

Klaus Jänich

Analysis für Physiker und Ingenieure

Funktionentheorie,
Differentialgleichungen,
Spezielle Funktionen

Ein Lehrbuch für das zweite Studienjahr

Vierte Auflage
Mit 461 Figuren

 Springer

Prof. Dr. Klaus Jänich
Universität Regensburg
Fakultät für Mathematik
93040 Regensburg, Deutschland
e-mail: klaus.jaenich@mathematik.uni-regensburg.de

Mathematics Subject Classification (2000):

Primary: 34-01

Secondary: 30-01, 33-01, 34A10, 34A20, 34A30, 34B25, 34B27, 34C35, 33A40, 33A45

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Jänich, Klaus:

Analysis für Physiker und Ingenieure: Funktionentheorie, Differentialgleichungen, spezielle Funktionen, ein Lehrbuch für das zweite Studienjahr / Klaus Jänich. - 4.Aufl..

(Springer-Lehrbuch)

ISBN 978-3-540-41985-3 ISBN 978-3-662-05703-2 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-05703-2

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

springer.de

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1983, 1990, 1995, 2001

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 2001

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Herstellung: LE-TeX Jelonek, Schmidt & Vöckler GbR, Leipzig

Gedruckt auf säurefreiem Papier SPIN: 10786268 44/3142YL - 5 4 3 2 1

Vorwort zur vierten Auflage

Beim Schreiben dieses Lehrbuchs für das zweite Studienjahr war ich davon ausgegangen, dass die Leser die mathematischen Anfängervorlesungen Analysis I, II und Lineare Algebra I besucht haben. Nun erscheint zugleich mit dieser vierten Auflage der erste Band eines zweibändigen neuen Anfängerlehrbuchs, das ich für die Physikstudenten im *ersten* Studienjahr geschrieben habe bzw. gerade noch schreibe. Für die Leser dieser neuen *Mathematik 1, 2* soll das vorliegende Buch dann den Abschluss eines kompletten Mathematikurses bis zum Vordiplom darstellen, so ist es jedenfalls von mir gemeint.

Wollte ich die von der Analysis I, II und Linearen Algebra I herkommenden Leser vergessen und stünde mir beliebig viel Zeit und Kraft zur Verfügung, was alles nicht der Fall ist, so sollte ich das vorliegende Buch auch äußerlich zu einer *Mathematik 3* umarbeiten. Das würde im Wesentlichen im Wegstreichen von geschätzten neunzig Seiten Differentialgleichungen bestehen, die nämlich nun in *Mathematik 1, 2* schon enthalten sind. Funktionentheorie und Spezielle Funktionen der Mathematischen Physik blieben aber sowieso ungeändert.

Natürlich werde ich nichts dergleichen tun. Ich erzähle das nur, um die Verhältnisse klarzustellen.

Regensburg, im Juli 2001

K. Jänich

Vor- und Dankeswort zur ersten Auflage

Dieses Buch ist ursprünglich für Physiker geschrieben worden. Um zu erfahren, ob es auch für Ingenieure im analogen Studienabschnitt geeignet sei, hat der Verlag das fertige Manuskript verschiedenen kompetenten Beurteilern vorgelegt; und die Auskünfte waren so eindeutig und positiv, daß sich Autor und Verlag berechtigt glaubten, die Ingenieure schon durch den Titel auf das Buch aufmerksam zu machen. Wegen dieses Hergangs finden sich nun freilich meine ingenieurwissenschaftlichen Leser durchweg als Physiker angeredet, woran sie hoffentlich keinen Anstoß nehmen werden.

