Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Gerd Fischer

Lernbuch Lineare Algebra und Analytische Geometrie

Das Wichtigste ausführlich für das Lehramts- und Bachelorstudium

4., überarbeitete und erweiterte Auflage

Unter Mitwirkung von Florian Quiring

Springer Spektrum

Gerd Fischer
Fakultät für Mathematik, M 10
Technische Universität München
Garching, Deutschland

ISBN 978-3-658-27342-2 ISBN 978-3-658-27343-9 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-658-27343-9

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch und Kathrin Maurischat

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort zur vierten Auflage

Im Vergleich zur ersten Auflage aus dem Jahr 2010 sind inzwischen einige wichtige Themen als Ergänzungen hinzugekommen, insbesondere

- Neue Beweise für die Gleichheit von Zeilenrang und Spaltenrang einer Matrix
- Dualität von Vektorräumen
- Methode der kleinsten Quadrate
- LR- und QR- Zerlegung
- Singulärwertzerlegung
- Eulersche Winkel
- Trägheitstensoren

Weiter wurde der gesamte Text kritisch durchgesehen und an zahlreichen Stellen überarbeitet. Mein besonderer Dank gilt dabei Boris Springborn für wertvolle Anregungen und Maja Hermann, die mit großer Sorgfalt das Manuskript überprüft und verbessert hat. Schließlich danke ich Ulrike Schmickler-Hirzebruch vom Springer Verlag für ihre engagierte Vorbereitung dieser Neuauflage, sowie aufmerksamen Leserinnen und Lesern für ihre Hinweise auf Unklarheiten und Fehler. Zu derartigen Kommentaren möchte ich auch weiterhin ermuntern.

München und Garching, im Juni 2019 | Gerd Fischer

Vorwort zur ersten Auflage

Die Lineare Algebra ist im 19. Jahrhundert entstanden, zunächst als Teil der Geometrie; sie wurde aber im Laufe des 20. Jahrhunderts zu einem unentbehrlichen Hilfsmittel in allen Teilen der Mathematik. Darüber hinaus benutzen viele andere Wissenschaften – wie beispielsweise Physik, Informatik, Technik und Ökonomie – Methoden der Linearen Algebra. Dem entsprechend ist die Lineare Algebra zusammen mit Aspekten der analytischen Geometrie fest verankert im Curriculum der Studienanfänger.

Die zentralen Themen dieses Buches sind Vektorräume, lineare und bilineare Abbildungen, Determinanten und Eigenwerte, mit ihren Anwendungen auf die Geometrie. Es wird versucht, die elementaren Grundlagen sehr ausführlich darzustellen, illustriert durch zahlreiche im Detail erklärte und durchgerechnete Beispiele, sowie viele Bilder, die helfen sollen, den geometrischen Hintergrund für abstrakte Konzepte aufzuhellen. Daher der Name „Lernbuch“: Es soll Studierenden helfen, als Begleittext zu einer Vorlesung auch zusätzliche Hintergründe und Ergänzungen bereit zu stellen, und so das Verständnis zu vertiefen. Weitergehende interaktive Visualisierungen mit „dynamischer Geometrie“ findet man unter

www.mathe-vital.de

Beim Studium der Mathematik ist es besonders wichtig, die abstrakten Begriffe und technischen Methoden zunächst anschaulich zu motivieren, um ihre Entstehung zu erklären und ihre enorme Wirksamkeit deutlich zu machen. Die Mathematik hat über Jahrtausende eine stetige Entwicklung durchlaufen; was EUKLID um 300 v. Chr. bewiesen hat, ist auch heute noch gültig. Um Studierenden einen besseren Einblick in die Geschichte zu ermöglichen, sind neben historischen Anmerkungen auch zahlreiche grundlegende mathematische Veröffentlichungen der Vergangenheit im Literaturverzeichnis zitiert. Ein Gang in die Bibliothek und ein Blick in die alten Bücher kann ein äußerst spannendes Erlebnis sein!

Kapitel 0 soll den Übergang von der Schule zur Hochschule herstellen und den Einstieg in das Studium der Mathematik erleichtern. Zukünftige Lehrer kann es auch auf den Weg zurück in die Schule vorbereiten, und später dort begleiten. Es wird dabei versucht, dem Leitmotiv von FELIX KLEIN – einer *Elementarmathematik vom höheren Standpunkt* – zu folgen; einem Standpunkt etwas höher als die Mathematik in der Schule, aber nicht über den Wolken. Ziel dieses einführenden Kapitels ist die auf GAUSS zurückgehende systematische Methode der Elimination zur Lösung linearer Gleichungssysteme. Das ist und bleibt das wichtigste Ergebnis der elementaren Linearen Algebra.

