Springer-Lehrbuch

Dietrich Braess

Finite Elemente

Theorie, schnelle Löser und
Anwendungen in der Elastizitätstheorie

Mit 47 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg GmbH

Dietrich Braess
Ruhr-Universität Bochum
Institut für Mathematik
Postfach 102148
W-4630 Bochum 1, FRG

Mathematics Subject Classification (1991):
65 N30, 65 F10, 65 N22, 65 N55

ISBN 978-3-540-54794-5

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek
Braess, Dietrich: Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie/Dietrich Braess.
(Springer-Lehrbuch)
ISBN 978-3-540-54794-5 ISBN 978-3-662-07234-9 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-07234-9

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1992

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage vom Autor
44/3140-543210 Gedruckt auf säurefreiem Papier

Vorwort

Bei der numerischen Behandlung von elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen wird heute sehr viel die Methode der Finiten Elemente eingesetzt. Die Methode erlaubt wegen ihrer Flexibilität auch die Behandlung schwieriger Probleme, weil sie — anders als Differenzenverfahren oder Rechnungen mit Finiten Volumen — auf die Variationsformulierung der Differentialgleichung zugeschnitten ist. Die Entwicklung von Finiten Elementen verlief lange bei Mathematikern und Ingenieuren parallel, ohne daß dies zunächst wahrgenommen wurde. Ende der 60er und Anfang der 70er Jahre erfolgte die Entwicklung des Begriffsapparats mit einer Standardisierung, die es dann ermöglichte, den Stoff auch den Studenten vorzustellen. Aus einer Reihe von Vorlesungen ist dieses Buch auch hervorgegangen.

Im Gegensatz zu der Situation bei gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen nicht immer klassische Lösungen und oft nur sogenannte schwache Lösungen. Das hat nicht nur Auswirkungen auf die Theorie, sondern auch auf die numerische Behandlung. Zwar existieren klassische Lösungen unter Regularitätsvoraussetzungen, wegen der mit numerischen Rechnungen verbundenen Approximation können wir uns jedoch nicht auf einen Rahmen festlegen, in dem nur klassische Lösungen vorkommen.

Für die Behandlung elliptischer Randwertaufgaben durch Finite Elemente liefert die Variationsrechnung einen passenden Rahmen. Es ist das Ziel von Kapitel II, hier einen möglichst einfachen Einstieg zu geben. In den Paragraphen 1–3 wird die Existenz von schwachen Lösungen in Sobolev-Räumen hergeleitet und dargestellt, wie in der Variationsrechnung die Randbedingungen erfaßt werden. Um dem Leser ein Gefühl für den Umgang mit der Theorie zu vermitteln, werden einige Eigenschaften der Sobolev-Räume hergeleitet oder wenigstens illustriert. Die Paragraphen 4–8 sind dann den eigentlichen Grundlagen der Finiten Elemente gewidmet. Den schwierigsten Teil machen die Approximationssätze in §6 aus. Deshalb wird dort vorab der Spezialfall regelmäßiger Gitter behandelt; auf diesen Fall möge sich der Leser beim ersten Lesen beschränken.

In Kapitel III kommen wir zu dem Teil der Theorie der Finiten Elemente, der tieferliegende Methoden der Funktionalanalysis benötigt. Letztere werden in §3 bereitgestellt. Der Leser lernt die berühmte Ladyshenskaja-Babuška-Brezzi-Bedingung kennen, die für die sachgemäße Behandlung von Problemen der Strömungsmechanik und der gemischten Methoden in der Strukturmechanik wichtig ist. Wenn man sich ohne diese Kenntnisse auf den *gesunden Menschenverstand* verläßt, wird man in der Strömungsmechanik leider dazu verleitet, Elemente mit instabilem Verhalten zu benutzen.

Es war unser Bestreben, möglichst wenig an Kenntnissen in der reellen Analysis und der Funktionalanalysis vorauszusetzen. Andererseits ist ein gewisses Hintergrundwissen nützlich. Darum wird in Kapitel I der Unterschied zwischen den verschiedenen Typen von partiellen Differentialgleichungen kurz erläutert. Wer zum ersten Male mit der numerischen Lösung elliptischer Differentialgleichungen konfrontiert ist, empfindet den Zugang über die Differenzenverfahren meistens als leichter. Die Grenzen sieht man erst später. Eine solche erste Begegnung ist mit Kapitel I beabsichtigt, und auf Vollständigkeit der Theorie wird so bewußt verzichtet.

