

Heidelberger Taschenbücher Band 105



Josef Stoer

Einführung in die Numerische Mathematik I

unter Berücksichtigung von Vorlesungen von
F. L. Bauer

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg GmbH 1972

Prof. Dr. Josef Stoer
Institut für Angewandte Mathematik der Universität Würzburg

AMS Subject Classifications (1970)

65–01, 65–02, 65 B05, 65 B15, 65 D05, 65 D30, 65 F05, 65 F20,
65 F25, 65 F35, 65 G05, 65 H05, 65 H10

ISBN 978-3-540-05750-5 ISBN 978-3-662-06865-6 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-662-06865-6

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten.

Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1972

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1972.

Library of Congress Catalog Card Number 78–189388

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Keter Publishing House, Jerusalem

Vorwort

Dieses Buch gibt den Stoff des ersten Teils einer zweisemestrigen Einführungsvorlesung in die Numerische Mathematik wieder, die der Verfasser in den letzten Jahren an mehreren Hochschulen halten konnte. Neben der Beschreibung der theoretischen Grundlagen der Probleme und Methoden der numerischen Mathematik waren folgende Ziele für die Auswahl des Stoffes und seine Darstellung maßgeblich: Von den vielen Methoden der numerischen Mathematik sollten hauptsächlich diejenigen behandelt werden, die sich auch leicht auf Digitalrechnern realisieren lassen. Dementsprechend wird auf die algorithmische Beschreibung der Verfahren großer Wert gelegt — kritische Teile von Algorithmen werden häufig in Algol 60 beschrieben. Wenn mehrere Methoden zur Lösung eines Problems vorgestellt werden, wird gleichzeitig nach Möglichkeit versucht, diese Methoden bezüglich ihrer praktischen Brauchbarkeit zu vergleichen und die Grenzen ihrer Anwendbarkeit anzugeben. Bei diesen Vergleichen sollten nicht nur die Anzahl der Operationen, Konvergenzeigenschaften usw. eine Rolle spielen, wichtiger ist es, die numerische Stabilität der Algorithmen zu vergleichen, um einen Einblick in die Gründe für die Zuverlässigkeit oder Unzuverlässigkeit von Verfahren zu geben. Das Einleitungskapitel über Fehleranalyse spielt dabei eine besondere Rolle: In ihm werden die Begriffe der numerischen Stabilität und Gutartigkeit von Algorithmen, die nach Meinung des Verfassers im Zentrum der numerischen Mathematik stehen, präzisiert und ihre Wichtigkeit genauer, als dies vielfach noch üblich ist, begründet und dargestellt. Nicht zuletzt dienen zahlreiche Beispiele und Übungsaufgaben dazu, die numerischen und theoretischen Eigenschaften von Verfahren zu illustrieren.

Da eine auch nur annähernd vollständige Aufzählung und Beschreibung brauchbarer Methoden weder möglich noch beabsichtigt war, sei der interessierte Leser auf folgende Zeitschriften hingewiesen, in denen er zahlreiche weitere Algorithmen teilweise sogar in der Form von Algol- oder Fortran-Programmen beschrieben findet:

Numerische Mathematik, Communications of the ACM, Journal of the ACM, The Computer Journal, Computing, Mathematics of Computation, BIT, SIAM Journal on Numerical Analysis, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik.

Wegen ihrer Zuverlässigkeit werden insbesondere die Algol-Programme empfohlen, die in der Zeitschrift „Numerische Mathematik“ im Rahmen der sog. „Handbook Series“ erscheinen.

An Inhalt und Aufbau der diesem Buch zugrunde liegenden Vorlesung haben viele mitgewirkt. Insbesondere möchte ich dankbar den Einfluß von Professor Dr. F. L. Bauer und Professor Dr. R. Baumann anerkennen, auf deren Vorlesungsausarbeitungen ich mich stützen konnte. Darüber hinaus haben sie zusammen mit den Herren Professor Dr. R. Bulirsch und Dr. Chr. Reinsch mit wertvollen Verbesserungsvorschlägen zur Klärung einer Reihe von kritischen Punkten beigetragen.

Eine vorläufige Fassung des Buches entstand 1970 in Form eines Skriptums der Universität Würzburg unter der maßgeblichen Mitwirkung meiner Mitarbeiter Dipl.-Math. K. Butendeich, Dipl.-Phys. G. Schuller und Dipl.-Math. Dr. J. Zowe. Für ihre Einsatzbereitschaft, mit der sie bei der Redaktion der verschiedenen Fassungen des Manuskripts mithalfen, möchte ich Ihnen besonders herzlich danken. Nicht zuletzt gilt mein besonderer Dank Frau I. Brugger, die mit großer Gewissenhaftigkeit und Geduld die umfangreichen Schreibarbeiten ausführte.

