

Springer-Lehrbuch



Dietrich Braess

Finite Elemente

Theorie, schnelle Löser und
Anwendungen in der Elastizitätstheorie

Mit 47 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg GmbH

Dietrich Braess
Ruhr-Universität Bochum
Institut für Mathematik
Postfach 102148
W-4630 Bochum 1, FRG

Mathematics Subject Classification (1991):
65 N30, 65 F10, 65 N22, 65 N55

ISBN 978-3-540-54794-5

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Braess, Dietrich: Finite Elemente: Theorie, schnelle Löser und Anwendungen in der Elastizitätstheorie/Dietrich Braess.

(Springer-Lehrbuch)

ISBN 978-3-540-54794-5 ISBN 978-3-662-07234-9 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-07234-9

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1992

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1992

Satz: Reproduktionsfertige Vorlage vom Autor

44/3140-543210 Gedruckt auf säurefreiem Papier

Vorwort

Bei der numerischen Behandlung von elliptischen und parabolischen Differentialgleichungen wird heute sehr viel die Methode der Finiten Elemente eingesetzt. Die Methode erlaubt wegen ihrer Flexibilität auch die Behandlung schwieriger Probleme, weil sie — anders als Differenzenverfahren oder Rechnungen mit Finiten Volumen — auf die Variationsformulierung der Differentialgleichung zugeschnitten ist. Die Entwicklung von Finiten Elementen verlief lange bei Mathematikern und Ingenieuren parallel, ohne daß dies zunächst wahrgenommen wurde. Ende der 60er und Anfang der 70er Jahre erfolgte die Entwicklung des Begriffsapparats mit einer Standardisierung, die es dann ermöglichte, den Stoff auch den Studenten vorzustellen. Aus einer Reihe von Vorlesungen ist dieses Buch auch hervorgegangen.

Im Gegensatz zu der Situation bei gewöhnlichen Differentialgleichungen gibt es bei elliptischen partiellen Differentialgleichungen nicht immer klassische Lösungen und oft nur sogenannte schwache Lösungen. Das hat nicht nur Auswirkungen auf die Theorie, sondern auch auf die numerische Behandlung. Zwar existieren klassische Lösungen unter Regularitätsvoraussetzungen, wegen der mit numerischen Rechnungen verbundenen Approximation können wir uns jedoch nicht auf einen Rahmen festlegen, in dem nur klassische Lösungen vorkommen.

Für die Behandlung elliptischer Randwertaufgaben durch Finite Elemente liefert die Variationsrechnung einen passenden Rahmen. Es ist das Ziel von Kapitel II, hier einen möglichst einfachen Einstieg zu geben. In den Paragraphen 1–3 wird die Existenz von schwachen Lösungen in Sobolev-Räumen hergeleitet und dargestellt, wie in der Variationsrechnung die Randbedingungen erfaßt werden. Um dem Leser ein Gefühl für den Umgang mit der Theorie zu vermitteln, werden einige Eigenschaften der Sobolev-Räume hergeleitet oder wenigstens illustriert. Die Paragraphen 4–8 sind dann den eigentlichen Grundlagen der Finiten Elemente gewidmet. Den schwierigsten Teil machen die Approximationssätze in §6 aus. Deshalb wird dort vorab der Spezialfall regelmäßiger Gitter behandelt; auf diesen Fall möge sich der Leser beim ersten Lesen beschränken.

In Kapitel III kommen wir zu dem Teil der Theorie der Finiten Elemente, der tieferliegende Methoden der Funktionalanalysis benötigt. Letztere werden in §3 bereitgestellt. Der Leser lernt die berühmte Ladyshenskaja-Babuška-Brezzi-Bedingung kennen, die für die sachgemäße Behandlung von Problemen der Strömungsmechanik und der gemischten Methoden in der Strukturmechanik wichtig ist. Wenn man sich ohne diese Kenntnisse auf den *gesunden Menschenverstand* verläßt, wird man in der Strömungsmechanik leider dazu verleitet, Elemente mit instabilem Verhalten zu benutzen.

Es war unser Bestreben, möglichst wenig an Kenntnissen in der reellen Analysis und der Funktionalanalysis vorauszusetzen. Andererseits ist ein gewisses Hin-

tergrundwissen nützlich. Darum wird in Kapitel I der Unterschied zwischen den verschiedenen Typen von partiellen Differentialgleichungen kurz erläutert. Wer zum ersten Male mit der numerischen Lösung elliptischer Differentialgleichungen konfrontiert ist, empfindet den Zugang über die Differenzenverfahren meistens als leichter. Die Grenzen sieht man erst später. Eine solche erste Begegnung ist mit Kapitel I beabsichtigt, und auf Vollständigkeit der Theorie wird so bewußt verzichtet.

