

Springer-Lehrbuch

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg GmbH



Grundwissen Mathematik

Ebbinghaus et al.: Zahlen

Elstrodt: Maß- und Integrationstheorie

Hämmerlin†/Hoffmann: Numerische Mathematik

Koecher†: Lineare Algebra und analytische Geometrie

Leutbecher: Zahlentheorie

Remmert: Funktionentheorie 1

Remmert: Funktionentheorie 2

Walter: Analysis 1

Walter: Analysis 2

Herausgeber der Grundwissen-Bände im Springer-Lehrbuch-
Programm sind: F. Hirzebruch, H. Kraft, K. Lamotke,
R. Remmert, W. Walter

Jürgen Elstrodt

Maß- und Integrations- theorie

Zweite, korrigierte Auflage



Springer

Jürgen Elstrodt
Mathematisches Institut
Universität Münster
Einsteinstraße 62
D-48149 Münster

Mathematics Subject Classification (1991): 28-01, 28-03

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Elstrodt, Jürgen:
Maß- und Integrationstheorie / Jürgen Elstrodt. – 2., korr. Aufl.

(Springer-Lehrbuch)

ISBN 978-3-540-65420-9

ISBN 978-3-662-08528-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-08528-8

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1996, 1999

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1999

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage vom Autor

Einbandgestaltung: *design & production GmbH*, Heidelberg

SPIN: 10696667 44/3143 - 5 4 3 2 1 0 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

Vorwort zur zweiten Auflage

Im Text der zweiten Auflage wurden einige kleinere Korrekturen und Ergänzungen vorgenommen und die Literaturhinweise aktualisiert. Ich verweise hier insbesondere auf die verbesserte Fassung von Satz I.6.5, die ich einer freundlichen Mitteilung von Herrn Prof. Dr. D. Plachky (Münster) verdanke, und eine Korrektur im Beweis des Satzes VIII.3.11, die auf einen hilfreichen Hinweis von Herrn Prof. Dr. U. Krengel (Göttingen) zurückgeht. Weitere wertvolle Hinweise verdanke ich den Herren Priv.-Doz. Dr. L. Mattner (Hamburg) und Akad. Dir. Priv.-Doz. Dr. H. Pfister (München). Neben den Genannten gilt mein herzlicher Dank besonders Frau G. Weckermann, die erneut mit größter Sorgfalt und höchstem Geschick die Druckvorlage erstellt hat. – Herrn Dr. Heinze und den Mitarbeiter(inne)n des Springer-Verlags danke ich für ihr aufmerksames Entgegenkommen.

Münster, den 30.11.98

Jürgen Elstrodt

Vorwort zur ersten Auflage

Wer kann was Dummes, wer was Kluges denken,
das nicht die Vorwelt schon gedacht?

(J.W. v. GOETHE: Faust II, II. Akt, 1. Szene)

Das vorliegende Buch richtet sich an einen breiten Kreis von möglichen Interessenten. In erster Linie ist es ein Lehrbuch, das im Studium ab Beginn der Vorlesungen für dritte Semester eingesetzt werden kann. Daneben soll es auch für das Selbststudium und als Nachschlagewerk für wohlbekannte und weniger bekannte Dinge dienen. Zusätzlich will es Einblicke in die historische Entwicklung geben und über Leben und Werk einiger Mathematiker unterrichten, die zum Gegenstand des Buchs wesentliche Beiträge geliefert haben.

