

# Optimierungsmethoden

Einführung in die Unternehmensforschung für  
Wirtschaftswissenschaftler



# Physica-Paperback

---

Basler, Herbert  
**Aufgabensammlung zur statistischen  
Methodenlehre und Wahrscheinlichkeits-  
rechnung**  
3. erweiterte Aufl. 1984. 147 S.

Basler, Herbert  
**Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeits-  
rechnung und statistischen Methodenlehre**  
9. wesentl. erweiterte Aufl. 1986. 248 S.

Eilenberger, Guido  
**Finanzierungsentscheidungen multinatio-  
naler Unternehmungen**  
2. vollständig überarbeitete und erweiterte  
Aufl. 1987. 356 S.

Ferschl, Franz  
**Deskriptive Statistik**  
3. korr. Aufl. 1985. 308 S.

Hax, Herbert  
**Investitionstheorie**  
5. bearbeitete Aufl. 1985. 208 S.

Huch, Burkard  
**Einführung in die Kostenrechnung**  
8. Aufl. 1986. 229 S.

Kistner, Klaus-Peter  
**Produktions- und Kostentheorie**  
1981. 261 S.

Kistner, Klaus-Peter  
**Optimierungsmethoden**  
Einführung in die Unternehmens-  
forschung für Wirtschaftswissenschaftler  
1988. XII, 288 S.

Koch, Joachim  
**Betriebliches Rechnungswesen**  
1 Buchführung und Bilanzen  
1987. XIII, 340 S.

Möllers, Paul  
**Buchhaltung und Abschluß**  
2. überarbeitete Aufl. 1987. 181 S.

Peemöller, Volker und März, Thomas  
**Sonderbilanzen**  
1986. X, 182 S.

Rapoport, Anatol  
**Mathematische Methoden in den  
Sozialwissenschaften**  
1980. 377 S.

Schmidt, Walter  
**Arbeitswissenschaftliche  
Arbeitsgestaltung**  
1987. 146 S.

Schneeweiß, Hans  
**Ökonometrie**  
1. Nachdruck 1986 der 3. durchgesehenen  
Aufl. 1978. 391 S.

Schneeweiß, Hans und Mittag, Hans-Joachim  
**Lineare Modelle mit fehlerbehafteten Daten**  
1986. XVIII, 504 S.

Schulte, Karl-Werner  
**Wirtschaftlichkeitsrechnung**  
4. Aufl. 1986. 196 S.

Schultz, Reinhard  
**Einführung in das Personalwesen**  
1981. 226 S.

Seicht, Gerhard  
**Bilanztheorien**  
1982. 195 S.

Stenger, Horst  
**Stichproben**  
1986. XIII, 318 S.

Swoboda, Peter  
**Betriebliche Finanzierung**  
1981. 267 S.

Vogt, Herbert  
**Einführung in die Wirtschaftsmathematik**  
5. verbesserte Aufl. 1985. 250 S.

Vogt, Herbert  
**Aufgaben und Beispiele zur  
Wirtschaftsmathematik**  
1976. 184 S.

Weise, Peter u. a.  
**Neue Mikroökonomie**  
4. Nachdruck 1985 der 1. Aufl. 1979. 291 S.

Klaus-Peter Kistner

---

# Optimierungs- methoden

Einführung in die  
Unternehmensforschung für  
Wirtschaftswissenschaftler

Mit 9 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH

Professor Dr. Klaus-Peter Kistner  
Fakultät für Wirtschaftswissenschaften  
Universität Bielefeld  
Postfach 86 40  
D-4800 Bielefeld 1

ISBN 978-3-7908-0389-1

CIP-Titelaufnahme der Deutschen Bibliothek

Kistner, Klaus-Peter:

Optimierungsmethoden: Einf. in d. Unternehmensforschung  
für Wirtschaftswissenschaftler / Klaus-Peter Kistner. -

Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988

(Physica-Paperback)

ISBN 978-3-7908-0389-1

ISBN 978-3-662-00595-8 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-00595-8

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendungen, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der Fassung vom 24. Juni 1985 zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1988

