Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik

In dieser Reihe werden ausgewählte, hervorragende Forschungsarbeiten zum Lernen und Lehren von Mathematik publiziert. Thematisch wird sich eine breite Spanne von rekonstruktiver Grundlagenforschung bis zu konstruktiver Entwicklungsforschung ergeben. Gemeinsames Anliegen der Arbeiten ist ein tiefgreifendes Verständnis insbesondere mathematischer Lehr- und Lernprozesse, auch um diese weiterentwickeln zu können. Die Mitglieder des Institutes sind in diversen Bereichen der Erforschung und Vermittlung mathematischen Wissens tätig und sorgen entsprechend für einen weiten Gegenstandsbereich: von vorschulischen Erfahrungen bis zu Weiterbildungen nach dem Studium.
Diese Reihe ist die Fortführung der „Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik und der Naturwissenschaften".

Weitere Bände in der Reihe http://www.springer.com/series/16272

Katrin Schiffer

Probleme beim Übergang von Arithmetik zu Algebra

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Horst Struve

Springer Spektrum

Katrin Schiffer
Köln, Deutschland

Dissertation der Universität zu Köln, 2018

ISSN 2661-8257 ISSN 2661-8265 (electronic)
Kölner Beiträge zur Didaktik der Mathematik
ISBN 978-3-658-27776-5 ISBN 978-3-658-27777-2 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27777-2

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Für Markus, Jonas und Elias

Geleitwort

Was verstehen Schülerinnen und Schüler unter Mathematik? Nicht nur für die „reine” Mathematikdidaktik, die primär an deskriptiven Befunden interessiert ist, ist dies eine grundlegende Frage sondern auch für die „angewandte” Mathematikdidaktik, die Unterrichtsreihen entwirft. Für verschiedene mathematische Teilgebiete wie Arithmetik, Geometrie, Analysis und Wahrscheinlichkeitsrechnung wurde diese Frage schon untersucht, mit insbesondere folgenden Ergebnissen:

➢ Während Lehrkräfte oft meinen, sie würden eine formal-abstrakte Theorie vermitteln, indem sie diese geschickt veranschaulichen, erwerben Schülerinnen und Schüler im Mathematikunterricht empirisch-gegenständliche Theorien über diese Veranschaulichungsmittel.

➢ Die Auffassungen der Schülerinnen und Schüler sind in der Regel keineswegs defizitär im Sinne von ungenügend für den weiteren Verlauf des Schulunterrichts, sondern sie entsprechen wohlfundierten historischen Auffassungen von Mathematik.

Diese gemeinsam mit Prof. H.J. Burscheid (Universität zu Köln) und Prof. I. Witzke (Universität Siegen) gewonnenen Erkenntnisse sind der Ausgangspunkt der Arbeit von Frau Schiffer. Sie stellt sich die Frage, ob entsprechende Aussagen auf die Algebra übertragbar sind.

Unter *Algebra* wird in dieser Arbeit *elementare Algebra* verstanden, die kurz als *Rechnen mit Unbekannten* charakterisiert werden kann. Sie bezeichnet kein inhaltliches Teilgebiet der Schulmathematik - im Gegensatz zu der abstrakten Algebra der Fachwissenschaft Mathematik, die abstrakte Strukturen wie beispielsweise Gruppen, Körper und Vektorräumen untersucht.

Welche Rolle spielen „Unbekannte”, genauer: Variable in der Fachwissenschaft, der Mathematik? Sie treten bereits ganz am Anfang auf, bei der Aufstellung einer mathematischen Theorie (i.S. der modernen formalistischen Auffassung). Dazu benötigt man eine (logische) Sprache, mit der man eine Mengenlehre und eine Klassenlogik[1] formulieren kann, um auf dieser Basis die Axiome der Theorie formulieren und anschließend Sätze beweisen zu können. Grundlegend für eine logische Sprache sind Variable, „Zeichen ohne fest vereinbarte Bedeutung” (A. Oberschelp). Der Umgang mit Variablen wird in den Regeln der Sprache festgelegt - also vor der Formulierung der Theorie.

Frau Schiffer untersucht, wie sich die Schulalgebra, insbesondere der Umgang mit Variablen, unter der Perspektive, dass Schülerinnen und Schüler empirische (naturwissenschaftliche) Theorien erwerben, darstellt. Das Ergebnis ist: *Algebra wird als Sprache empirischer Theorien eingeführt.*

Frau Schiffer belegt diese Aussage durch die Analyse von zwei Schulbuchwerken. Diese zeigt, dass

[1] Eine instruktive Darstellung findet man in A. Oberschelp: Allgemeine Mengenlehre. Bibliographisches Institut, Mannheim 1994.