Die Finite-Element-Methode führt bei feiner werdender Diskretisierung auf große Gleichungssysteme. Bei der Lösung mit direkten Verfahren steigt der Aufwand wie n^2 an. In den letzten zwei Jahrzehnten wurden nun mit der Methode der konjugierten Gradienten und mit den Mehrgitterverfahren sehr effiziente Löser entwickelt, die in den Kapiteln IV und V ausgiebig vorgestellt werden.

Ein wichtiger Anwendungsbereich für Finite Elemente ist die Strukturmechanik. Weil hier Systeme von Differentialgleichungen zu lösen sind, kommt man oft nicht mit den elementaren Methoden aus Kap. II aus und muß von der Freiheit Gebrauch machen, die einem die tieferliegenden Ergebnisse aus Kap. III ermöglichen. Es waren die verschiedensten Bausteine zusammenzubringen, um eine mathematisch tragfähige Theorie für die Behandlung der Probleme in der linearen Elastizitätstheorie mit Finiten Elementen zu erhalten.

Fast jeder Paragraph endet mit einigen Aufgaben, die nun nicht nur Übungen im strengen Sinne sind. Manche Aufgabe besteht darin, eine Formel oder ein Resultat aus einem anderen Blickwinkel zu betrachten oder liefert einen Hinweis, der im Text selber den Fluß gestört hätte. Bekanntlich kann man bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen über manche Fallen stolpern, wenn man — sei es auch nur unbewußt — klassische Lösungen vor Augen hat. Den Blick für solche Fallen zu schärfen, ist das Ziel mancher Aufgabe.

Das Buch baut auf Vorlesungen auf, die den Studenten im 5.–8. Semester an der Ruhr-Universität in regelmäßigen Abständen angeboten werden. Die Vorlesungen behandelten die Kapitel I und II sowie Teile der Kapitel III und V, während die Methode der konjugierten Gradienten in andere Vorlesungen eingegliedert ist. Das Kapitel VI entstand aufgrund von Verbindungen, die an der Ruhr-Universität zwischen Mathematikern und Ingenieuren bestehen.

Ein solcher Text kann nur dank der Mithilfe vieler zustande kommen, und an dieser Stelle möchte ich insbesondere F.-J. Barthold, C. Blömer, H. Blum, H. Cramer, W. Hackbusch, A. Kirmse, U. Langer, P. Peisker, E. Stein, R. Verfürt, G. Wittum und B. Worat für ihre Korrekturen und Verbesserungsvorschläge danken. Frau L. Mischke, die den Text in TeX gesetzt hat, danke ich für ihre unermüdliche Arbeit und Herrn Schwarz für seine Hilfe bei der Bewältigung von TeX-Problemen. Schließlich gilt mein Dank dem Springer-Verlag für die Publikation des Buches und die stets angenehme Zusammenarbeit.

Bochum, im Herbst 1991 *Dietrich Braess*

Inhaltsverzeichnis

Kapitel IV

Die Methode der konjugierten Gradienten

Kapitel V

Mehrgitterverfahren

Kapitel VI

Finite Elemente in der Mechanik elastischer Körper

Bezeichnungen

Bezeichnungen zu Differentialgleichungen und Finiten Elementen

Ω	offene Menge im $\mathbb{R}^n$
Γ	$=\partial\Omega$
Γ_D	Teil des Randes, auf dem Dirichlet-Bedingungen vorgegeben sind
Γ_N	Teil des Randes, auf dem Neumann-Bedingungen vorgegeben sind
Δ	Laplace-Operator
L	Differentialoperator
a_{ik}, a_0	Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung
$[\cdot]_*$	Differenzenstern
$L^2(\Omega)$	Raum der über Ω quadrat-integrierbaren Funktionen
$H^m(\Omega)$	Sobolev-Raum von L_2-Funktionen mit quadrat-integrierbaren Ableitungen bis zur Ordnung m
$H_0^m(\Omega)$	Unterraum von $H^m(\Omega)$ der Funktionen mit verallgemeinerten Nullrandbedingungen
$C^k(\Omega)$	Menge der Funktionen mit stetigen Ableitungen der Ordnung k
$C_0^k(\Omega)$	Unterrraum von $C^k(\Omega)$ der Funktionen mit kompaktem Träger
γ	Spuroperator
$\|\cdot\|_m$	Sobolev-Norm der Ordnung m
$\lvert\cdot\rvert_m$	Sobolev-Seminorm der Ordnung m
$\|\cdot\|_\infty$	Suprenumnorm
ℓ_2	Raum der quadratisch summierbaren Folgen
H'	Dualraum von H
$<,>$	duale Paarung
$\lvert\alpha\rvert$	$=\sum\alpha_i$. Ordnung des Multiindex α
∂_i	partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}$
∂^α	partielle Ableitung der Ordnung α
D	(Fréchet-) Ableitung
α	Elliptizitätskonstante
ν	äußere Normale
∂_ν	$\partial/\partial\nu$ Ableitung in Richtung der äußeren Normalen
∇f	$(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \dots, \partial f/\partial x_n)$
$\operatorname{div} f$	$\sum_{i=1}^n \partial f/\partial x_i$
S_h	Finite-Element-Raum
ψ_k	Basisfunktion von S_h
$\mathcal{T}_h$	Zerlegung von Ω

