. RESSEL (Eichstätt) und Prof. Dr. W. ROELCKE (München). Ganz besonderen Dank aussprechen möchte ich Herrn Akad. Dir. Priv.-Doz. Dr. H. PFISTER (München). Er hat das ganze Manuskript kritisch gelesen, zahlreiche Verbesserungsvorschläge und Korrekturen eingebracht und mich immer wieder ermahnt, im Interesse der Studenten nicht zu knapp zu schreiben. Von den Herausgebern der Grundwissen-Bände danke ich namentlich den Herren Prof. Dr. Dr. h.c. R. REMMERT (Münster) und Prof. Dr. W. WALTER (Karlsruhe) für die Unterstützung und die beständige Ermahnung, nur ja möglichst kompakt zu schreiben, damit das Manuskript nicht zu lang wird. Ein herzliches Dankeschön geht an Frau G. WECKERMANN, die mit großer Professionalität die Druckvorlage erstellt und klaglos die vielen Korrekturen und Änderungen durchgeführt hat. Meiner Frau BÄRBEL danke ich für ihre Unterstützung und ihr Verständnis, ohne die dieses Buch nicht zustandegekommen wäre. Last not least gilt mein Dank Herrn Dr. J. HEINZE und den Mitarbeiter(inne)n des Springer-Verlags für ihre Hilfe und für ihre nicht enden wollende Geduld. – Den Benutzer(inne)n des Buchs danke ich im voraus für etwaige Hinweise auf Corrigenda oder Verbesserungsvorschläge.

Münster, den 01.07.96 Jürgen Elstrodt

Inhaltsverzeichnis