- Variable der Schulalgebra keineswegs „Zeichen ohne fest vereinbarte Bedeutung“ sind, sondern für (physikalische) Größen stehen. Sie werden also nicht als sprachliche Ausdrücke *vor* und *unabhängig* von der Formulierung der Theorie eingeführt, sondern *bezeichnen* Objekte der Theorie. - Hierin liegt ein wesentlicher Unterschied zur modernen formalistischen Auffassung von Mathematik.

- Begründungen für Rechengesetze, unter Bezug auf den Bereich der Variablen, die in dem Gesetz vorkommen, gegeben werden - und dies sind empirische Größenbereiche.

- Terme Objekte oder Sachverhalte der Realität denotieren. Die Korrektheit von Termumformungen werden auf diese Sachverhalte zurückgeführt, etwa die Gleichheit von Termen mit Hilfe des Waagemodells im Größenbereich der Gewichte begründet.

Diese Auffassung von Algebra ist keineswegs defizitär, weil sie nicht der modernen formalistischen Auffassung mathematischer Theorien entspricht. Die Tragfähigkeit der rekonstruierten Schülerauffassungen von Algebra weist Frau Schiffer durch eine historische Analyse nach: Auch in der Geschichte der Mathematik findet man eine ähnliche Auffassung von Algebra, beispielweise in der berühmten „Vollständigen Anleitung zur Algebra” von L. Euler, einem Standardwerk der Algebra im 18. Jahrhundert.

Mit ihrer Arbeit trägt Frau Schiffer dazu bei, Probleme des Übergangs von Arithmetik zur Algebra zu identifizieren und zu helfen, diese zu überwinden; etwa durch ein explizites Betonen und damit Ernstnehmen des empirischen Charakters des Schülerwissens.

Horst Struve

Vorwort

Die vorliegende Arbeit ist am Institut für Mathematikdidaktik der Universität zu Köln entstanden und wurde von der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität zu Köln als Dissertation angenommen. Die Arbeit wurde im Rahmen einer Disputation am 20. November 2018 am Institut für Mathematikdidaktik verteidigt. An der mündlichen universitätsoffenen Prüfung nahmen die beiden Gutachter, Herr Prof. Dr. Horst Struve und Herr Prof. Dr. Ingo Witzke, sowie Frau Prof. Dr. Christiane Reiners als Vorsitzende der Prüfungskommission und Herr Dr. Stefan Heilmann als Beisitzer teil.

In der Zeit meiner Promotion haben mich viele Menschen unterstützt und dadurch diese Arbeit erst ermöglicht.

Meinem Doktorvater Prof. Dr. Horst Struve danke ich für die vielen anregenden Gespräche und konstruktiven Ratschläge. Prof. Dr. Horst Struve hat mir bereits in meinem Studium einen erweiterten Zugang zur Mathematikdidaktik eröffnet und mich durch die Verbindung und den gegenseitigen Einfluss von Geschichte, Philosophie und Mathematik für das Fach begeistert. Im Anschluss an mein Studium hat er mir die Möglichkeit gegeben weiter zu lernen und zu forschen und hat mich auf meinem Weg immer verständnisvoll und herzlich betreut.

Prof. Dr. Ingo Witzke danke ich für den regen wissenschaftlichen Austausch, seine Ermutigungen und die Begleitung dieser Arbeit als Prüfer.

Prof. Dr. Christiane Reiners danke ich für ihr Interesse an meiner Arbeit und die sofortige Bereitschaft den Vorsitz der Prüfungskommission zu übernehmen.

Dr. Stefan Heilmann danke ich für das freundliche, kollegiale Verhältnis und seine Tätigkeit als Beisitzer der Prüfungskommission.

Meinen Kollegen und Mitdoktoranden danke ich für den wissenschaftlichen Austausch und die vielen anregenden Diskussionen in Mitarbeiterseminaren, Kolloquien und auf Tagungen.

Besonders danke ich meiner Familie.

Meinen Schwiegereltern Wiltraud und Rolf Schiffer danke ich für ihre familiäre Hilfe, die erhebliche zeitliche Unterstützung und die dabei von ihnen empfundene Selbstverständlichkeit.

Meinen Eltern Steffi und Arno Reimann danke ich für ihren großen Beistand und ihren festen Glauben an mich und meinen Erfolg. Sie haben mich stets ermutigt meinen eigenen Weg zu gehen und mich auf diesem unterstützt und gefördert.

Besonderer Dank gilt meinem Sohn Jonas, der in der Phase der Fertigstellung viele Stunden auf mich verzichten musste. Sein Lachen und seine Fröhlichkeit bereichern mich jeden Tag und zeigen mir die Freude an den kleinen Dingen im Leben.

Der größte Dank gilt meinem Mann Markus, der mich bedingungslos unterstützte, stets ein offenes Ohr hatte und mir mit viel Verständnis den Rücken frei gehalten hat.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis

Tabellenverzeichnis