Die Finite-Element-Methode führt bei feiner werdender Diskretisierung auf große Gleichungssysteme. Bei der Lösung mit direkten Verfahren steigt der Aufwand wie n^2 an. In den letzten zwei Jahrzehnten wurden nun mit der Methode der konjugierten Gradienten und mit den Mehrgitterverfahren sehr effiziente Löser entwickelt, die in den Kapiteln IV und V ausgiebig vorgestellt werden.

Ein wichtiger Anwendungsbereich für Finite Elemente ist die Strukturmechanik. Weil hier Systeme von Differentialgleichungen zu lösen sind, kommt man oft nicht mit den elementaren Methoden aus Kap. II aus und muß von der Freiheit Gebrauch machen, die einem die tieferliegenden Ergebnisse aus Kap. III ermöglichen. Es waren die verschiedensten Bausteine zusammenzubringen, um eine mathematisch tragfähige Theorie für die Behandlung der Probleme in der linearen Elastizitätstheorie mit Finiten Elementen zu erhalten.

Fast jeder Paragraph endet mit einigen Aufgaben, die nun nicht nur Übungen im strengen Sinne sind. Manche Aufgabe besteht darin, eine Formel oder ein Resultat aus einem anderen Blickwinkel zu betrachten oder liefert einen Hinweis, der im Text selber den Fluß gestört hätte. Bekanntlich kann man bei der Behandlung partieller Differentialgleichungen über manche Fallen stolpern, wenn man — sei es auch nur unbewußt — klassische Lösungen vor Augen hat. Den Blick für solche Fallen zu schärfen, ist das Ziel mancher Aufgabe.

Das Buch baut auf Vorlesungen auf, die den Studenten im 5.-8. Semester an der Ruhr-Universität in regelmäßigen Abständen angeboten werden. Die Vorlesungen behandelten die Kapitel I und II sowie Teile der Kapitel III und V, während die Methode der konjugierten Gradienten in andere Vorlesungen eingegliedert ist. Das Kapitel VI entstand aufgrund von Verbindungen, die an der Ruhr-Universität zwischen Mathematikern und Ingenieuren bestehen.

Ein solcher Text kann nur dank der Mithilfe vieler zustande kommen, und an dieser Stelle möchte ich insbesondere F.-J. Barthold, C. Blömer, H. Blum, H. Cramer, W. Hackbusch, A. Kirmse, U. Langer, P. Peisker, E. Stein, R. Verfürth, G. Wittum und B. Worat für ihre Korrekturen und Verbesserungsvorschläge danken. Frau L. Mischke, die den Text in TeX gesetzt hat, danke ich für ihre unermüdliche Arbeit und Herrn Schwarz für seine Hilfe bei der Bewältigung von TeX-Problemen. Schließlich gilt mein Dank dem Springer-Verlag für die Publikation des Buches und die stets angenehme Zusammenarbeit.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Bezeichnungen	xi

Kapitel I *Einführung*

§ 1. Beispiele und Typeneinteilung	2
Beispiele 2 — Typeneinteilung 8 — Sachgemäß gestellte Probleme 9	
§ 2. Maximum-Prinzip	12
Beispiele 13 — Folgerungen 14	
§ 3. Differenzenverfahren	16
Diskretisierung 16 — Diskretes Maximum-Prinzip 19	
§ 4. Eine Konvergenztheorie für Differenzenverfahren	22
Konsistenz 22 — Lokaler und globaler Fehler 22 — Grenzen der Konvergenztheorie 25	

Kapitel II *Konforme Finite Elemente*

§ 1. Sobolev-Räume	28
Einführung der Sobolev-Räume 28 — Die Friedrichssche Ungleichung 30 — Singularitäten von H^1 -Funktionen 31 — Kompakte Einbettungen 32	
§ 2. Variationsformulierung elliptischer Randwertaufgaben 2. Ordnung ...	34
Variationsformulierung 34 — Reduktion auf homogene Randbedingungen 35 — Existenz von Lösungen 37 — Inhomogene Randbedingungen 41	
§ 3. Die Neumannsche Randwertaufgabe. Ein Spursatz	43
Elliptizität in H^1 43 — Randwertaufgaben mit natürlichen Randbedingungen 44 — Neumannsche Randbedingungen 45 — Gemischte Randbedingungen 46 — Beweis des Spursatzes 46 — Praktische Konsequenzen aus dem Spursatz 49	
§ 4. Ritz-Galerkin-Verfahren und einfache Finite Elemente	52
Modellproblem 55	
§ 5. Einige gebräuchliche Finite Elemente	58
Forderungen an die Triangulierung 59 — Bedeutung der Differenzierbarkeitseigenschaften 60 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen	

