
Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik

Reihe herausgegeben von

Gilbert Greefrath, Münster, Deutschland

Hans-Stefan Siller, Würzburg, Deutschland

Stanislaw Schukajlow, Münster, Deutschland

In der Reihe werden theoretische und empirische Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik – von der vorschulischen Bildung bis zur Hochschule – publiziert. Dabei kann eine Vernetzung innerhalb der Mathematikdidaktik sowie mit den Bezugsdisziplinen einschließlich der Bildungsforschung durch eine integrative Forschungsmethodik zum Ausdruck gebracht werden. Die Reihe leistet so einen Beitrag zur theoretischen, strukturellen und empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik im Zusammenhang mit der Qualifizierung von wissenschaftlichem Nachwuchs.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/15969>

Sabine Elter

Zum Einfluss von Simulationen auf das funktionale Denken

Am Beispiel von
Mathematisierungssituationen
im MATHEMATIK-Labor

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Hans-Georg Weigand

 Springer Spektrum

Sabine Elter
Julius-Maximilians-Universität Würzburg
Würzburg, Deutschland

Dissertation, Julius-Maximilians-Universität Würzburg, Fakultät für Mathematik und Informatik, 2018, u.d.T.: Sabine Baum, Funktionales Denken in Mathematisierungssituationen. Zum Einfluss von Simulationen im MATHEMATIK-Labor.

Erstgutachter: Prof. Dr. Hans-Georg Weigand
Zweitgutachterin: Prof. Dr. Katja Lengnink
Tag der Prüfung: 17.12.2018

ISSN 2523-8604 ISSN 2523-8612 (electronic)
Studien zur theoretischen und empirischen Forschung in der Mathematikdidaktik
ISBN 978-3-658-27203-6 ISBN 978-3-658-27204-3 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-27204-3>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Diese Arbeit verbindet ein klassisches Ziel des Mathematikunterrichts, die Entwicklung des funktionalen Denkens, mit einem sehr aktuellen und gegenwärtig vieldiskutierten Thema, dem Arbeiten in einem Mathematik-Lehr-Lern-Labor für Schülerinnen und Schüler. Lehr-Lern-Labore sind Lernumgebungen, die in festen Räumen mit dem Ziel entwickelt und eingerichtet wurden, Schülerinnen und Schülern eine experimentelle und selbsttätige Auseinandersetzung mit und eine mathematische Durchdringung von Phänomenen zu ermöglichen. Das Mathematik-Labor an der Universität Würzburg ist ein außerschulischer Lernort mit vorstrukturierten regelmäßig einsetzbaren Lernumgebungen in festen Räumen, in denen Schülerinnen und Schüler unter expliziter Zielsetzung selbstständig, handlungsorientiert und experimentell mathematische Grundlagen und Zusammenhänge an Phänomenen in einem begrenzten Zeitrahmen entdecken, erarbeiten und durchdringen können, ohne dabei dem für den Lernort Schule typischen Leistungsdruck zu unterliegen.

Schülerinnen und Schüler sollen sich mit Mathematik auseinandersetzen und Phänomene mathematisch durchdringen. Es geht also um selbsttätiges mathematisches Arbeiten. Schülerlabore heben sich deshalb von Science Centern ab, wie etwa dem Mathematikum in Gießen¹, in denen primär Erlebnisse ermöglicht, eine positive Einstellung zur Mathematik vermittelt, Aufmerksamkeit erregt sowie zum Staunen und Wundern angeregt werden soll. Dabei wird durchaus auch Wissen vermittelt, es werden aber vor allem die Sinne angesprochen und Emotionen geweckt. Das Lernen, das dabei stattfindet, ist weitgehend informell, also nicht im Hinblick auf klar umrissene Inhalts- und/oder Prozessziele vorstrukturiert. Im Mathematik-Labor soll dagegen zielgerichtet gearbeitet werden. Die vorgegebenen Ziele spiegeln sich in den jeweiligen Lernumgebungen wider, die daraufhin konzipiert sind, Schülerinnen und Schülern durch Arbeitsaufträge, Medien, Materialien und Hilfestellungen das selbständige Erreichen dieser Ziele zu ermöglichen.

