Hochschultext

Hans Wilhelm Alt

Lineare Funktionalanalysis

Eine anwendungsorientierte Einführung

Mit 19 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Hans Wilhelm Alt
Institut für Angewandte Mathematik
Universität Bonn
Wegelerstraße 6
5300 Bonn

Mathematics Subject Classification (1980): 46-01, 35-01, 28-01

ISBN 978-3-540-15280-4 ISBN 978-3-662-08386-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-08386-4

CIP-Kurztitelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Alt, Hans Wilhelm:
Lineare Funktionalanalysis: e. anwendungsorientierte Einf. / Hans Wilhelm Alt. –
Berlin; Heidelberg; New York; Tokyo: Springer, 1985.
(Hochschultext)

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York Tokyo 1985

2141/3140-543210

Vorwort

Oft besucht der Algebrix
im sechsten Stock den Analyx,
und staunend über dessen Tricks
verbringt er Stunden höchsten Glücks.

Ulrich Warnecke

Das Buch ist entstanden aus einer einsemestrigen Kursusvorlesung, die ich im WS 80/81 an der Universität Bochum und im WS 83/84 an der Universität Bonn für Studenten ab 5. Semester gehalten habe. Das Ziel war, einen Grundkanon zu vermitteln und dabei in den einzelnen Abschnitten möglichst schnell auf die zentralen Aussagen zuzusteuern. Dabei habe ich versucht, sowohl die algebraische als auch die analytische Seite der Funktionalanalysis mit gleichem Gewicht zu behandeln.

Bis auf einige Umstellungen und hinzugefügte Aussagen stimmt der Inhalt dieses Buches mit dem in der Vorlesung dargestellten Stoff überein.

Voraussetzung für die Lektüre des Buches ist eine Anfängerausbildung in Linearer Algebra und Analysis. Wegen der unterschiedlichen Vorkenntnisse der Studenten ist ein Anhang über das Lebesgue-Integral eingefügt. Die Anhänge 4 und 8 beweisen Aussagen, die in der Vorlesung nur formuliert worden waren. Der Anhang 5 dient zur Vertiefung des Studiums der Sobolev-Räume. Viele der während der Vorlesung gestellten Übungen sind mit Lösungen in das Buch aufgenommen worden, andere als Übungen hinzugenommene Aussagen sind als Ergänzung zum Grundstoff gedacht. Ich glaube daher, daß sich dieses Buch als Grundlage und ebenso als Begleitlektüre zu Vorlesungen über lineare Funktionalanalysis eignet, aber auch als Ergänzungsliteratur zu anderen Vorlesungen.

Besonders zu danken habe ich Eberhard Bänsch und Jürgen Dennert, die durch unzählige Hinweise und Verbesserungsvorschläge zur endgültigen Version des Buches beigetragen haben.

Schließlich wäre das Buch nicht entstanden ohne die Arbeit von Angelika Schofer, die das Manuskript mit dem TEX-System gesetzt hat und der das Buch seine äußere Gestaltung verdankt.

Bonn, Juli 1985 H. W. Alt

Inhaltsverzeichnis

0 **Einleitung** **1**

1 **Funktionenräume** **8**

1.1 Metrik — 1.2 Vollständigkeit — 1.3 Norm — 1.4 Skalarprodukt — 1.7 Folgenräume — 1.8 Maße — 1.9 Lebesgue-Räume — 1.13 Satz von Fischer-Riesz — 1.14 Stetige Funktionen — 1.17 Klassische Funktionenräume — 1.19 Vervollständigung — 1.20 Sobolev-Räume — 1.22 $\mathring{H}^{m,p}$-Räume — Übungen

A 1 **Lebesgue-Integral** **29**

A 1.4 Elementares Integral — A 1.8 Lebesgue-integrierbare Funktionen — A 1.15 Maßerweiterung — A 1.18 Meßbare Funktionen — A 1.21 Satz von Egoroff — A 1.23 Lemma von Fatou — A 1.24 Konvergenzsatz von Lebesgue — A 1.25 Vitali-Konvergenzsatz — A 1.26 Allgemeiner Lebesgue-Konvergenzsatz

2 **Topologie der Funktionenräume** **50**

2.1 Abstand — 2.2 Offene und abgeschlossene Mengen — 2.4 Topologie — 2.7 Dichte Teilmengen — 2.8 Faltung — 2.9 Dirac-Folge — 2.12 Lokale Approximation von $H^{m,p}$ Funktionen — 2.13 Partition der Eins — 2.15 Produktregel und Kettenregel für Sobolev-Funktionen — 2.18 Konvexe Mengen — 2.19 Projektionssatz — 2.20 Fast orthogonales Element — 2.21 Kompaktheit — 2.24 Satz von Heine-Borel — 2.25 Satz von Arzela-Ascoli — 2.26 Satz von Fréchet-Kolmogorov — Übungen