Zustande gekommen ist das Buch durch Anregung, Wunsch und Zuspruch meiner Regensburger Kollegen in der Physik. Sie wollten von mir eine einsemestrige Vorlesung über

Funktionentheorie und Differentialgleichungen für ihre Studenten im zweiten Studienjahr haben, die mathematisch zu verantworten und trotzdem für Physiker brauchbar sein sollte. Aus dem ersten Jahr durfte ich die Standard-Vorlesungen Analysis I, Lineare Algebra I und Analysis II als bekannt voraussetzen. „Gut“, sagte ich (nicht gleich, doch schließlich), „aber Ihr müßt mir helfen.“ – „Selbstverständlich“, versprachen sie; und ich nahm mir im stillen vor, die Sache gleich wieder beiseite zu legen, falls sich diese Versprechung als leer erweisen sollte.

Diese Gefahr hat nie bestanden. Die Physiker haben mir jederzeit bereitwillig und freundschaftlich meine Fragen beantwortet, Vorschläge gemacht, ihre Auffassungen ausinandergesetzt. Am meisten habe ich Herrn Kollegen Ulrich Schröder zu danken, aber auch zum Beispiel Herrn Keller, Herrn Trebin, Herrn Weise und überhaupt einer ganzen Reihe von Physiker-Kollegen bin ich im Einzelnen Dank schuldig geworden, und für die Auswahl des Stoffes habe ich von allen Seiten konkreten Rat erhalten.

Freilich konnte ich nicht alles Wünschenswerte aufnehmen. Einmal wollte ich im Rahmen dessen bleiben, was man in einem Semester unterrichten oder als Student sich erarbeiten kann, und zum anderen mußte ich mir dem reinen *Stoff* gegenüber eine gewisse Ellenbogenfreiheit bewahren, damit mathematisches Denken und Verstehen größerer Zusammenhänge nicht zu kurz kommen, denn eine bloße Materialsammlung ohne geistiges Band, für den Erfahrenen vielleicht ein Faktenschatz, wäre für den Lernenden doch nur ein *Faktenfriedhof*.

Die Angabe, der gesamte Stoff ließe sich in einem Semester unterrichten, wird bei manchem Kollegen ein skeptisches Lächeln hervorrufen. Nun ja, also ganz wörtlich soll es auch nicht gemeint sein. Wie der Regisseur ein Bühnenwerk durch „Striche“ für die Aufführung vorbereitet, so mußte ich für meine einsemestrigen Regensburg Vorlesungen auch ein paar Striche machen – aber nicht gar viele; und jedenfalls kann ich das Verfahren, den hier behandelten drei Themen je ein Drittel eines Semesters zu widmen, als sehr gut praktikabel empfehlen. Steht noch mehr Zeit zur Verfügung – um so besser.

Wenn ich nachdenke, auf welche Konventionen der Darstellung ich den Leser etwa aufmerksam machen muß, so fällt mir eigentlich nur der unübliche Gebrauch des beweisabschließenden Zeichens \square ein. Ich verwende es ganz allgemein als „abschließendes“ Zeichen, also auch um das Ende einer hervorgehobenen Aussage oder einer Definition zu bezeichnen. Dieses Ende sollte der Leser nämlich schon sehen können, bevor er den Inhalt aufgenommen hat; aber wegen der vielen Formeln und Figuren läßt die Typographie allein es nicht immer klar erkennen, deshalb nehme ich das abschließende Zeichen zu Hilfe.

Die Figuren sind zumeist von der Art, wie man sie während der Vorlesung an die Tafel zeichnet, aber natürlich sollen sie im Buch etwas sorgfältiger sein. Deshalb habe ich für etwa hundert Figuren den PLOTTER eingesetzt. Da dieses Geschäft neu für mich war, mag ich anfangs einigen gutmütigen Menschen etwas beschwerlich gefallen sein. Besonders Frau Friedrich und Herr Knebler haben dabei eine Engelsgeduld bewiesen, und wenn es gar nicht mehr weiter ging, hat mich immer Herr Dr. Gottfried Meyer vom Rechenzentrum gerettet. Auch das freundliche Entgegenkommen von Herrn Dipl.-Ing. Ernst Schiller vom Rechenzentrum hat mir sehr geholfen, und schließlich erwies sich Frau Erna Dollinger am Terminal als genau so zuverlässig wie beim Schreiben des Manuskripts. Ihnen allen sei herzlich gedankt.