In Würzburg wurde im Jahr 2004 das „Drei-Phasen-Labor Mathematik: Experimentieren – Modellieren – Simulieren“ gegründet (vgl. www.mathematik-labor.org). Lehramtsstudierende entwickelten im Rahmen von Examensarbeiten Stationen für das Labor, an denen Schülerinnen und Schüler ab der 10. Klasse im Rahmen von ca. drei Stunden arbeiten sollen. Themenbereiche sind etwa „Zackiges am Fahrrad“, „Bagger, Kran & Co“, „Gleichdicks“, „Ellipsen und Parabeln“, „Spiegel“,

¹www.mathematikum.de

„Regenbogen“ oder „Scheibenwischer“. Aus diesen Anfängen ist mittlerweile ein Mathematik- Labor geworden, das in ein mathematisches, informatisches und naturwissenschaftliches Lehr- Lern-Labor eingebunden ist².

Die Faszination des Naturphänomens Regenbogen war für Sabine Elter der Ausgangspunkt, um eine entsprechende Station im Würzburger Mathematiklabor selbst zu entwickeln, bei der Schülerinnen und Schüler anhand von Realmodellen und Computersimulationen mathematische Modelle kennen lernen, die dieses Phänomen erklären und es mit dem schulischen Mathematikunterricht verzahnen. Sabine Elter hat in ihrer Arbeit neben der Station Regenbogen noch die Stationen Scheibenwischer und Seifenhäute im Hinblick auf die Entwicklung funktionalen Denkens untersucht. Sie hat die Stationen nach theoretischen Grundsätzen entwickelt bzw. weiterentwickelt, hat Schülerinnen und Schüler bei ihrer Arbeit im Mathematik-Labor beobachtet und analysiert, und sie hat schließlich die Arbeitsweisen von Schülern in ein Kategorienschema eingeordnet.

Sabine Elter greift dabei die Arbeiten von H.-J. Vollrath zu diesem Thema auf und erläutert die verschiedenen Aspekte des funktionalen Denkens anhand unterschiedlicher Darstellungen im Rahmen von Computersimulationen. Sie geht dabei insbesondere auf die Arbeitsweisen der Schülerinnen und Schüler ein, die beim Durchlaufen der Stationen im Mathematik-Labor auftreten, wie etwa das Interpretieren von Darstellungen, Darstellungswechsel oder Mathematisieren mit Funktionen. Die Aspekte des funktionalen Denkens setzt Sabine Elter dann in Beziehung zu „Übersetzungsprozessen“ bei Mathematisierungen (vom realen zum mathematischen Modell und umgekehrt). Das Ergebnis ist ein zweidimensionales Beschreibungsmodell zum funktionalen Denken in Mathematisierungssituationen.

Mit dieser Arbeit zeigt Sabine Elter nicht nur wie im Mathematik-Labor das funktionale Denken entwickelt wird oder werden kann, sie gibt auch Hinweise zur Gestaltung von Arbeitsweisen von Schülerinnen und Schülern in Lehr-Lern-Laboren überhaupt, und sie gibt Teillösungen zu aktuellen Forschungsfragen im Rahmen des Arbeitens in Lehr-Lern-Laboren. Die Ergebnisse dieser Arbeit weisen im Hinblick auf den Umgang mit Veränderungen, insbesondere bzgl. des Arbeitens mit Schiebereglern in Computerprogrammen, sowie den von Sabine Elter dargestellten oder entdeckten zahlreichen Strategien des Simulierens weit über das Arbeiten im Mathematik-Labor hinaus und haben ihre Bedeutung beim Arbeiten mit digitalen Mathematikwerkzeugen insgesamt.