62 — Bemerkung zu C^1 -Elementen 63 — Bilineare Elemente 65 — Quadratische Viereckelemente 67 — Affine Familien 67 — Zur Auswahl von Elementen 69	
§ 6. Approximationssätze	71
Der Fragenkreis um das Bramble-Hilbert-Lemma 72 — Dreieckelemente mit vollständigen Polynomen 73 — Bilineare Viereckelemente 77 — Inverse Abschätzungen 77 — Anhang: Zur Optimalität der Abschätzungen 78	
§ 7. Fehlerabschätzungen für elliptische Probleme zweiter Ordnung	82
Bemerkungen zu Regularitätssätzen 82 — Fehlerabschätzungen in der Energienorm 83 — L_2 -Abschätzungen 84 — Eine einfache L_∞ -Abschätzung 86	
§ 8. Rechentechnische Betrachtungen	88
Das Aufstellen der Steifigkeitsmatrix 88 — Innere Kondensation 90 — Aufwand für das Aufstellen der Matrix 91 — Rückwirkung auf die Wahl des Netzes 91 — Teilweise Netzverfeinerungen 91	
<i>Kapitel III</i>	
<i>Nichtkonforme und andere Methoden</i>	
§ 1. Abstrakte Hilfssätze und eine einfache Randapproximation	96
Die Lemmas von Strang 96 — Dualitätstechnik 98 — Das Crouzeix-Raviart-Element 99 — Eine einfache Approximation krummliniger Ränder 102 — Modifikationen beim Dualitätsargument 104	
§ 2. Isoparametrische Elemente	107
Isoparametrische Dreieckelemente 107 — Isoparametrische Viereckelemente 109	
§ 3. Weitere funktionalanalytische Hilfsmittel	112
Negative Normen 112 — Adjungierte Operatoren 114 — Ein abstrakter Existenzsatz 114 — Ein abstrakter Konvergenzsatz 116 — Beweis von Satz 3.4 117	
§ 4. Sattelpunktprobleme	119
Sattelpunkte und Minima 119 — Die inf-sup-Bedingung 120 — Gemischte Finite-Element-Methoden 124 — Die Laplacegleichung als gemischtes Problem 126 — Sattelpunktprobleme mit Strafterm 128	
§ 5. Die Stokessche Gleichung	134
Variationsformulierung 135 — Die inf-sup-Bedingung 136 — Bemerkungen zur Brezzi-Bedingung 137 — Fast inkompressible Strömungen 138	
§ 6. Finite Elemente für das Stokes Problem	139
Ein instabiles Element 139 — Das Taylor-Hood-Element 144 — Das Mini-Element 145 — Das divergenzfreie nichtkonforme P_1 -Element 145	

*Kapitel IV**Die Methode der konjugierten Gradienten*

§ 1. Klassische Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme	149
Stationäre lineare Prozesse 149 — Gesamt- und Einzelschrittverfahren	
151 — Das Modellproblem 154 — Overrelaxation 154	
§ 2. Gradientenverfahren	158
Das allgemeine Gradientenverfahren 158 — Gradientenverfahren und	
quadratische Funktionen 159 — Konvergenzverhalten bei Matrizen mit	
großer Kondition 161	
§ 3. Verfahren mit konjugierten Gradienten und konjugierten Residuen	164
Der Algorithmus 166 — Analyse des cg-Verfahrens als optimales Ver-	
fahren 168 — Verfahren der konjugierten Residuen 170	
§ 4. Vorkonditionierung	173
Vorkonditionierung durch SSOR 176 — Vorkonditionierung durch ILU	
177 — Bemerkungen zur Parallelisierung 179 — Nichtlineare Probleme	
180	
§ 5. Sattelpunktprobleme	183
Der Uzawa-Algorithmus und seine Varianten 183 — Verbesserung der	
approximativen Inversen 185	