Würzburg, im November 1971

J. Stoer

Inhaltsverzeichnis

1 Fehleranalyse	1
1.1 Zahldarstellung	1
1.2 Rundungsfehler und Gleitpunktrechnung	4
1.3 Fehlerfortpflanzung	8
1.4 Beispiele	19
Übungsaufgaben	27
Literatur	30
2 Interpolation	31
2.1 Interpolation durch Polynome	32
2.1.1 Theoretische Grundlagen. Die Interpolationsformel von Lagrange	32
2.1.2 Die Algorithmen von Neville und Aitken	33
2.1.3 Die Newtonsche Interpolationsformel. Dividierte Differenzen	37
2.1.4 Das Restglied bei der Polynominterpolation	41
2.2 Interpolation mit rationalen Funktionen	44
2.2.1 Allgemeine Eigenschaften der rationalen Interpolation	45
2.2.2 Inverse und reziproke Differenzen. Der Thielesche Kettenbruch	48
2.2.3 Neville-artige Algorithmen	52
2.2.4 Anwendungen und Vergleich der beschriebenen Algorithmen	56
2.3 Trigonometrische Interpolation	58
2.3.1 Theoretische Grundlagen	58
2.3.2 Die Algorithmen von Goertzel und Reinsch	62
2.3.3 Der Algorithmus von Cooley und Tukey	66
2.3.4 Anwendungen: Näherungsweise Berechnung von Fourierkoeffizienten mittels Abmin- derungsfaktoren	71

2.4	Spline-Interpolation	76
2.4.1	Theoretische Grundlagen	77
2.4.2	Die Berechnung von Splinefunktionen	80
2.4.3	Konvergenzeigenschaften der Spline- funktionen	86
	Übungsaufgaben	90
	Literatur	99
3	Integration von Funktionen	100
3.1	Die Integrationsformeln von Newton-Côtes	100
3.2	Die Euler-Maclaurinsche Summenformel	103
3.3	Anwendung der Extrapolation auf die Integration	108
3.4	Allgemeines über Extrapolationsverfahren	114
3.5	Die Gaußsche Integrationsmethode	118
3.6	Integrale mit Singularitäten	127
	Übungsaufgaben	129
	Literatur	131
4	Lineare Gleichungssysteme	132
4.1	Gauß-Elimination. Dreieckszerlegung einer Matrix	132
4.2	Der Gauß-Jordan-Algorithmus	141
4.3	Das Cholesky-Verfahren	145
4.4	Fehlerabschätzungen	148
4.5	Rundungsfehleranalyse der Gaußschen Eliminationsmethode	156
4.6	Rundungsfehlereinfluß bei der Auflösung von gestaffelten Gleichungssystemen	161
4.7	Orthogonalisierungsverfahren. Die Verfahren von Householder und Schmidt	163
4.8	Ausgleichsrechnung	170
4.8.1	Das lineare Ausgleichsproblem. Die Normal- gleichungen	171
4.8.2	Orthogonalisierungsverfahren zur Lösung des linearen Ausgleichsproblems	174
4.8.3	Die Kondition des linearen Ausgleichs- problems	175
4.8.4	Nichtlineare Ausgleichsprobleme	181
	Übungsaufgaben	183
	Literatur	188
5	Nullstellenbestimmung durch Iterationsverfahren	189
5.1	Entwicklung von Iterationsverfahren	190
5.2	Allgemeine Konvergenzsätze	193

5.3	Die Konvergenz des allgemeinen Newton-Verfahrens	197
5.4	Ein modifiziertes Newton-Verfahren	201
5.4.1	Über die Konvergenz von Minimierungs- verfahren	202
5.4.2	Anwendung auf das modifizierte Newton- Verfahren	207
5.5	Nullstellenbestimmung für Polynome. Das Newton- sche Verfahren	211
5.6	Sturmsche Ketten und Bisektionsverfahren	222
5.7	Das Verfahren von Bairstow	226
5.8	Genauigkeitsfragen bei der Nullstellenbestimmung von Polynomen	228
5.9	Interpolationsmethoden zur Bestimmung von Nullstellen	231
5.10	Die Δ^2 -Methode von Aitken	236
	Übungsaufgaben	241
	Literatur	244
	Namen- und Sachverzeichnis	247