Bei der Auswahl des Stoffes habe ich zwei Ziele im Auge: Zum einen soll dem „reinen“ Mathematiker, der etwa mit konkreten Integralen zu tun hat, der funktionalanalytische Interessen verfolgt, der Fourier-Analyse oder harmonische Analyse auf Gruppen betreiben will, eine sichere Basis für seine Aktivitäten geboten werden. Zum anderen soll auch dem „angewandten“ Mathematiker oder mathematischen Physiker, der sich z.B. für Funktionalanalysis oder Wahrscheinlichkeitstheorie interessiert, eine zuverlässige Grundlage vermittelt werden. Diese Ziele lassen sich m.E. am besten verwirklichen mit Hilfe des bewährten klassischen Aufbaus der Maß- und Integrationstheorie, der den Begriff eines auf einer σ -Algebra über einer Menge X definierten Maßes voranstellt und darauf den Integralbegriff gründet. Die Kapitel I–IV realisieren dieses Konzept bis hin zu den klassischen Konvergenzsätzen von B. LEVI, P. FATOU und H. LEBESGUE. Die Reihenfolge der weiteren Kapitel ist mehr durch den persönlichen Geschmack des Autors bestimmt als durch interne strukturelle Notwendigkeiten. Bei Bedarf kann der weitere Stoff daher auch in anderer Reihenfolge erarbeitet werden. In dem Bestreben, das Buch auch als mögliche Grundlage für eine Vorlesung über Analysis III zu konzipieren, behandle ich als nächstes Thema in Kapitel V die mehrfache Integration und die Transformationsformel. Die folgenden Kapitel VI, VII widmen sich zwei Gegenständen, die für Funktionalanalysis und Wahrscheinlichkeitstheorie von grundlegender Bedeutung sind: Kapitel VI behandelt die Vollständigkeit der Räume L^p und zahlreiche Konvergenzsätze, die das Wechselspiel der verschiedenen Konvergenzbegriffe beschreiben. Zentrales Resultat in Kapitel VII ist der Satz von RADON–NIKODÝM, der in der Wahrscheinlichkeitstheorie als Basis für die Definitionen der bedingten Wahrscheinlichkeit und des bedingten Erwartungswerts dient. Kapitel VII wird abgerundet durch ein eingehendes Studium der absolut stetigen Funktionen auf \mathbb{R} – ein Thema, das in der Vorlesungspraxis oft dem zu knappen Zeitplan zum Opfer fällt. So beweise ich z.B. den berühmten Satz von LEBESGUE über die Differenzierbarkeit fast überall der monotonen Funktionen und den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung für das Lebesgue-Integral.

Für die Lektüre der ersten Kapitel dieses Buchs sollte der Leser lediglich mit dem Begriff des metrischen Raums vertraut sein; es werden keine besonderen Kenntnisse in mengentheoretischer Topologie vorausgesetzt. Da aber viele Sachverhalte unverändert für beliebige topologische Räume gelten, greife ich gelegentlich zu Formulierungen wie: „Es sei X ein metrischer (oder topologischer) Raum...“ Wer nur metrische Räume kennt, betrachte in solchen Fällen X als metrischen Raum; wer topologische Räume kennt, lese das folgende unter der allgemeineren Prämisse. Auf diese Weise hoffe ich, den flexiblen Einsatz des Buchs für Lehr- und Nachschlagezwecke zu fördern.

Es liegt in der Natur der Sache, daß in Kapitel VIII über Maße auf topologischen Räumen beim Leser Kenntnisse über mengentheoretische Topologie im Umfang etwa einer einsemestrigen Vorlesung vorausgesetzt werden müssen. Dementsprechend ist dieses Kapitel für einen späteren Studienabschnitt (etwa ab dem fünften Semester) gedacht. In Kapitel VIII behandle ich zunächst

die Regularitätseigenschaften von Borel-Maßen auf lokal-kompakten Hausdorff-Räumen und auf polnischen Räumen. Zentral für das folgende ist der Begriff des Radon-Maßes. Der neueren Entwicklung folgend, definiere ich Radon-Maße als von innen reguläre Borel-Maße. Diese Festlegung erweist sich als besonders vorteilhaft für die Behandlung des Darstellungssatzes von RIESZ, der in zahlreichen Versionen entwickelt wird, und zwar sowohl für lokal-kompakte als auch für vollständig reguläre Hausdorff-Räume. Als krönenden Abschluß beweise ich (nach A. WEIL) den Satz von der Existenz und Eindeutigkeit eines Haarschen Maßes auf jeder lokal-kompakten Hausdorffschen topologischen Gruppe und den entsprechenden Satz für Restklassenräume.

Das vorliegende Buch behandelt zwar vorrangig die Mathematik, enthält daneben aber viele Originalzitate und Hinweise auf die historische Entwicklung und einschlägige Quellen. Dabei kann es sich naturgemäß nicht um eine erschöpfende Darstellung der gesamten Historie handeln, doch hoffe ich beim Leser ein gewisses Verständnis für die historischen Abläufe zu wecken und ihn zu weitergehendem Studium der Originalarbeiten anzuregen. Damit auch der menschliche Aspekt nicht zu kurz kommt, füge ich Kurzbiographien einiger Mathematiker bei, die wesentliche Beiträge zum Thema des Buchs geliefert haben.