In Kapitel 1 wird der in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts begonnene systematische und axiomatische Aufbau der Mathematik skizziert. Das gehört heute zu den Grundlagen aller Teile der Mathematik, muss aber nicht gleich zu Beginn in dieser Ausführlichkeit studiert werden. Als zentrales Projekt wurde der von DEDEKIND begonnene systematische Aufbau des Systems der Zahlen, von den natürlichen bis zu den komplexen Zahlen, aufgenommen. Einschließlich eines technisch anspruchsvolleren Abschnitts über eine Konstruktion des Körpers der reellen Zahlen und die Zusammenhänge mit Dezimalbrüchen.

Kapitel 2 enthält die grundlegenden Dinge der Linearen Algebra, soweit sie ohne Benutzung von Determinanten behandelt werden können. Als Anwendung werden auch lineare Gleichungssysteme noch einmal in allgemeinerem Rahmen beschrieben. Kapitel 3 dient der Beschreibung von Determinanten; dabei wird auch etwas ausführlicher auf die in vielen anderen Zusammenhängen wichtigen Permutationen eingegangen. Damit sind die Vorbereitungen getroffen für den etwas fortgeschritteneren Teil der Linearen Algebra, die Theorie der Eigenwerte in Kapitel 4. Sie führt bis hin zur JORDANschen Normalform, zu deren Verständnis etwas Übung mit all den grundlegenden Techniken der Linearen Algebra nötig ist.

In Kapitel 5 werden schließlich bilineare Abbildungen, sowie im reellen und komplexen Fall metrische Eigenschaften behandelt. Die geometrische Seite davon ist die klassische Theorie der Kegelschnitte und Quadriken, die viele Anwendungen auch in der Physik hat. Leider sind diese spannenden Themen, hoffentlich nur vorübergehend, aus den Lehrplänen der Gymnasien so gut wie verschwunden.

Als Hilfestellung für die Lektüre sind Teile, die man eventuell zunächst überspringen kann, mit einem * markiert. Die Hinweise in eckigen Klammern, etwa [EU], beziehen sich auf das Literaturverzeichnis. Um das Lernen zu erleichtern, sind Inhaltsverzeichnis und Index sehr umfangreich gestaltet.

Dieses „Lernbuch" enthält inhaltlich, aber wesentlich ausführlicher in der Darstellung, die wichtigsten Themen aus den beiden „klassischen" Büchern [FI$_1$] und [FI$_2$]; dort werden darüber hinaus auch weiterführende Dinge wie Dualität, Tensorprodukte und projektive Geometrie behandelt. Viele spannende Anwendungen der Linearen Algebra findet man in [STR].

Trotz aller Sorgfalt bei den Korrekturen des Textes ist es erfahrungsgemäß kaum zu vermeiden, dass noch Druckfehler und Ungenauigkeiten verblieben sind. Daher möchte ich alle Leserinnen und Leser, die fündig geworden sind bitten, mir die kritischen Stellen mitzuteilen, an

gfischer@ma.tum.de

Mein Dank gilt all den Helferinnen und Helfern, die beim Entstehen dieses Buches mitgewirkt haben. In erster Linie meinem langjährigen Mitarbeiter Florian Quiring, dem Meister der Bilder Fabian Biebl, Bernhard Hanke für nützliche Hinweise, sowie Eva Dörfler, Vanessa Krummeck, Matthias Lehner, Jutta Niebauer, Michael Vogt und auch den Studierenden der TU München, die mich mit kritischen Bemerkungen immer wieder zu Verbesserungen und Ergänzungen angeregt haben. Die TUM-School of Education hat die Veröffentlichung mit Mitteln der Deutschen Telekom Stiftung unterstützt. Schließlich danke ich Ulrike Schmickler-Hirzebruch sehr herzlich für ihre stetige Ermutigung, dieses Projekt in Angriff zu nehmen und zügig zu Ende zu bringen.