Würzburg, 10.04.2019
Prof. Dr. Hans-Georg Weigand
Universität Würzburg

²vgl. www.mind.uni-wuerzburg.de/lehr_lern_labor

Danksagung

Zuerst gilt mein herzlicher Dank Prof. Dr. Hans-Georg Weigand für die Aufnahme in sein Lehrstuhlteam an der Universität Würzburg und die Möglichkeit, mich im Rahmen des MATHEMATIK-Labors zu verwirklichen. Durch das große Vertrauen, das er mir entgegengebracht hat, war es mir möglich, eigene Ideen von phänomen- und handlungsorientierten Lernumgebungen umzusetzen, was den Grundstein für diese Arbeit gelegt hat. Sein inhaltliches und im besonderen Maße motivierendes Feedback hat während der Entstehung dieser Arbeit immer zur richtigen Zeit für einen entscheidenden Anstoß gesorgt. Insbesondere auch für das Angebot, an virtuellen Lehrmaterialien aus der „Ferne“ mitzuarbeiten, möchte ich mich sehr bedanken. Ohne diese Möglichkeit wäre diese Arbeit wahrscheinlich nicht fertig geworden.

Zudem danke ich Prof. Dr. Katja Lengnink für die Bereitschaft, meine Arbeit zu lesen und zu begutachten.

Des Weiteren möchte ich den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern, die mit mir von 2011 bis 2013 am Lehrstuhl für Mathematikdidaktik in Würzburg gearbeitet und/oder geforscht haben, für ihre freundliche Aufnahme ins Team, die konstruktiven Anregungen zu dieser Arbeit und die schöne Zeit in Würzburg danken.

Auch den Doktorandinnen und Doktoranden anderer Fachdidaktiken, die im Rahmen des MIND-Centers für Weiterbildung und Austausch im Bereich der Forschungsmethoden gesorgt haben, gilt mein Dank.

Erwähnt seien an dieser Stelle auch alle Lehrerinnen und Lehrer, Studierende sowie Schülerinnen und Schüler, die mit ihrem Feedback zur Entwicklung des MATHEMATIK-Labors beigetragen haben. Ebenso gilt mein Dank den studentischen Hilfskräften, insbesondere für die Hilfe bei der technischen und organisatorischen Umsetzung des Laborbetriebs. Ein herzliches Dankeschön auch an die Schülerinnen und Schüler, die sich für die Erhebung der Daten zur Verfügung gestellt haben.

Meinem Ehemann Alexander danke ich für seinen Optimismus und den familiären Rückhalt, meinen Kindern für all die glücklichen Momente.

Schließlich gilt mein ganz besonderer Dank meiner Mutter, deren Unterstützung in allen Bereichen so unendlich wertvoll ist.

Inhaltsverzeichnis

Abbildungsverzeichnis	XIII
Einleitung	1
1 Das MATHEMATIK-Labor	7
1.1 Außerschulisches Lernen	7
1.2 Schülerlabore	9
1.3 Forschung zu Schülerlaboren	11
1.4 Konzeption des MATHEMATIK-Labors	15
2 Phänomenorientierung	23
2.1 Außermathematische Phänomene im Mathematikunterricht	23
2.1.1 Das Verhältnis von Mathematik und Realität	24
2.1.2 Das Verhältnis von Mathematikunterricht und Realität	25
2.1.3 Ziele eines phänomenorientierten Mathematikunterrichts	26
2.2 Mathematisierungssituationen	29
2.2.1 Modelle	29
2.2.2 Modellieren, Mathematisieren und Arbeitsprozesse in Mathematisierungssituationen	34
2.3 Phänomene im MATHEMATIK-Labor	38
2.3.1 Regenbogen	38
2.3.2 Scheibenwischer	49
3 Funktionales Denken in Mathematisierungssituationen	67
3.1 Das Konzept des funktionalen Denkens	67
3.1.1 Funktionsbegriff	68
3.1.2 Aspekte des funktionalen Denkens	70
3.1.3 Funktionale Darstellungen und Darstellungswechsel	78
3.1.4 Mathematisieren mit Funktionen	83
3.2 Beschreibungsmodell zum funktionalen Denken in Mathematisierungssituationen	88
3.3 Mathematisieren mit Funktionen im MATHEMATIK-Labor	97
3.3.1 Regenbogen	98
3.3.2 Scheibenwischer	102
4 Simulieren	107
4.1 Simulieren und Simulation: Zum Begriff	107