Mit dem Kleingedruckten ist es wie bei Versicherungsverträgen: Man kann es zunächst beiseite lassen, doch können Situationen eintreten, in denen es darauf ankommt. Das bezieht sich auch auf die Übungsaufgaben, von denen einige wenige an späterer Stelle im Text benutzt werden.

Dieses Buch ist aus Vorlesungen hervorgegangen, die ich im Laufe der Jahre an den Universitäten München, Hamburg und Münster gehalten habe. Bei der Vorlesungsvorbereitung waren mir die Vorläufer bzw. ersten Auflagen der Lehrbücher von BAUER [1], HEWITT-STROMBERG [1], LOÈVE [1] und RUDIN [1] eine wertvolle Hilfe.

Gern ergreife ich hier die Gelegenheit, allen zu danken, die mir während der langen Entstehungszeit des Manuskripts geholfen haben. An erster Stelle danke ich namentlich meinem verehrten Kollegen Prof. Dr. M. KOECHER (†), auf dessen Anregung hin ich mich auf das Abenteuer eingelassen habe, dieses Buch zu schreiben – ohne genau zu wissen, wieviel Arbeit damit verbunden sein würde. Wertvolle Hinweise verdanke ich besonders den Kollegen Prof. Dr. V. EBERHARDT (München), Prof. Dr. D. PLACHKY (Münster), Prof. Dr. P. RESSEL (Eichstätt) und Prof. Dr. W. ROELCKE (München). Ganz besonderen Dank aussprechen möchte ich Herrn Akad. Dir. Priv.-Doz. Dr. H. PFISTER (München). Er hat das ganze Manuskript kritisch gelesen, zahlreiche Verbesserungsvorschläge und Korrekturen eingebracht und mich immer wieder ermahnt, im Interesse der Studenten nicht zu knapp zu schreiben. Von den Herausgebern der Grundwissen-Bände danke ich namentlich den Herren Prof. Dr. Dr. h.c. R. REMMERT (Münster) und Prof. Dr. W. WALTER (Karlsruhe) für die Unterstützung und die beständige Ermahnung, nur ja möglichst kompakt zu schreiben, damit das Manuskript nicht zu lang wird. Ein herzliches Dankeschön

geht an Frau G. WECKERMANN, die mit großer Professionalität die Druckvorlage erstellt und klaglos die vielen Korrekturen und Änderungen durchgeführt hat. Meiner Frau BÄRBEL danke ich für ihre Unterstützung und ihr Verständnis, ohne die dieses Buch nicht zustande gekommen wäre. Last not least gilt mein Dank Herrn Dr. J. HEINZE und den Mitarbeiter(inne)n des Springer-Verlags für ihre Hilfe und für ihre nicht enden wollende Geduld. – Den Benutzer(inne)n des Buchs danke ich im voraus für etwaige Hinweise auf Corrigenda oder Verbesserungsvorschläge.

Münster, den 01.07.96

Jürgen Elstrodt

Inhaltsverzeichnis

<i>Kapitel I. σ-Algebren und Borelsche Mengen</i>	1
§ 1. Das Inhaltsproblem und das Maßproblem	1
§ 2. Bezeichnungen und mengentheoretische Grundlagen	6
1. Bezeichnungen	6
2. Limes superior und Limes inferior	8
Aufgaben	10
§ 3. Ringe, Algebren, σ -Ringe und σ -Algebren	11
1. Ringstruktur von $\mathfrak{P}(X)$	11
2. Ringe und Algebren	12
3. σ -Ringe und σ -Algebren	13
Aufgaben	15
§ 4. Erzeuger und Borelsche Mengen	16
1. Erzeuger	16
2. Borelsche Mengen	17
3. Verhalten unter Abbildungen	19
Aufgaben	20
§ 5. Halbringe	20
1. Halbringe	20
2. Der von einem Halbring erzeugte Ring	22
Aufgaben	22
§ 6. Monotone Klassen und Dynkin-Systeme	23
1. Monotone Klassen	23
2. Dynkin-Systeme	24
Aufgaben	26
<i>Kapitel II. Inhalte und Maße</i>	27
§ 1. Inhalte, Prämaße und Maße	27
1. Definitionen und erste Folgerungen	27
2. Ein erster Fortsetzungssatz	30
3. Eigenschaften von Inhalten	31
4. Charakterisierung der σ -Additivität	32
5. Historische Anmerkungen	33
Aufgaben	34
§ 2. Inhalte und Prämaße auf \mathbb{R}	37
1. Endliche Inhalte auf \mathfrak{J}	37
2. Endliche Prämaße auf \mathfrak{J}	38
3. Kurzbiographie von É. BOREL	41
Aufgaben	42

