

The Lecture Notes are intended to report quickly and informally, but on a high level, new developments in mathematical economics and operations research. In addition reports and descriptions of interesting methods for practical application are particularly desirable. The following items are to be published:

1. Preliminary drafts of original papers and monographs
2. Special lectures on a new field, or a classical field from a new point of view
3. Seminar reports
4. Reports from meetings

Out of print manuscripts satisfying the above characterization may also be considered, if they continue to be in demand.

The timeliness of a manuscript is more important than its form, which may be unfinished and preliminary. In certain instances, therefore, proofs may only be outlined, or results may be presented which have been or will also be published elsewhere.

The publication of the "Lecture Notes" Series is intended as a service, in that a commercial publisher, Springer-Verlag, makes house publications of mathematical institutes available to mathematicians on an international scale. By advertising them in scientific journals, listing them in catalogs, further by copyrighting and by sending out review copies, an adequate documentation in scientific libraries is made possible.

#### Manuscripts

Since manuscripts will be reproduced photomechanically, they must be written in clean typewriting. Handwritten formulae are to be filled in with indelible black or red ink. Any corrections should be typed on a separate sheet in the same size and spacing as the manuscript. All corresponding numerals in the text and on the correction sheet should be marked in pencil. Springer-Verlag will then take care of inserting the corrections in their proper places. Should a manuscript or parts thereof have to be retyped, an appropriate indemnification will be paid to the author upon publication of his volume. The authors receive 25 free copies.

Manuscripts written in English, German, or French will be received by Prof. Dr. M. Beckmann, Department of Mathematics, Brown University, Providence, Rhode Island 02912/USA, or Prof. Dr. H. P. Künzi, Institut für Operations Research und elektronische Datenverarbeitung der Universität Zürich, Sumatrastraße 30, 8006 Zürich.

Die Lecture Notes sollen rasch und informell, aber auf hohem Niveau, über neue Entwicklungen der mathematischen Ökonometrie und Unternehmensforschung berichten, wobei insbesondere auch Berichte und Darstellungen der für die praktische Anwendung interessanten Methoden erwünscht sind. Zur Veröffentlichung kommen:

1. Vorläufige Fassungen von Originalarbeiten und Monographien.
2. Spezielle Vorlesungen über ein neues Gebiet oder ein klassisches Gebiet in neuer Betrachtungsweise.
3. Seminararbeiten.
4. Vorträge von Tagungen.

Ferner kommen auch ältere vergriffene spezielle Vorlesungen, Seminare und Berichte in Frage, wenn nach ihnen eine anhaltende Nachfrage besteht.

Die Beiträge dürfen im Interesse einer größeren Aktualität durchaus den Charakter des Unfertigen und Vorläufigen haben. Sie brauchen Beweise unter Umständen nur zu skizzieren und dürfen auch Ergebnisse enthalten, die in ähnlicher Form schon erschienen sind oder später erscheinen sollen.

Die Herausgabe der „Lecture Notes“ Serie durch den Springer-Verlag stellt eine Dienstleistung an die mathematischen Institute dar, indem der Springer-Verlag für ausreichende Lagerhaltung sorgt und einen großen internationalen Kreis von Interessenten erfassen kann. Durch Anzeigen in Fachzeitschriften, Aufnahme in Kataloge und durch Anmeldung zum Copyright sowie durch die Versendung von Besprechungsexemplaren wird eine lückenlose Dokumentation in den wissenschaftlichen Bibliotheken ermöglicht.

# Lecture Notes in Operations Research and Mathematical Economics

Edited by M. Beckmann, Providence and H. P. Künzi, Zürich

4

---

## Einführung in die Methode Branch and Bound

Herausgegeben von F. Weinberg

Unterlagen für einen Kurs des Instituts für Operations Research  
der ETH, Zürich

1968

---



Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York

ISBN 978-3-540-04253-2 ISBN 978-3-662-00234-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-662-00234-6

All rights reserved. No part of this book may be translated or reproduced in any form without written permission from Springer Verlag. © by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1968.  
Library of Congress Catalog Card Number 68-28522. Title No. 3754.