Ursprünglich erschienen bei Physica-Verlag Heidelberg 1988

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

7120/7130-543210

## Vorwort

Das vorliegende Lehrbuch „Optimierungsmethoden“, das aus meinen Lehrveranstaltungen für das Grund- und Hauptstudium an der Fakultät für Wirtschaftswissenschaften der Universität Bielefeld hervorgegangen ist, wendet sich an Studierende der Wirtschaftswissenschaften. Es soll dieser Zielgruppe einen Überblick über die Möglichkeiten zur Formulierung von Modellen zur Maximierung oder Minimierung gegebener Zielfunktionen unter Berücksichtigung von Beschränkungen und Nichtnegativitätsbedingungen und die Lösung solcher Probleme mit Methoden der Unternehmensforschung geben. Dabei begnügt sich das Buch nicht mit einer bloßen Darstellung von Rechenverfahren, es will diese auch begründen; neben den Optimierungsverfahren werden daher auch die von diesen Verfahren ausgenützten Optimalitätskriterien – wie z. B. Simplextheorem, Preistheorem und Kuhn-Tucker-Bedingungen – hergeleitet und von der reinen Optimierungstechnik unabhängige theoretische Aspekte – wie die Dualitätstheorie und die parametrische Programmierung – dargestellt. Dies scheint mir erforderlich zu sein, um die Vorgehensweise der dargestellten Algorithmen verständlich machen zu können, es findet seine Berechtigung aber auch in der wachsenden Bedeutung dieser Ergebnisse in der volks- und betriebswirtschaftlichen Literatur.

Auf Fragen der Implementierung auf Rechenanlagen und die zur Erhöhung der rechentechnischen Effizienz der Verfahren erforderlichen Modifikationen wird nicht näher eingegangen, weil diese Aspekte eher das Verständnis der vorgestellten Algorithmen und deren theoretischen Hintergründe erschweren.

Entsprechend der angesprochenen Zielgruppe werden nur diejenigen Kenntnisse der klassischen Analysis und der linearen Algebra vorausgesetzt, die üblicherweise in den einschlägigen Lehrveranstaltungen zur Einführung in die Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler vermittelt werden. Diese Rahmenbedingung steht allerdings in einem gewissen Gegensatz zu der inhaltlichen Zielsetzung. Um beides miteinander in Einklang bringen zu können, muß zum einen bei der Auswahl des Stoffes auf relativ einfache Grundansätze zurückgegriffen und auf die Darstellung komplizierter Weiterentwicklungen und neuerer Ansätze verzichtet werden. Zum anderen muß die Darstellung gelegentlich auf die volle mathematische Eleganz verzichten und auf umständlichere, aber elementare Argumente zurückgreifen.

Das Lehrbuch wendet sich an Studenten im Grund- und Hauptstudium; eine Trennung des Stoffes in Grundlagen, die im Grundstudium vermittelt werden, und Weiterentwicklungen, die dem Hauptstudium vorbehalten sind, ist m. E. nicht angemessen. Zwar wird zunächst der Ablauf der Algorithmen im Vordergrund der Ausbildung im Grundstudium stehen, der interessierte Student sollte jedoch bereits in diesem Stadium angeregt werden, sich für die Hintergründe der Verfahren zu interessieren. Eine getrennte Darstellung der theoretischen Hintergründe der Optimierungstheorie für das Hauptstudium scheint mir nicht sinnvoll zu sein, weil diese immer wieder auf die rechentechnischen Grundlagen der Verfahren zurückgreifen müssen. Um beiden Zielgruppen gerecht werden zu können, habe ich mich dazu entschlossen, zu jedem der angesprochenen Problemkreise zunächst eine Einführung zu geben, in der hauptsächlich Algorithmen vorgestellt und deren Vorgehen anhand ausführlicher Rechenbeispiele erläutert werden. Diese einführenden Abschnitte, die sich primär an Studenten im Grundstudium wenden, werden ergänzt durch weiterführende und vertiefende Abschnitte, die sich primär an Studenten im Hauptstudium richten. Diese sind im Inhaltsverzeichnis durch Sterne gekennzeichnet; die einführenden Abschnitte können unabhängig von den fortführenden Abschnitten gelesen werden.

Nachdem mit dem vorliegenden Manuskript eine lange Entwicklung meiner Vorlesungen über Optimierungsmethoden zu einem gewissen Abschluß gekommen ist, verbleibt mir die Aufgabe, allen denen zu danken, die an der Entstehung dieses Buches beteiligt waren und ohne deren Beiträge es nicht zustande gekommen wäre. An erster Stelle möchte ich hier meiner langjährigen Sekretärin, Frau Margret Thomas, danken, die mit großer Geduld immer wieder neue Versionen des Manuskripts geschrieben und Korrekturen und Modifikationen eingebaut hat. Mein Dank gilt aber auch den Bielefelder Studenten, mit denen die Konzeption des Lehrbuchs erprobt wurde und die durch Kritik und Anregungen die vorliegende Fassung maßgeblich geprägt haben. Stellvertretend erwähnt seien hier Herr Diplom-Kaufmann Gerd Naujoks, der während der letzten Semester seines Studiums die Rechenbeispiele überprüft und korrigiert hat, und meine jetzige Mitarbeiterin, Frau Diplom-Kaufmann Marion Switalski, die die vorliegende Fassung des Manuskripts und die Drucklegung betreut hat.