§ 3.	Inhalte und Prämaße auf \mathbb{R}^p	43
	1. Das Lebesguesche Prämaß auf \mathcal{J}^p	43
	2. Differenzenoperatoren	44
	3. Inhalte auf \mathcal{J}^p	45
	4. Prämaße auf \mathcal{J}^p	47
	5. Kurzbiographie von J. RADON	48
	Aufgaben	49
§ 4.	Fortsetzung von Prämaßen zu Maßen	50
	1. Äußere Maße	50
	2. Der Fortsetzungssatz	53
	3. Die Lebesgue-meßbaren Teilmengen des \mathbb{R}^p	55
	4. Kurzbiographie von C. CARATHÉODORY	56
	Aufgaben	57
§ 5.	Eindeutigkeit der Fortsetzung	59
	1. σ -endliche Inhalte	59
	2. Der Eindeutigkeitssatz	60
	3. Wahrscheinlichkeitsmaße und Verteilungsfunktionen auf \mathbb{R}	61
	Aufgaben	62
§ 6.	Vollständige Maßräume	63
	Aufgaben	65
§ 7.	Das Lebesguesche Maß	66
	1. Approximationssätze	66
	2. Charakterisierung der Lebesgue-Meßbarkeit	67
	3. Der Satz von H. STEINHAUS	67
	4. Meßbarkeit konvexer Mengen	68
	Aufgaben	69
§ 8.	Das Cantorsche Diskontinuum	70
	1. Konstruktion von C	70
	2. Triadische Entwicklung	71
	3. Mächtigkeiten von \mathfrak{B}^p und \mathfrak{L}^p	73
	4. Die Cantorsche Funktion	73
	Aufgaben	74
§ 9.	Metrische äußere Maße und Hausdorff-Maße	76
	1. Metrische äußere Maße	76
	2. Hausdorff-Maße	77
	3. Rektifizierbare Kurven	78
	4. Kurzbiographie von F. HAUSDORFF	80
	Aufgaben	81

<i>Kapitel III. Meßbare Funktionen</i>	83
§ 1. Meßbare Abbildungen und Bildmaße	85
1. Meßbare Abbildungen	85
2. Bildmaße	87
Aufgaben	88
§ 2. Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes	89
1. Translationsinvarianz des Lebesgue-Maßes	89
2. Das Bildmaß des Lebesgue-Maßes unter bijektiven affinen Abbildungen	90
3. Bewegungsinvarianz des Lebesgue-Maßes	92
4. Das p -dimensionale äußere Hausdorff-Maß Aufgaben	94 95
§ 3. Existenz nicht meßbarer Mengen	96
1. Nicht Lebesgue-meßbare Mengen und Unlösbarkeit des Maßproblems	96
2. Kurzbiographie von G. VITALI	99
3. Weitere Beispiele nicht Lebesgue-meßbarer Mengen	99
4. Existenz nicht meßbarer Mengen für Lebesgue-Stieltjessche Maße Aufgaben	100 102
§ 4. Meßbare numerische Funktionen	103
1. Rechnen in $\overline{\mathbb{R}}$, Topologie von $\overline{\mathbb{R}}$	103
2. Meßbare numerische Funktionen	105
3. Approximation durch Treppenfunktionen	107
4. Abzählbar erzeugte Meßräume	108
5. Ein minimaler Erzeuger von \mathfrak{B}^1 Aufgaben	109 110
§ 5. Produkt- σ -Algebren	112
1. Initial- σ -Algebren und Produkt- σ -Algebren	112
2. Borel-Mengen topologischer Produkte	114
3. Meßbarkeit der Diagonalen Aufgaben	115 116
<i>Kapitel IV. Das Lebesgue-Integral</i>	118
§ 1. Integration von Treppenfunktionen Aufgaben	119 120
§ 2. Integration nicht-negativer meßbarer Funktionen	121
1. Definition des Integrals	121
2. Der Satz von der monotonen Konvergenz	124
3. Kurzbiographie von B. LEVI	125
4. Maße mit Dichten Aufgaben	125 126