*Kapitel V**Mehrgitterverfahren*

§ 1. Mehrgitterverfahren für Variationsaufgaben	188
Glättungseigenschaften klassischer Iterationsverfahren 188 — Die Mehr-	
gitter-Idee 189 — Der Algorithmus 190 — Der Übergang zwischen den	
Gittern 194	
§ 2. Konvergenz von Mehrgitterverfahren	198
Diskrete Normen 199 — Verknüpfung mit den Sobolev-Normen 201 —	
Approximationseigenschaft 203 — Konvergenzbeweis für das Zweigitter-	
verfahren 204	
§ 3. Konvergenz bei mehreren Ebenen	207
Eine Rekursionsformel für den W-Zyklus 207 — Die Verschärfung für	
die Energienorm 208 — Der Konvergenzbeweis für den V-Zyklus 209	
§ 4. Berechnung von Startwerten	214
Bestimmung von Startwerten 214 — Komplexität 216 — Mehrgitter-	
verfahren mit wenigen Ebenen 217	
§ 5. Nichtlineare Probleme	219
Mehrgitter-Newton-Verfahren 220 — Das nichtlineare Mehrgitterverfah-	
ren 221 — Zur Konvergenz des Newton-Verfahrens 223 — Die Konti-	
nuitätsmethode 224 — Realisierung bei Mehrgitterverfahren 227	

*Kapitel VI**Finite Elemente in der Mechanik elastischer Körper*

§ 1. Einführung in die Elastizitätstheorie	230
Kinematik 230 — Gleichgewichtsbedingungen 232 — Die Piola-Transformation 233 — Materialgesetze 234 — Kleine Verzerrungen 238	
§ 2. Hyperelastische Materialien	240
§ 3. Lineare Elastizitätstheorie	243
Das Variationsproblem 243 — Die reine Verschiebungsmethode 247 -- Die gemischte Methode nach Hellinger und Reissner 249 -- Die gemischte Methode nach Hu-Washizu 251 — Fast inkompressibles Material 252 — Locking 253	
§ 4. Scheibe	257
Ebener Spannungszustand 257 — Ebener Verzerrungszustand 258 — Scheibenelemente 258 — Das PEERS-Element 259 — Zur Implementierung 263	
§ 5. Balken und Platten: Die Kirchhoff-Platte	264
Die Hypothesen 264 — Gemischte Methoden 267 — DKT-Elemente 269	
§ 6. Der Timoshenko-Balken	275
Der Verschiebungsansatz 275 — Reduzierte Integration 277 -- Ein äquivalenter gemischter Ansatz 277	
§ 7. Die Mindlin-Reissner-Platte	281
Die Helmholtz-Zerlegung 282 — Der gemischte Ansatz mit Helmholtz-Zerlegung 283 — MITC-Elemente 285	
Literatur	292
Sachverzeichnis	299

Bezeichnungen

Bezeichnungen zu Differentialgleichungen und Finiten Elementen

Ω	offene Menge im \mathbb{R}^n
Γ	$=\partial\Omega$
Γ_D	Teil des Randes, auf dem Dirichlet-Bedingungen vorgegeben sind
Γ_N	Teil des Randes, auf dem Neumann-Bedingungen vorgegeben sind
Δ	Laplace-Operator
L	Differentialoperator
a_{ik}, a_0	Koeffizientenfunktionen der Differentialgleichung
$[\cdot]_*$	Differenzenstern
$L^2(\Omega)$	Raum der über Ω quadrat-integrierbaren Funktionen
$H^m(\Omega)$	Sobolev-Raum von L_2 -Funktionen mit quadrat-integrierbaren Ableitungen bis zur Ordnung m
$H_0^m(\Omega)$	Unterraum von $H^m(\Omega)$ der Funktionen mit verallgemeinerten Nullrandbedingungen
$C^k(\Omega)$	Menge der Funktionen mit stetigen Ableitungen der Ordnung k
$C_0^k(\Omega)$	Unterraum von $C^k(\Omega)$ der Funktionen mit kompaktem Träger
γ	Spuoperator
$\ \cdot\ _m$	Sobolev-Norm der Ordnung m
$ \cdot _m$	Sobolev-Seminorm der Ordnung m
$\ \cdot\ _\infty$	Supremumnorm
ℓ_2	Raum der quadratisch summierbaren Folgen
H'	Dualraum von H
\langle, \rangle	duale Paarung
$ \alpha $	$=\sum \alpha_i$. Ordnung des Multiindex α
∂_i	partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}$
∂^α	partielle Ableitung der Ordnung α
D	(Fréchet-) Ableitung
α	Elliptizitätskonstante
ν	äußere Normale
∂_ν	$\partial/\partial\nu$ Ableitung in Richtung der äußeren Normalen
∇f	$(\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \dots, \partial f/\partial x_n)$
$\operatorname{div} f$	$\sum_{i=1}^n \partial f/\partial x_i$
S_h	Finite-Element-Raum
ψ_k	Basisfunktion von S_h
\mathcal{T}_h	Zerlegung von Ω