Inhaltsverzeichnis

Erster Teil: Ein Grundkurs in Funktionentheorie	1
<i>Kapitel I: Die komplexen Zahlen</i>	3
§ 1 Einleitung	3
§ 2 Grundbegriffe	5
§ 3 Gebiete in der komplexen Zahlenebene	7
§ 4 Anschauliche Bedeutung einiger Rechenoperationen	12
Rückschau auf das Kapitel I	18
Test 1	18
Übungsaufgaben zu Kapitel I	19
<i>Kapitel II: Analytische Funktionen</i>	21
§ 1 Komplexe Differenzierbarkeit	21
§ 2 Konformität	23
§ 3 Die Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen	31
§ 4 Potenzreihen	33
§ 5 Die Elementaren Funktionen im Komplexen	37
§ 6 Laurent-Reihen	43
Rückschau auf das Kapitel II	46
Test 2	47
Übungsaufgaben zu Kapitel II	48
<i>Kapitel III: Komplexe Integration</i>	49
§ 1 Der Begriff der komplexen Integration	49
§ 2 Geschlossene Integrationswege: $\oint f(z) dz$	54
§ 3 Der Cauchysche Integralsatz	58
§ 4 Der Residuensatz	66
§ 5 Die Cauchyformel	72
Rückschau auf das Kapitel III	75
Test 3	76
Übungsaufgaben zu Kapitel III	78

<i>Kapitel IV: Einige grundlegende Sätze der Funktionentheorie</i>	79
§ 1 Potenz- und Laurentreihenentwicklungssatz	79
§ 2 Einfache und mehrfache Nullstellen	84
§ 3 Gebietstreue und Maximumprinzip	88
§ 4 Der Identitätssatz	91
§ 5 Analytische Fortsetzung	94
Rückschau auf das Kapitel IV	101
Test 4	101
Übungsaufgaben zu Kapitel IV	103
<i>Kapitel V: Der Residuenkalkül</i>	105
§ 1 Pole	105
§ 2 Residuenbestimmung bei Polen	108
§ 3 Integralauswertung mit dem Residuenkalkül	109
§ 4 Pole auf der Kontour?	120
§ 5 Die Kramers-Kronig-Relationen	127
Rückschau auf das Kapitel V	130
Test 5	131
Übungsaufgaben zu Kapitel V	132
Zweiter Teil: Ein Grundkurs über Gewöhnliche Differentialgleichungen	135
<i>Kapitel VI: Einfache Beispiele von Differentialgleichungen</i>	137
§ 1 Was sind gewöhnliche Differentialgleichungen?	137
§ 2 Erste, direkt zugängliche Beispiele	139
§ 3 Exakte Differentialgleichungen und „Integrierender Faktor“	147
§ 4 Einführung neuer Variabler	150
Rückschau auf das Kapitel VI	154
Test 6	155
Übungsaufgaben zu Kapitel VI	156
<i>Kapitel VII: Dynamische Systeme</i>	158
§ 1 Dynamische Systeme	158
§ 2 Vektorfelder und autonome Differentialgleichungssysteme erster Ordnung	163
§ 3 Die Universalität der autonomen Systeme erster Ordnung: Phasenportraits	170
§ 4 Globale Integrierbarkeit	175
§ 5 „Erste Integrale“	179
Rückschau auf das Kapitel VII	183