§ 3.	Integrierbare Funktionen	127
1.	Integrierbare Funktionen	127
2.	Linearität und Monotonie des Integrals	129
3.	Der Raum \mathcal{L}^1	131
4.	Stetige Funktionen mit kompaktem Träger	132
5.	Integration über meßbare Teilmengen	133
6.	Historische Anmerkungen	135
7.	Kurzbiographie von W.H. YOUNG	136
	Aufgaben	137
§ 4.	Fast überall bestehende Eigenschaften	138
	Aufgaben	141
§ 5.	Konvergenzsätze	142
1.	Das Lemma von FATOU	142
2.	Kurzbiographie von P. FATOU	143
3.	Der Satz von der majorisierten Konvergenz	143
4.	Von einem Parameter abhängige Integrale	145
5.	Der Satz von SCHEFFÉ	148
	Aufgaben	149
§ 6.	Riemann-Integral und Lebesgue-Integral	149
1.	Eigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral	150
2.	Uneigentliches Riemann-Integral und Lebesgue-Integral	151
3.	Mittelwertsätze der Integralrechnung	154
4.	Kurzbiographie von H. LEBESGUE	156
	Aufgaben	158
	<i>Kapitel V. Produktmaße, Satz von FUBINI und Transformationsformel</i>	161
§ 1.	Produktmaße	161
1.	Produkt- σ -Algebren	162
2.	Produktmaße	162
3.	Das Cavalierische Prinzip	167
4.	Produkte endlich vieler Maßräume	168
5.	Das p -dimensionale äußere Hausdorff-Maß	169
	Aufgaben	171
§ 2.	Der Satz von FUBINI	173
1.	Der Satz von FUBINI	173
2.	Historische Anmerkungen	178
3.	Beispiele für Anwendungen des Satzes von FUBINI	179
4.	Der Gaußsche Integralsatz für die Ebene	182
5.	Kurzbiographien von G. FUBINI und L. TONELLI	185
	Aufgaben	186

§ 3. Faltung und Fourier-Transformation	189
1. Integration in bezug auf Bildmaße	189
2. Transformation von Maßen mit Dichten	190
3. Die Faltung auf $\mathcal{L}^1(\mathbb{R}^p, \mathfrak{B}^p, \beta^p)$	191
4. Die Fourier-Transformation	193
Aufgaben	198
§ 4. Die Transformationsformel	199
1. Die Transformationsformel	200
2. Der Satz von SARD	207
3. Verallgemeinerte Transformationsformel	209
4. Transformation von Maßen mit Dichten bez. λ^p	209
5. Der Brouwersche Fixpunktsatz	211
Aufgaben	214
<i>Kapitel VI. Konvergenzbegriffe der Maß- und Integrationstheorie</i>	218
§ 1. Die Ungleichungen von JENSEN, HÖLDER und MINKOWSKI	218
1. Die Jensensche Ungleichung	219
2. Die Höldersche Ungleichung	221
3. Die Minkowskische Ungleichung	223
4. Historische Anmerkungen	224
Aufgaben	225
§ 2. Die Räume L^p und der Satz von RIESZ-FISCHER	227
1. Die Räume \mathcal{L}^p und L^p	228
2. Der Satz von RIESZ-FISCHER	229
3. Die Banach-Algebra $L^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}^n, \beta^n)$	232
4. Der Hilbert-Raum $L^2(\mu)$	233
5. Der Banach-Verband $L^p_{\mathbb{R}}$	238
6. Dichte Unterräume von L^p	240
7. Der Satz von PLANCHEREL	242
8. Der Satz von FATOU über Potenzreihen	242
9. Historische Anmerkungen	243
10. Kurzbiographien von F. RIESZ und E. FISCHER	244
Aufgaben	246
§ 3. Der Satz von JEGOROW	248
1. Konvergenz μ -fast überall	248
2. Fast gleichmäßige Konvergenz	249
3. Kurzbiographie von D.F. JEGOROW	250
Aufgaben	251