Mein Dank gilt aber auch allen Kollegen, die mich zur Abfassung des Manuskripts ermutigt und mir dabei mit Ratschlägen und Anregungen beigestanden haben. Ich danke insbesondere Herrn Privat-Dozent Dr. Alfred Luhmer, der mich in allen Entwicklungsstufen des Lehrbuches beraten und unterstützt hat, und Herrn Universitätsdozent Dr. Mikuláš Luptáčík, der eine vorläufige Fassung des Manuskripts gelesen und mit seinen Vorschlägen und Anregungen wesentlich zu der endgültigen Fassung beigetragen hat. Ich danke aber auch Herrn Professor Dr. Gustav Feichtinger, Herrn Professor Dr. Adolf Stepan und Herrn Dipl.-Ing. Dr. Ludwig Mochty, denen ich wertvolle Hinweise und Verbesserungsvorschläge verdanke.

Nicht zuletzt möchte ich mich bei meinen akademischen Lehrern, Professor Dr. Horst Albach, Professor Dr. Martin Beckmann und Professor Dr. Wilhelm Krelle, bedanken, die mein Interesse an der Unternehmensforschung geweckt haben und deren Werk die vorliegende Darstellung maßgeblich beeinflußt hat.

Dem Physica-Verlag und seinem Leiter, Herrn Dr. W. Müller, danke ich schließlich für die Aufnahme des Buches in die Reihe Physica-Paperbacks und die verlegerische Betreuung.

Steinhagen, im Januar 1987

# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung .....	1
1.1	Entscheidungsmodelle .....	1
1.2	Typen von Optimierungsmodellen .....	4
1.2.1	Stetige Optimierungsmodelle .....	4
1.2.2	Diskrete Optimierungsmodelle .....	5
1.2.3	Dynamische Optimierungsmodelle .....	6
1.3	Ausgewählte Lehrbücher .....	7
2	Die Lineare Programmierung .....	9
2.1	Formulierung des Problems .....	9
2.2	Das Simplex-Verfahren .....	12
2.2.1	Graphische Veranschaulichung .....	12
2.2.2	Das Simplex-Verfahren beim speziellen Maximumproblem .....	14
2.2.3	Bestimmung einer zulässigen Ausgangslösung .....	20
2.2.4	Sonderfälle beim Simplex-Verfahren .....	24
*	2.3 Die Theorie des Simplex-Verfahrens .....	25
2.3.1	Das Eckentheorem .....	26
2.3.2	Das Simplex-Kriterium .....	32
2.3.3	Formaler Aufbau des Simplex-Tableaus .....	33
2.4	Dualitätstheorie .....	35
2.4.1	Dualität im speziellen Maximum-Problem .....	35
2.4.1.1	Formulierung des Problems .....	35
2.4.1.2	Dualitätssätze .....	37
2.4.1.3	Complementary Slackness und Preistheorem ...	39
2.4.2	Dualität im allgemeinen Fall .....	42
2.4.3	Beispiel .....	45
2.4.4	Die duale Simplex-Methode .....	47
*	2.5 Postoptimale Analysen .....	49
2.5.1	Sensitivitätsanalyse .....	50
2.5.1.1	Sensitivitätsanalyse bei Veränderung der Beschränkungskonstanten .....	50