3 **Lineare Operatoren** **84**

3.2 Beschränkte Operatoren — 3.4 Definitionen — 3.6 Neumann-Reihe — 3.7 Analytische Funktionen von Operatoren — 3.10 Distributionen — Übungen

4 **Lineare Funktionale** **95**

4.1 Satz von Hahn-Banach — 4.6 Riesz'scher Darstellungssatz — 4.7 Anwendung auf Differentialgleichungen — 4.8 Poincaré-Ungleichung — 4.9 Satz von Lax-Milgram — 4.11 Satz von Riesz-Radon — 4.13 Satz von Radon-Nikodym — 4.14 Dualraum von L^p — Übungen

A 4 **Aussagen aus der Maßtheorie** 123

A 4.3 Integral stetiger Funktionen — A 4.4 Maßräume — A 4.5 Jordan-Zerlegung — A 4.6 Hahn-Zerlegung — A 4.9 Lemma von Alexandroff — A 4.11 Satz von Lusin — A 4.12 Produktmaß — A 4.14 Satz von Fubini

5 **Schwache Konvergenz** 138

5.2 Schwache Konvergenz — 5.6 Reflexivität — 5.11 Trennungssatz — 5.13 Anwendung auf Minimum-Probleme — 5.14 Variationsungleichung — 5.15 Allgemeine Poincaré-Ungleichung — Übungen

A 5 **Eigenschaften von Sobolev-Funktionen** 159

A 5.1 Rellich-Einbettungssatz für $\mathring{H}^{m,p}$ — A 5.3 Lipschitz-Rand — A 5.4 Rellich-Einbettungssatz für $H^{m,p}$ — A 5.6 Randintegral — A 5.7 Schwache Randwerte — A 5.9 Gauß'scher Satz — A 5.12 Fortsetzungssatz — A 5.14 Einbettungssatz auf den Rand — A 5.15 Schwache Folgenkompaktheit in L^1 — A 5.16 Satz von Vitali-Hahn-Saks

6 **Prinzip der gleichmäßigen Beschränktheit** 181

6.1 Baire'scher Kategoriensatz — 6.2 Prinzip der gleichmäßigen Beschränkheit — 6.3 Satz von Banach-Steinhaus — 6.6 Satz von der offenen Abbildung — 6.7 Satz von der inversen Abbildung — 6.8 Satz vom abgeschlossenen Graphen — Übungen

7 **Projektionen** 188

7.1 Definition und algebraische Eigenschaften — 7.3 Satz vom abgeschlossenen Komplement — 7.8 Beispiele — 7.9 Schauder-Basis — 7.15 Orthonormalbasis — 7.17 Weierstraß'scher Approximationssatz — Übungen

8 **Kompakte Operatoren** 211

8.3 Ehrling-Lemma — 8.5 Sobolev-Zahl — 8.6 Einbettungssatz in Hölder-Räumen — 8.7 Einbettungssatz in Sobolev-Räumen — 8.8 Einbettungssatz von Sobolev-Räumen in Hölder-Räume — 8.9 Hilbert-Schmidt-Integraloperatoren — 8.10 Schur-Integraloperatoren — 8.11 Singuläre Integraloperatoren — 8.12 Hölder-Korn-Lichtenstein-Ungleichung — 8.13 Calderon-Zygmund-Ungleichung — 8.14 Fredholm-Operatoren — Übungen

A 8 **Sobolevsätze und Calderon-Zygmund-Ungleichung** 236

A 8.2 Satz von Sobolev — A 8.4 Beweis von Satz 8.7 — A 8.7 Satz von Morrey — A 8.9 Beweis von Satz 8.8.1 und 8.8.3 — A 8.13 Beweis von 8.13

9 Spektrum kompakter Operatoren **255**

9.1 Spektrum — 9.3 Resolventenfunktion — 9.4 Spektralradius — 9.6 Spektralsatz für kompakte Operatoren — 9.8 Fredholm-Alternative

10 Adjungierte Abbildung **262**

10.1 Adjungierter Operator — 10.2 Hilbertraum-Adjungierte — 10.3 Algebraische Eigenschaften — 10.4 Annihilator — 10.6 Satz von Schauder — 10.8 Satz von Fredholm — 10.9 Normale Operatoren — 10.12 Spektralsatz für kompakte normale Operatoren — 10.14 Eigenwertproblem als Variationsproblem — 10.15 Anwendung des Spektralsatzes — 10.17 Satz von Friedrichs — Übungen

Literaturverzeichnis **286**

Symbolverzeichnis **287**

Sachverzeichnis **289**