München, im September 2010 Gerd Fischer

Inhalt

0 Lineare Geometrie im n-dimensionalen reellen Raum **1**

0.1 Der n-dimensionale reelle Raum . . . 1
- 0.1.1 Zahlen . . . 1
- 0.1.2 Der Vektorraum $\mathbb{R}^n$ . . . 7
- 0.1.3 Multiplikation von Vektoren . . . 11

0.2 Geraden . . . 13
- 0.2.1 Ausblick . . . 13
- 0.2.2 Geraden im $\mathbb{R}^n$ . . . 13
- 0.2.3 Geraden in der Ebene . . . 17

0.3 Abstände und Winkel . . . 21
- 0.3.1 Das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ . . . 21
- 0.3.2 Anwendungen in der Elementargeometrie . . . 23
- 0.3.3 Winkel im $\mathbb{R}^n$ . . . 27
- 0.3.4 Senkrechte Vektoren und Abstände . . . 34
- 0.3.5 Die HESSEsche Normalform einer Geradengleichung . . . 36
- 0.3.6 Lineare Unabhängigkeit . . . 39
- 0.3.7 Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ . . . 42
- 0.3.8 Abstand von Geraden . . . 47

0.4 Ebenen . . . 52
- 0.4.1 Ebenen im $\mathbb{R}^n$ . . . 52
- 0.4.2 Ebenen im $\mathbb{R}^3$ . . . 56
- 0.4.3 Abstand eines Punktes von einer Ebene . . . 60
- 0.4.4 Das Spatprodukt . . . 62

0.5 Lineare Gleichungssysteme . . . 65
- 0.5.1 Zwei Geraden in der Ebene . . . 65
- 0.5.2 Beschreibung durch Matrizen . . . 67
- 0.5.3 Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform . . . 68
- 0.5.4 Das GAUSSsche Eliminationsverfahren . . . 75
- 0.5.5 Wahl der Pivots und Rundungsfehler . . . 78

1 Grundlagen **83**
1.1 Mengen, Relationen, Abbildungen . . . 83
1.1.1 Mengen und Teilmengen . . . 83
1.1.2 Operationen mit Mengen . . . 85
1.1.3 Abbildungen . . . 87
1.1.4 Abzählbare Mengen* . . . 91
1.1.5 Äquivalenzrelationen* . . . 95
1.2 Halbgruppen und Gruppen . . . 100
1.2.1 Die natürlichen Zahlen* . . . 100
1.2.2 Verknüpfungen und Halbgruppen . . . 105
1.2.3 Gruppen . . . 107
1.2.4 Die ganzen Zahlen als additive Gruppe* . . . 111
1.2.5 Untergruppen und Homomorphismen . . . 114
1.3 Ringe und Körper . . . 117
1.3.1 Die ganzen Zahlen als Ring* . . . 117
1.3.2 Der Körper der rationalen Zahlen . . . 121
1.3.3 Dezimalbruchentwicklung rationaler Zahlen* . . . 129
1.3.4 Konstruktion der reellen Zahlen* . . . 133
1.3.5 Reelle Zahlen als Dezimalbrüche* . . . 141
1.3.6 Komplexe Zahlen . . . 145
1.3.7 Endliche Körper* . . . 152
1.3.8 Rückblick und Ausblick . . . 158
1.4 Polynome* . . . 160
1.4.1 Polynome und Polynomfunktionen . . . 160
1.4.2 Der Ring der Polynome . . . 161
1.4.3 Division mit Rest . . . 163
1.4.4 Nullstellen und Werte von Polynomen . . . 165
1.4.5 Eine Vorzeichenregel für reelle Polynome . . . 169
1.4.6 Der Fundamentalsatz der Algebra . . . 171

2 Vektorräume und lineare Abbildungen **177**
2.1 Grundlagen . . . 178
2.1.1 Vektorräume . . . 178
2.1.2 Untervektorräume . . . 181
2.1.3 Operationen mit Untervektorräumen . . . 182
2.1.4 Lineare Unabhängigkeit . . . 185
2.2 Basis und Dimension . . . 192
2.2.1 Erzeugendensysteme und Basen . . . 192
2.2.2 Dimension eines Vektorraums . . . 195
2.2.3 Charakterisierungen einer Basis . . . 200
2.2.4 Praktische Verfahren zur Bestimmung einer Basis . . . 203
2.2.5 Summen und direkte Summen . . . 207