T	(Dreieck- oder Viereck-) Element in $\mathcal{T}_h$
T_{ref}	Referenzelement
h_T, ρ_T	Umkreis- bzw Inkreisradius von T
κ	Parameter zur Messung der Uniformität einer Zerlegung
$\mu(T)$	Fläche (Volumen) von T
$\mathcal{P}_t$	Menge der Polynome vom Grad $\leq t$
$\mathcal{Q}_t$	Polynommenge (5.4) zu Viereckelementen
$\mathcal{P}_{3,\text{red}}$	kubische Polynome ohne bubble function-Anteil
Π_{ref}	Menge von Polynomen, welche durch die Restriktion von S_h auf ein (Referenz-) Element gebildet werden
s	$= \dim \Pi_{\text{ref}}$
Σ	Menge von linearen Funktionalen in der Definition affiner Familien
$\mathcal{M}^k, \mathcal{M}^k_s, \mathcal{M}^k_{s,0}$	polynomiale Finite-Element-Räume in L_2, H^{s+1} und H_0^{s+1}
$\mathcal{M}^1_{*,0}$	Menge der Funktionen in $\mathcal{M}^1$, die am Mittelpunkt der Seiten stetig sind und Nullrandbedingungen im gleichen Sinne erfüllen
I, I_h	Interpolationssoperator auf Π_{ref} bzw. auf S_h
A	Steifigkeits- oder Systemmatrix
ℓ_2	Raum der quadratsummierbaren Folgen
$\delta_{..}$	Kronecker-Symbol
e	Kante eines Elements
$\|\cdot\|_{m,h}$	gitterabhängige Norm
$ker L$	Kern der linearen Abbildung L
$V^{\perp}$	orthogonales Komplement von V
V^0	Polare von V
$\mathcal{L}$	Lagrange-Funktion
M	Raum der Nebenbedingungen (bei Sattelpunktproblemen)
β	Konstante in der Brezzi-Bedingung
$H(\text{div}, \Omega)$	$:= \{v \in L_2(\Omega)^d;\ \text{div}\, v \in L_2(\Omega)\}$, $\Omega \in \mathbb{R}^d$
$L_{2,0}(\Omega)$	Menge der Funktionen in $L_2(\Omega)$ mit Integralmittel 0
B_3	kubische bubble functions (Blasen)

Bezeichnungen bei der Methode der konjugierten Gradienten

∇f	Gradient von f (Spaltenvektor)
$\kappa(A)$	spektrale Konditionszahl der Matrix A
$\sigma(A)$	Spektrum der Matrix A
$\rho(A)$	Spektralradius der Matrix A
$\lambda_{min}(A)$	kleinster Eigenwert der Matrix A
$\lambda_{max}(A)$	größter Eigenwert der Matrix A
A^t	Transponierte der Matrix A
I	Einheitsmatrix
C	Matrix zur Vorkonditionierung
g_k	Gradient bei der Näherung x_k

d_k	Richtung der Korrektur im Schritt k
V_k	$= \mathrm{span}[g_0, \ldots, g_{k-1}]$
$x'y$	Euklidisches Skalarprodukt der Vektoren x und y
$\|x\|_A$	$= \sqrt{x'Ax}$ (Energienorm)
$\|x\|_\infty$	$= \max_i \|x_i\|$ (Maximumnorm)
T_k	k-tes Tschebyscheff-Polynom
ω	Relaxationsparameter