X	Inhaltsverzeichnis	
	2.5.1.2	Sensitivitätsanalyse bei Veränderung der Zielfunktionskoeffizienten . . . . . 54
	2.5.1.3	Sensitivitätsanalyse bei Veränderung der Koeffizienten der Beschränkungsmatrix . . . . . 56
	2.5.2	Zusätzliche Variablen und Restriktionen . . . . . 56
	2.5.2.1	Zusätzliche Variablen . . . . . 56
	2.5.2.2	Zusätzliche Restriktionen . . . . . 57
	2.5.3	Parametrische Programmierung . . . . . 59
	2.5.3.1	Problemstellung . . . . . 59
	2.5.3.2	Generelle Eigenschaften parametrischer Programme . . . . . 59
	2.5.3.3	Ermittlung der kritischen Punkte bei Variation des Beschränkungsvektors . . . . . 63
*	2.6	Das Dekompositionsprinzip . . . . . 67
	2.6.1	Problemstellung . . . . . 67
	2.6.2	Der Dekompositions-Algorithmus . . . . . 71
	2.6.3	Theorie des Dekompositions-Algorithmus . . . . . 81
*	2.7	Weiterentwicklungen . . . . . 85
	2.7.1	Modifikationen des Simplex-Verfahrens . . . . . 85
	2.7.1.1	Die revidierte Simplex-Methode . . . . . 85
	2.7.1.2	Beschränkte Variablen . . . . . 86
	2.7.1.3	Pivotwahl . . . . . 91
	2.7.2	Polynomiale Algorithmen . . . . . 93
	2.8	Literaturhinweise . . . . . 95
3	Konvexe Programmierung . . . . . 97	
	3.1	Einleitung . . . . . 97
	3.1.1	Konvexe Programme . . . . . 97
	3.1.2	Eigenschaften konvexer Programme . . . . . 100
	3.2	Die Kuhn-Tucker-Bedingungen . . . . . 102
	3.2.1	Problemstellung . . . . . 102
*	3.2.2	Die Sattelpunkt-Bedingungen . . . . . 103
*	3.2.3	Lokale Kuhn-Tucker-Bedingungen . . . . . 108
*	3.2.4	Modifikationen und Verallgemeinerungen . . . . . 110
	3.3	Verfahren der konvexen Programmierung . . . . . 111
	3.3.1	Quadratische Programmierung . . . . . 111
	3.3.1.1	Problemstellung . . . . . 111
	3.3.1.2	Das Verfahren von Wolfe . . . . . 113
	3.3.1.2.1	Das Vorgehen . . . . . 113
*	3.3.1.2.2	Die Konvergenz des Verfahrens . . . . . 116
*	3.3.1.2.3	Die modifizierte Form des Verfahrens von Wolfe . . . . . 121

3.3.2	Schnittebenen-Verfahren der konvexen Programmierung .....	122
3.3.2.1	Das Prinzip der Schnittebenen-Verfahren .....	122
3.3.2.2	Der Kelley-Algorithmus .....	123
*	3.3.2.3 Die Konvergenz des Kelley-Algorithmus .....	130
3.3.3	Separierbare Programme .....	133
3.3.4	Gradienten-Verfahren .....	135
3.3.4.1	Die Methode des steilsten Anstiegs .....	135
3.3.4.2	Das Verfahren der projizierten Gradienten von Rosen .....	137
*	3.3.4.3 Theoretische Grundlagen des Verfahrens von Rosen .....	141
3.4	Literaturhinweise .....	145
4	Ganzzahlige Programmierung .....	147
4.1	Einleitung .....	147
4.1.1	Ganzzahlige Programme .....	147
4.1.2	Beispiele für die Anwendung ganzzahliger linearer Programme .....	149
4.1.2.1	Das Fixkosten-Problem .....	149
4.1.2.2	Reihenfolge-Bedingungen .....	150
4.2	Lösungsverfahren der ganzzahligen linearen Programmierung .....	151
4.2.1	Schnittebenen-Verfahren .....	151
4.2.1.1	Das Fractional Integer-Verfahren von Gomory ..	151
*	4.2.1.2 Die Konvergenz des Algorithmus .....	156
4.2.1.3	Kritik und Modifikation der Schnittebenen-Verfahren .....	158
4.2.2	Kombinatorische Verfahren .....	159
4.2.2.1	Enumeration .....	159
4.2.2.2	Der Balas-Algorithmus .....	161
4.2.2.3	Das Verfahren von Land und Doig .....	171
4.3	Spezielle Probleme der ganzzahligen Programmierung ..	177
4.3.1	Das Transportmodell .....	177
4.3.1.1	Problemstellung .....	177
4.3.1.2	Lösungsverfahren .....	180
*	4.3.1.3 Die Theorie des Transportmodells .....	184
*	4.3.1.4 Stepping-Stone-Methode und Simplex-Verfahren .....	191
4.3.2	Das Assignment-Problem .....	193
4.3.2.1	Das lineare Assignment-Problem .....	193
4.3.2.2	Das quadratische Assignment-Problem .....	193
4.3.3	Das Travelling-Salesman-Problem .....	197

4.3.4	Das Knapsack-Problem .....	198
4.4	Ergebnisse der Komplexitätstheorie .....	198
4.5	Literaturhinweise .....	200
5	Dynamische Programmierung .....	201
5.1	Problemstellung .....	201
5.2	Optimale Rückkopplungssteuerung .....	202
5.2.1	Das Lösungskonzept .....	202
5.2.2	Beispiele .....	204
5.2.2.1	Optimaler Ersatzzeitpunkt einer Maschine .....	204
5.2.2.2	Kürzeste Wege durch ein Netzwerk .....	206
5.3	Die Lösungsstruktur dynamischer Programme .....	208
5.3.1	Das Optimalitätsprinzip .....	208
5.3.2	Lineare Politiken .....	209
5.4	Literaturhinweise .....	211
6	Zusammenfassung .....	212
7	Literaturverzeichnis .....	215
8	Sachverzeichnis .....	219