T	(Dreieck- oder Viereck-) Element in \mathcal{T}_h
T_{ref}	Referenzelement
h_T, ρ_T	Umkreis- bzw. Inkreisradius von T
κ	Parameter zur Messung der Uniformität einer Zerlegung
$\mu(T)$	Fläche (Volumen) von T
\mathcal{P}_t	Menge der Polynome vom Grad $\leq t$
\mathcal{Q}_t	Polynommenge (5.4) zu Viereckelementen
$\mathcal{P}_{3,\text{red}}$	kubische Polynome ohne bubble function-Anteil
Π_{ref}	Menge von Polynomen, welche durch die Restriktion von S_h auf ein (Referenz-) Element gebildet werden
s	$= \dim \Pi_{\text{ref}}$
Σ	Menge von linearen Funktionalen in der Definition affiner Familien
$\mathcal{M}^k, \mathcal{M}_s^k, \mathcal{M}_{s,0}^k$	polynomiale Finite-Element-Räume in L_2 , H^{s+1} und H_0^{s+1}
$\mathcal{M}_{*,0}^1$	Menge der Funktionen in \mathcal{M}^1 , die am Mittelpunkt der Seiten stetig sind und Nullrandbedingungen im gleichen Sinne erfüllen
I, I_h	Interpolationsoperator auf Π_{ref} bzw. auf S_h
A	Steifigkeits- oder Systemmatrix
ℓ_2	Raum der quadratsummierbaren Folgen
$\delta_{..}$	Kronecker-Symbol
e	Kante eines Elements
$\ \cdot\ _{m,h}$	gitterabhängige Norm
$\ker L$	Kern der linearen Abbildung L
V^\perp	orthogonales Komplement von V
V^0	Polare von V
\mathcal{L}	Lagrange-Funktion
M	Raum der Nebenbedingungen (bei Sattelpunktproblemen)
β	Konstante in der Brezzi-Bedingung
$H(\text{div}, \Omega)$	$:= \{v \in L_2(\Omega)^d; \text{div } v \in L_2(\Omega)\}$, $\Omega \in \mathbb{R}^d$
$L_{2,0}(\Omega)$	Menge der Funktionen in $L_2(\Omega)$ mit Integralmittel 0
B_3	kubische bubble functions (Blasen)

Bezeichnungen bei der Methode der konjugierten Gradienten

∇f	Gradient von f (Spaltenvektor)
$\kappa(A)$	spektrale Konditionszahl der Matrix A
$\sigma(A)$	Spektrum der Matrix A
$\rho(A)$	Spektralradius der Matrix A
$\lambda_{\min}(A)$	kleinster Eigenwert der Matrix A
$\lambda_{\max}(A)$	größter Eigenwert der Matrix A
A^t	Transponierte der Matrix A
I	Einheitsmatrix
C	Matrix zur Vorkonditionierung
g_k	Gradient bei der Näherung x_k

d_k	Richtung der Korrektur im Schritt k
V_k	$= \text{span}[g_0, \dots, g_{k-1}]$
$x'y$	Euklidisches Skalarprodukt der Vektoren x und y
$\ x\ _A$	$= \sqrt{x'Ax}$ (Energienorm)
$\ x\ _\infty$	$= \max_i x_i $ (Maximumnorm)
T_k	k -tes Tschebyscheff-Polynom
ω	Relaxationsparameter