## VORWORT

Es gibt eine grosse Menge von betriebswirtschaftlichen Entscheidungsfragen, die sich mit den nunmehr bereits als herkömmlich geltenden Optimierungsmethoden des Operations Research nicht behandeln lassen, sei es beispielsweise, dass die Zielfunktion und auch einzelne Restriktionen nicht konvex sind, sei es, dass nur ganzzahlige Lösungen toleriert werden, sei es, dass die von einzelnen Variablen angenommenen Zahlenwerte Einfluss auf die Gültigkeit ganzer Restriktionengruppen nehmen.

So wachsen z.B. die Kosten der Lagerhaltung als Sprungfunktion mit der Errichtung jedes zusätzlichen Warenhauses und sie nehmen für jedes bestehende Warenhaus meist konkav mit der Quantität der gelagerten Güter zu. Dieser nicht-konvexe Charakter kann sich in einer Zielfunktion (Kosten-Minimierung) oder in einer Restriktion äussern (Nicht-Ueberschreitung einer Kostenlimite).

Die Anzahl von Warenhäusern ist offenbar eine ganze Zahl, deren Optimum unter Angabe der zugehörigen geographischen Standorte gesucht werden mag.

Die Notwendigkeit der Berücksichtigung ortsgebundener Restriktionen für einzelne Warenhäuser (z.B. Provenienzvorschriften betreffend deren eigene Güterversorgung) ist vom Werte der logischen Variablen abhängig, der angibt, ob ein bestimmtes Warenhaus errichtet werden soll oder nicht.

Es würde nicht schwer fallen, eine lange Liste von derartigen Problemen aufzuzählen, die alle sehr erhebliche finanzielle Bedeutung für eine Unternehmung annehmen. Diese Probleme haben schon immer bestanden; es ist interessant, dass sie in letzter Zeit immer häufiger genannt werden und der Ruf nach ihrer Lösung mit immer grösserer Dringlichkeit ertönt.

Diese Erscheinung ist allerdings erklärbar. Zunächst darf man feststellen, dass das Operations Research sich nach und nach als Disziplin etabliert hat. Die Führungsspitzen von Unternehmungen beginnen sich langsam mit diesem Werkzeug zu befreunden und wünschen mit seiner Hilfe Antwort auf Fragen von hoher Wichtigkeit zu erhalten, die sie bisher nur mühevoll und mit dem unbehaglichen Gefühl von grosser Unsicherheit behandeln konnten. Dies betrifft häufig Politik-Variantenprobleme.

Während Mischungsprobleme, wie sie beispielsweise ins Gebiet der gewöhnlichen linearen Programmierung fallen (z.B. optimale Produktionsmengen-zusammensetzung) mit den klassischen Methoden des Operations Research meist lösbar sind, stellen Politik-Variantenprobleme normalerweise Aufgaben des eingangs erwähnten Typus dar. Nun sind Mischungsprobleme aber naturgemäss meist nicht so kritischer Natur, weil intuitiv gewählte Lösungen oft schon optimumnah ausfallen und sich schlimmstenfalls zu gegebener Zeit korrigieren lassen. Eine bestehende Fabrik kann ohne allzu schwerwiegende Eingriffe ihren Produktionsplan leicht abändern, und die damit verbundenen Kosten sind taktischer Grössenordnung.

Politik-Varianten sind im allgemeinen nicht stetig modifizierbar. Eine Firma, die 10 Fabriken und 20 Warenhäuser betreibt, kann die einzelnen gewählten Standorte nicht adaptiv verschieben. Die Unternehmungsleitung muss sich anlässlich von Reorganisationsmassnahmen oder bei Erweiterungsabsichten für eine bestimmte Verteil-Organisation entscheiden, jegliche Aenderungen sind einschneidender Natur und finanziell von strategischer Dimension.

Im Zuge der immer stärker sich abzeichnenden Kontaktnahme zwischen Management und Operations Research-Fachleuten ist es daher verständlich, dass gerade derartige, vom unternehmerischen Standpunkt aus besonders brennende Probleme in den Vordergrund gerückt werden. Gleichzeitig - und dies ist kein Zufall, denn angewandte Wissenschaft und Praxis stehen seit jeher und auf allen Gebieten in gegenseitiger, anspornender Wechselwirkung, - wurden neue Verfahren entwickelt, die auf Probleme dieser Art zugeschnitten sind.

Diese Verfahren sind noch keineswegs vollkommen und sie führen auch nicht immer zum Ziel; denn je nach der angewandten Methodik ist entweder die Konvergenz oft schlecht oder der Rechenaufwand wächst mit der Dimension des Problems häufig explosionsartig. Das letztere Charakteristikum trifft für kombinatorische Vorgehensweise zu.