Test 7	184
Übungsaufgaben zu Kapitel VII	186
<i>Kapitel VIII: Lineare Differentialgleichungen und Systeme</i>	187
§ 1 Linearität	187
§ 2 „Inhomogene“ Gleichungen und Systeme; Variation der Konstanten	192
§ 3 Lineare Systeme erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten	196
§ 4 Lineare Gleichungen n -ter Ordnung mit konstanten Koeffizienten	209
Rückschau auf das Kapitel VIII	212
Test 8	213
Übungsaufgaben zu Kapitel VIII	215
<i>Kapitel IX: Rand- und Eigenwert-Aufgaben</i>	217
§ 1 Randwertaufgaben	217
§ 2 Eigenwertaufgaben	223
§ 3 Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgaben	229
§ 4 Resultate über Sturm-Liouvillesche Eigenwertaufgaben	236
§ 5 Weshalb die Eigenfunktionen oszillieren	240
Rückschau auf das Kapitel IX	248
Test 9	249
Übungsaufgaben zu Kapitel IX	251
<i>Kapitel X: Greensche Funktionen und die δ-„Funktion“</i>	252
§ 1 Was soll eine Greensche Funktion leisten?	252
§ 2 Der „aktive Knick“ einer Greenschen Funktion	255
§ 3 Bauanleitung	259
§ 4 Greensche Funktionen bei konstanten Koeffizienten und für selbstadjungierte Randwertaufgaben	262
§ 5 Die Greensche Funktion als „Einflußfunktion“	265
§ 6 Die Diracsche Deltafunktion	269
Rückschau auf das Kapitel X	277
Test 10	278
Übungsaufgaben zu Kapitel X	279
Dritter Teil: Spezielle Funktionen der Mathematischen Physik. Eine Einführung ..	281
<i>Kapitel XI: Gleichungen aus Separationsansätzen</i>	283
§ 1 Das Abseparieren der Zeit	283
§ 2 Koordinatenwahl und Laplaceoperator	285

§ 3 Separation in Zylinder- bzw. Polarkoordinaten	291
§ 4 Separation in Kugelkoordinaten	295
Rückschau auf das Kapitel XI	300
Test 11	301
Übungsaufgaben zu Kapitel XI	302
<i>Kapitel XII: Differentialgleichungen in der komplexen Ebene</i>	304
§ 1 Wozu „komplexe“ Differentialgleichungen?	304
§ 2 Differentialgleichungen ohne Singularitäten über einer Kreisscheibe	306
§ 3 Differentialgleichungen mit isolierten Singularitäten; Eigenwerte der Monodromieabbildung	309
§ 4 Regulär-singuläre Punkte	317
§ 5 Die hypergeometrische Differentialgleichung	321
Rückschau auf das Kapitel XII	331
Test 12	332
Übungsaufgaben zu Kapitel XII	334
<i>Kapitel XIII: Kugelfunktionen</i>	335
§ 1 Die allgemeine Legendresche Differentialgleichung	335
§ 2 Die Legendre-Polynome $P_l(z)$	339
§ 3 Kleine Abschweifung vom Kugelfunktionenthema: Orthogonalpolynome	343
§ 4 Die „zugeordneten“ Legendrefunktionen $P_l^m(z)$	346
§ 5 Kugelflächenfunktionen	349
§ 6 Entwicklung harmonischer Funktionen nach „räumlichen Kugelfunktionen“; erzeugende Funktion für die Legendre-Polynome	354
Rückschau auf das Kapitel XIII	359
Test 13	360
Übungsaufgaben zu Kapitel XIII	361
<i>Kapitel XIV: Zylinderfunktionen</i>	363
§ 1 Die Lösungsstruktur der Besselschen Differentialgleichung	363
§ 2 Bessel-, Neumann- und Hankelfunktionen	366
§ 3 Erzeugende Funktion und Integraldarstellungen	370
§ 4 Asymptotisches Verhalten von Integralen $I(r) = \int_a^b g(t) e^{rf(t)} dt$ für $r \rightarrow +\infty$...	375
§ 5 Die Sattelpunktmethode und das asymptotische Verhalten der Zylinderfunktionen	383
§ 6 Entwicklung einer dreidimensionalen ebenen Welle nach Kugelfunktionen	391
Rückschau auf das Kapitel XIV	398
Test 14	399
Übungsaufgaben zu Kapitel XIV	401

<i>Einige Literaturhinweise</i>	402
<i>Literaturverzeichnis</i>	404
<i>Antworten zu den Tests</i>	405
<i>Hinweise zu den Übungsaufgaben</i>	406
<i>Register</i>	415