§ 4.	Konvergenz nach Maß	252
1.	Konvergenz nach Maß und lokal nach Maß	252
2.	Cauchy-Folgen für die Konvergenz nach Maß	253
3.	Vergleich der Konvergenzbegriffe	255
4.	Charakterisierung der Konvergenz n.M. und der Konvergenz lokal n.M.	256
	Aufgaben	257
§ 5.	Konvergenz in \mathcal{L}^p	258
1.	Der Satz von PRATT	258
2.	Konvergenz in \mathcal{L}^p	259
3.	Der Konvergenzsatz von VITALI	260
4.	Schwache Konvergenz in \mathcal{L}^p	261
	Aufgaben	265
	<i>Kapitel VII. Absolute Stetigkeit</i>	267
§ 1.	Signierte Maße; Hahnscher und Jordanscher Zerlegungssatz	267
1.	Signierte Maße	267
2.	Der Hahnsche Zerlegungssatz	269
3.	Positive Variation, negative Variation und Variation	270
4.	Jordanscher Zerlegungssatz	271
5.	Der Banach-Verband der endlichen signierten Maße	272
6.	Kurzbiographie von H. HAHN	273
	Aufgaben	274
§ 2.	Der Satz von RADON-NIKODÝM und der Lebesguesche Zerlegungssatz	277
1.	Absolute Stetigkeit	277
2.	Der Satz von RADON-NIKODÝM	277
3.	Kurzbiographie von O. NIKODÝM	282
4.	Der Lebesguesche Zerlegungssatz	283
	Aufgaben	285
§ 3.	Der Dualraum von L^p ($1 \leq p < \infty$)	286
1.	Der Dualraum von $L^p(\mu)$ ($1 \leq p < \infty$)	286
2.	Die multiplikativen Linearformen auf der Banach-Algebra $L^1(\mu_m)$	291
	Aufgaben	292
§ 4.	Absolut stetige Funktionen auf \mathbb{R}	294
1.	Der Überdeckungssatz von VITALI	294
2.	Differenzierbarkeit monotoner Funktionen λ -f.ü.	296
3.	Der Dichtesatz	299
4.	Absolut stetige Funktionen auf \mathbb{R}	300
5.	Lebesguesche Zerlegung Lebesgue-Stieltjesscher Maße	304
6.	Rektifizierbare Kurven	306
	Aufgaben	307

<i>Kapitel VIII. Maße auf topologischen Räumen</i>	309
§ 1. Borel-Maße, Radon-Maße, Regularität	310
1. Grundbegriffe	310
2. Regularitätssätze	314
3. Moderate Borel-Maße	315
4. Regularität von Borel-Maßen	316
5. Regularität von Borel-Maßen auf polnischen Räumen	317
6. Der Satz von LUSIN	320
7. Kurzbiographie von N.N. LUSIN	321
Aufgaben	324
§ 2. Der Darstellungssatz von F. RIESZ	325
1. Problemstellung	325
2. Fortsetzungssatz	326
3. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für lokal-kompakte Räume	331
4. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für vollständig reguläre Räume	335
5. Träger von Maßen	339
6. Der Darstellungssatz von F. RIESZ für stetige Linearformen auf $C_0(X)$	342
Aufgaben	346
§ 3. Das Haarsche Maß	348
1. Topologische Gruppen	348
2. Linksinvariante Linearformen und Maße	351
3. Existenz und Eindeutigkeit des Haarschen Maßes	353
4. Anwendungen des Haar-Maßes	362
5. Invariante und relativ invariante Maße auf Restklassenräumen	365
6. Kurzbiographie von A. HAAR	372
Aufgaben	373
<i>Anhang A. Topologische Räume</i>	376
<i>Anhang B. Transfinite Induktion</i>	380
<i>Literaturverzeichnis</i>	383
<i>Namenverzeichnis</i>	389
<i>Symbolverzeichnis</i>	394
<i>Sachverzeichnis</i>	395