Das im folgenden zur Sprache gelangende Branch and Bound-Verfahren kann zu den kombinatorischen Methoden gezählt werden. Im wesentlichen liegt sein Bestreben darin, durch ausgeklügelte Systematik von der normalerweise unübersehbaren Anzahl erlaubter Lösungen so rasch wie möglich ganze Familienzweige als nicht in Frage kommend abzuspalten und auf diese Weise mit oft einfacher Probiertechnik das gesuchte Optimum aufzuspüren.

Branch and Bound ist gegenwärtig in Mode. Es ist nie schlecht, eine vernünftige Mode mitzumachen, denn so bleibt man in lebendigem Kontakt mit der Entwicklung. Ob die hier vorliegende Moderichtung sich als dauerhaft erweisen wird, muss die Zukunft zeigen. Sicherlich darf man baldige Erarbeitung neuer verbesserter Methoden erwarten, sowohl auf dem Gebiete des Branch and Bound als auch auf jenem anderer Techniken, die sich mit den gleichen Aufgabenstellungen befassen. Einstweilen aber reicht der gegenwärtige Stand des Branch and Bound schon aus, um recht viele bedeutsame Aufgaben des Operations Research zu lösen und wertvolle Anregungen für eine weitere Bereicherung des mathematischen Instrumentariums dieser Disziplin zu bieten.

Prof. Dr. Franz Weinberg

Direktor des Instituts für Operations Research  
der ETH

## INHALTSVERZEICHNIS

Einführung in die Methode Branch and Bound	GIANCORRADO ESCHER	1
Das Handelsreisenden-Problem	GIANCORRADO ESCHER	17
Ein Branch and Bound-Algorithmus zur Bestimmung einer exakten Lösung des Maschinenbelegungsplan-Problems für drei Maschinen	ULRICH WEISNER	30
Vertreter-Touren mit zeitlich variabler Dringlichkeit	OTTO MUELLER	40
Ein Algorithmus für ein verallgemeinertes Knapsack-Problem	NILS KYED	59
Zusammenhang zwischen Dynamischer Programmierung und Branch and Bound	PETER KALL	73
Diskussion der Modellwahl am Beispiel des Travelling Salesman-Problems	PIA PFLUGER	88
Verallgemeinerung auf gemischt-ganzzahlige Programmierung	WOLFGANG RUNGALDIER	107
Optimales Rangieren	PETER SCHALTEGGER	118
Optimale Bildung von Nahgüterzügen	JOSEF ACHERMANN	133
Gemeinsame Losgrößenrechnung für Teilevarianten bei deterministischem Bedarf	KLAUS RUTZ	143

## VERZEICHNIS DER AUTOREN

- Josef Achermann, dipl. Math. ETH  
Generaldirektion SBB, Bern, Abteilung Operations Research
- Giancorrado Escher, dipl. Phys. ETH  
Institut für Operations Research der ETH, Zürich
- Dr. Peter Kall, Privatdozent an der Universität Zürich  
FIDES Treuhand-Vereinigung, Zürich, Abteilung Operations Research
- Nils Kyed  
Institut für Operations Research und Elektronische Datenverarbeitung  
der Universität Zürich
- Dr. Otto Müller  
FIDES Treuhand-Vereinigung, Zürich, Abteilung Operations Research
- Dr. Pia Pfluger  
FIDES Treuhand-Vereinigung, Zürich, Abteilung Operations Research
- Dr. Wolfgang Runggaldier  
Institut für Operations Research und Elektronische Datenverarbeitung  
der Universität Zürich
- Klaus Rutz, dipl. Ing. ETH  
Betriebswissenschaftliches Institut der ETH, Zürich
- Peter Schaltegger, lic. Math.  
Institut für Operations Research der ETH, Zürich
- Ulrich Weisner, dipl. Phys. ETH  
Institut für Operations Research der ETH, Zürich

## VORBEMERKUNG

Bei dieser Veröffentlichung handelt es sich um eine Zusammenstellung von Unterlagen für eine vom Institut für Operations Research der ETH gehaltenen Kurs.

Einige der Beiträge folgen ziemlich genau den Gedankengängen bereits publizierter Abhandlungen. Die entsprechenden Literaturangaben gehen aus dem Text hervor.