Bezeichnungen bei Mehrgitterverfahren

T_ℓ	Triangulierung auf der Ebene ℓ
$S_\ell = S_{h_\ell}$	Finite-Element-Raum auf der Ebene ℓ
A_ℓ	Systemmatrix auf der Ebene ℓ
N_ℓ	$= \dim S_\ell$
S	Glättungsoperator
r, \tilde{r}	Restriktionen
p	Prolongation
$x^{\ell,k,m}, u^{\ell,k,m}$	Variable auf der Ebene ℓ im k -ten Iterationsschritt und im m -ten Teilschritt
ν_1, ν_2	Anzahl der Vorglättungen bzw. Nachglättungen
ν	$= \nu_1 + \nu_2$
μ	$= 1$ beim V-Zyklus, $= 2$ beim W-Zyklus
q	$= \ell_{\max}$
ψ_ℓ^j	j -te Basisfunktion auf der Ebene ℓ
ρ_ℓ	Konvergenzrate von MGM $_\ell$
ρ	$= \sup_\ell \rho_\ell$
$\ \cdot \ _s$	diskrete Norm der Ordnung s
β	Maß für die Glattheit einer Funktion in S_h
\mathcal{L}	nichtlinearer Operator
\mathcal{L}_ℓ	nichtlineare Abbildung auf der Ebene ℓ
$D\mathcal{L}$	Ableitung von \mathcal{L}
λ	Homotopieparameter bei inkrementellen Methoden

Bezeichnungen in der Strukturmechanik

u	Verschiebung
ϕ	Deformation
id	identische Abbildung
C	$= \nabla\phi^T\nabla\phi$ Cauchy-Greenscher Verzerrungstensor
E	Verzerrung
ε	Verzerrung in linearer Näherung
t	Cauchyscher Spannungsvektor
T	Cauchyscher Spannungstensor
T_R	1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
Σ_R	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor

\hat{T}	$= \hat{T}(F)$ Antwortfunktion für Cauchyschen Spannungstensor
$\hat{\Sigma}$	$= \hat{\Sigma}(F)$ Antwortfunktion für Piola-Kirchhoffschen Spannungstensor
$\tilde{\Sigma}$	$\tilde{\Sigma}(F^T F) = \hat{\Sigma}(F)$
\tilde{T}	$\tilde{T}(F F^T) = \hat{T}(F)$
σ	Spannung in linearer Näherung
S^2	Einheitssphäre im \mathbb{R}^3
M^3	Menge der 3×3 -Matrizen
M_+^3	Menge der Matrizen in M^3 mit positiver Determinante
O^3	Menge der orthogonalen 3×3 -Matrizen
O_+^3	$= O^3 \cap M_+^3$
S^3	Menge der symmetrischen 3×3 -Matrizen
$S_{>}^3$	Menge der positiv definiten Matrizen in S^3
ι_A	$= (\iota_1(A), \iota_2(A), \iota_3(A))$ Invarianten von A
\wedge	Vektorprodukt im \mathbb{R}^3
$\text{diag}(d_1, \dots, d_n)$	Diagonalmatrix mit Elementen d_1, \dots, d_n
λ, μ	Lamé-Konstanten
E	Elastizitätsmodul
ν	Poissonzahl
n	Normalenvektor (abweichend von Kap. II und III)
C	$\sigma = C \varepsilon$
\hat{W}	Energiefunktional eines hyperelastischen Materials
\tilde{W}	$\tilde{W}(F^T F) = \hat{W}(F)$
$\varepsilon : \sigma$	$= \sum_{ij} \varepsilon_{ij} \sigma_{ij}$
Γ_0, Γ_1	Teile der Ränder, auf denen u bzw. $\sigma \cdot n$ vorgegeben ist
Π	Energiefunktional in der linearen Theorie
D	symmetrische Ableitung
$as(\tau)$	schiefsymmetrischer Anteil von τ
$H^s(\Omega)^d$	$= [H^s(\Omega)]^d$
$H_{\Gamma}^1(\Omega)$	$:= \{v \in H^1(\Omega) \text{ mit } v(x) = 0 \text{ für } x \in \Gamma_0\}$
$H(\text{div}, \Omega)$	$:= \{\tau \in L_2(\Omega); \text{div } \tau \in L_2(\Omega)\}$, τ ist Vektor oder Tensor
$H(\text{rot}, \Omega)$	$:= \{\eta \in L_2(\Omega)^2; \text{rot } \eta \in L_2(\Omega)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
$H^{-1}(\text{div}, \Omega)$	$:= \{\tau \in H^{-1}(\Omega)^d; \text{div } \tau \in H^{-1}(\Omega)\}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^d$
θ, γ, w	Verdrehung, Scherterm und transversale Verschiebung bei Balken und Platten
t	Dicke von Balken, Scheibe oder Platte
ℓ	Länge eines Balkens
$W_h, \Theta_h, \Gamma_h, Q_h$	Finite-Element-Räume in der Plattentheorie
π_h	L_2 -Projektor auf Γ_h
R	Restriktion auf Γ_h
P_h	L_2 -Projektor auf Q_h