Bezeichnungen bei Mehrgitterverfahren

$\mathcal{T}_\ell$	Triangulierung auf der Ebene ℓ
$S_\ell = S_{h_\ell}$	Finite-Element-Raum auf der Ebene ℓ
A_ℓ	Systemmatrix auf der Ebene ℓ
N_ℓ	$= \dim S_\ell$
$\mathcal{S}$	Glättungsoperator
$r, \tilde{r}$	Restriktionen
p	Prolongation
$x^{\ell,k,m}, u^{\ell,k,m}$	Variable auf der Ebene ℓ im k-ten Iterationsschritt und im m-ten Teilschritt
ν_1, ν_2	Anzahl der Vorglättungen bzw. Nachglättungen
ν	$= \nu_1 + \nu_2$
μ	$= 1$ beim V-Zyklus, $= 2$ beim W-Zyklus
q	$= \ell_{\max}$
ψ_ℓ^j	j-te Basisfunktion auf der Ebene ℓ
ρ_ℓ	Konvergenzrate von $\mathbf{MGM}_\ell$
ρ	$= \sup_\ell \rho_\ell$
$\|\|\|\cdot\|\|\|_s$	diskrete Norm der Ordnung s
β	Maß für die Glattheit einer Funktion in S_h
$\mathcal{L}$	nichtlinearer Operator
$\mathcal{L}_\ell$	nichtlineare Abbildung auf der Ebene ℓ
$D\mathcal{L}$	Ableitung von $\mathcal{L}$
λ	Homotopieparameter bei inkrementellen Methoden

Bezeichnungen in der Strukturmechanik

u	Verschiebung
ϕ	Deformation
id	identische Abbildung
C	$= \nabla\phi^T\nabla\phi$ Cauchy-Greenscher Verzerrungstensor
E	Verzerrung
ε	Verzerrung in linearer Näherung
t	Cauchyscher Spannungsvektor
T	Cauchyscher Spannungstensor
T_R	1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
Σ_R	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor

$\hat{T}$	$= \hat{T}(F)$ Antwortfunktion für Cauchyschen Spannungstensor
$\hat{\Sigma}$	$= \hat{\Sigma}(F)$ Antwortfunktion für Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor
$\tilde{\Sigma}$	$\tilde{\Sigma}(F^TF) = \hat{\Sigma}(F)$
$\tilde{T}$	$\tilde{T}(FF^T) = \hat{T}(F)$
σ	Spannung in linearer Näherung
S^2	Einheitssphäre im $\mathbb{R}^3$
$\mathbb{M}^3$	Menge der 3×3-Matrizen
$\mathbb{M}^3_+$	Menge der Matrizen in $\mathbb{M}^3$ mit positiver Determinante
$\mathbb{O}^3$	Menge der orthogonalen 3×3-Matrizen
$\mathbb{O}^3_+$	$= \mathbb{O}^3 \cap \mathbb{M}^3_+$
$\mathbb{S}^3$	Menge der symmetrischen 3×3-Matrizen
$\mathbb{S}^3_>$	Menge der positiv definiten Matrizen in $\mathbb{S}^3$
$\imath_A$	$= (\imath_1(A), \imath_2(A), \imath_3(A))$ Invarianten von A
$\wedge$	Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$
$\mathrm{diag}(d_1, \dots, d_n)$	Diagonalmatrix mit Elementen $d_1, \dots, d_n$
λ, μ	Lamé-Konstanten
E	Elastizitätsmodul
ν	Poissonzahl
n	Normalenvektor (abweichend von Kap. II und III)
$\mathcal{C}$	$\sigma = \mathcal{C}\,\varepsilon$
$\hat{W}$	Energiefunktional eines hyperelastischen Materials
$\tilde{W}$	$\tilde{W}(F^TF) = \hat{W}(F)$
$\varepsilon : \sigma$	$= \sum_{ij} \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}$
Γ_0, Γ_1	Teile der Ränder, auf denen u bzw. $\sigma \cdot n$ vorgegeben ist
Π	Energiefunktional in der linearen Theorie
D	symmetrische Ableitung
$as(\tau)$	schiefsymmetrischer Anteil von τ
$H^s(\Omega)^d$	$= [H^s(\Omega)]^d$
$H^1_\Gamma(\Omega)$	$:= \{v \in H^1(\Omega)$ mit $v(x) = 0$ für $x \in \Gamma_0\}$
$H(\mathrm{div}, \Omega)$	$:= \{\tau \in L_2(\Omega);\ \mathrm{div}\,\tau \in L_2(\Omega)\}$, τ ist Vektor oder Tensor
$H(\mathrm{rot}, \Omega)$	$:= \{\eta \in L_2(\Omega)^2;\ \mathrm{rot}\,\eta \in L_2(\Omega)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
$H^{-1}(\mathrm{div}, \Omega)$	$:= \{\tau \in H^{-1}(\Omega)^d;\ \mathrm{div}\,\tau \in H^{-1}(\Omega)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
θ, γ, w	Verdrehung, Scherterm und transversale Verschiebung bei Balken und Platten
t	Dicke von Balken, Scheibe oder Platte
ℓ	Länge eines Balkens
$W_h, \Theta_h, \Gamma_h, Q_h$	Finite-Element-Räume in der Plattentheorie
π_h	L_2-Projektor auf Γ_h
R	Restriktion auf Γ_h
P_h	L_2-Projektor auf Q_h