2.3 Lineare Abbildungen . . . 215
2.3.1 Definitionen und Beispiele . . . 215
2.3.2 Elementare Eigenschaften linearer Abbildungen . . . 219
2.3.3 Spezielle lineare Abbildungen . . . 223
2.3.4 Eine Dimensionsformel für lineare Abbildungen . . . 227
2.3.5 Lineare Gleichungssysteme und der Rang einer Matrix . . . 229
2.3.6 Quotientenvektorräume* . . . 240
2.4 Lineare Abbildungen und Matrizen . . . 246
2.4.1 Erzeugung linearer Abbildungen . . . 246
2.4.2 Die darstellende Matrix einer linearen Abbildung . . . 248
2.4.3 Multiplikation von Matrizen . . . 253
2.4.4 Rechenregeln für Matrizen . . . 258
2.4.5 Die allgemeine lineare Gruppe . . . 261
2.4.6 Elementarmatrizen . . . 264
2.4.7 Lineare Gleichungssysteme und Elementarmatrizen* . . . 271
2.4.8 Die LR-Zerlegung* . . . 272
2.4.9 Dualität* . . . 275
2.5 Transformationen . . . 282
2.5.1 Basistransformationen und Koordinatentransformationen . . . 282
2.5.2 Transformationsformel für lineare Abbildungen . . . 285
2.5.3 Eine Normalform für darstellende Matrizen . . . 287

3 Determinanten 291
3.1 Motivation . . . 291
3.1.1 Lineare Gleichungssysteme . . . 291
3.1.2 Flächeninhalt und Orientierung . . . 292
3.2 Berechnung von Determinanten . . . 297
3.2.1 Axiome für Determinanten . . . 297
3.2.2 Weitere Eigenschaften der Determinante . . . 300
3.2.3 Permutationen . . . 308
3.2.4 Die alternierende Gruppe . . . 314
3.2.5 Existenz und Eindeutigkeit . . . 315
3.3 Minoren . . . 322
3.3.1 Die komplementäre Matrix . . . 322
3.3.2 LAPLACE-Entwicklung . . . 324
3.3.3 Die CRAMERsche Regel . . . 325

4 Eigenwerte 327
4.1 Grundbegriffe . . . 327
4.1.1 Eigenwerte und Eigenvektoren . . . 327
4.1.2 Endomorphismen des $\mathbb{R}^2$ * . . . 330
4.1.3 Differentialgleichungen* . . . 332
4.1.4 Das charakteristische Polynom . . . 337
4.1.5 Bestimmung von Eigenwerten ohne Determinanten* . . . 343

4.2 Diagonalisierung und Trigonalisierung . . . 345
4.2.1 Diagonalisierbarkeit . . . 345
4.2.2 Geometrische und algebraische Vielfachheit . . . 347
4.2.3 Rechenverfahren zur Diagonalisierung . . . 351
4.2.4 Trigonalisierung* . . . 353
4.2.5 Zerlegung in Haupträume* . . . 359
4.2.6 Nilpotente Endomorphismen* . . . 365
4.2.7 Die JORDANsche Normalform* . . . 372
4.2.8 Polynome von Matrizen* . . . 374
4.2.9 Fast-Trigonalisierung von reellen Matrizen* . . . 381
4.2.10 Gedämpfte Schwingungen* . . . 384

5 Bilineare Algebra und Geometrie 389
5.1 Kegelschnitte* . . . 389
5.1.1 Die Gleichungen der ebenen Schnitte eines Kreiskegels* . . . 389
5.1.2 Geometrische Eigenschaften der Kegelschnitte* . . . 392
5.1.3 Kegelschnitte durch vorgegebene Punkte* . . . 396
5.1.4 Pol und Polare* . . . 403
5.2 Bilinearformen . . . 406
5.2.1 Definitionen und darstellende Matrix . . . 406
5.2.2 Transformationsformel für darstellende Matrizen . . . 409
5.2.3 Entartung und Rang einer Bilinearform . . . 410
5.2.4 Diagonalisierung einer symmetrischen Bilinearform . . . 411
5.2.5 Das Trägheitsgesetz von SYLVESTER* . . . 416
5.2.6 Exkurs über affine Geometrie* . . . 419
5.2.7 Quadriken* . . . 423
5.3 Euklidische und unitäre Vektorräume . . . 435
5.3.1 Hermitesche Formen . . . 435
5.3.2 Definitheit . . . 436
5.3.3 Orthogonalität . . . 444
5.3.4 QR-Zerlegung und Methode der kleinsten Quadrate* . . . 451
5.3.5 Orthogonale und unitäre Endomorphismen . . . 456
5.3.6 Die Gruppe SO(3)* . . . 463
5.3.7 Selbstadjungierte Endomorphismen . . . 470
5.3.8 Die Singulärwert-Zerlegung* . . . 475
5.3.9 Hauptachsentransformation von Quadriken* . . . 478
5.3.10 Der Trägheitstensor* . . . 488
5.3.11 Ausblick . . . 496

Literaturverzeichnis 499

Index 501

Symbolverzeichnis 507