4.2	Simulieren und Experimentieren	112
4.2.1	Experimentieren in den Naturwissenschaften	113
4.2.2	Klassifikation von Experimentieren und Simulieren	115
4.2.3	Experimentieren in der Mathematik	116
4.2.4	Experimentieren am Computer	121
4.3	Simulieren und funktionales Denken in Mathematisierungssituationen	127
4.3.1	Simulieren und funktionales Denken	127
4.3.2	Simulieren und Arbeitsprozesse in Mathematisierungssituationen	130
4.4	Simulieren im MATHEMATIK-Labor	132
4.4.1	Regenbogen	133
4.4.2	Scheibenwischer	139
5	Empirische Studie: Forschungsfragen	143
5.1	Gliederung der empirischen Studie	143
5.2	Forschungsfragen zu Teil 1 der empirischen Studie	144
5.3	Forschungsfrage zu Teil 2 der empirischen Studie	148
5.4	Forschungsfragen zu Teil 3 der empirischen Studie	149
6	Empirische Studie: Untersuchungsdesign und Auswertungsverfahren	151
6.1	Materialerhebung	151
6.1.1	Stichprobenauswahl	151
6.1.2	Bild- und Tonaufnahmen, Schülerdokumente	152
6.2	Methoden qualitativer Inhaltsanalyse	153
6.2.1	Methodisches Vorgehen in Teil 1 der empirischen Studie	155
6.2.2	Methodisches Vorgehen in Teil 2 der empirischen Studie	156
6.2.3	Methodisches Vorgehen in Teil 3 der empirischen Studie	158
7	Empirische Studie: Auswertung Teil 1	159
7.1	Beispiele zum funktionalen Denken in Mathematisierungssituationen im MATHEMATIK-Labor	159
7.1.1	ZA1: Übersetzungsprozesse ausgehend vom Phänomen unter dem Zuordnungsaspekt	160
7.1.2	ZA3: Übersetzungsprozesse ausgehend von der mathematischen Modellebene unter dem Zuordnungsaspekt	163
7.1.3	ZA2: Arbeiten im mathematischen Modell unter dem Zuordnungsaspekt	165
7.1.4	ÄA1: Übersetzungsprozesse ausgehend vom Phänomen unter dem Änderungsaspekt	167
7.1.5	ÄA3: Übersetzungsprozesse ausgehend von der mathematischen Modellebene unter dem Änderungsaspekt	169
7.1.6	ÄA2: Arbeiten im mathematischen Modell unter dem Änderungsaspekt	173

7.1.7	OA1: Übersetzungsprozesse ausgehend vom Phänomen unter dem Objektaspekt	176
7.1.8	OA3: Übersetzungsprozesse ausgehend vom mathematischen Modell unter dem Objektaspekt	178
7.1.9	OA2: Arbeiten im mathematischen Modell unter dem Objektaspekt	179
7.2	Ergebnisse und Erweiterung des Beschreibungsmodells	181
7.2.1	Arbeitsprozesse unter dem Zuordnungs- und dem Änderungsaspekt	183
7.2.2	Arbeitsprozesse unter dem Änderungs- und Objektaspekt	184
7.2.3	Arbeitsprozesse unter dem Zuordnungs- und Objektaspekt	185
7.2.4	Übersetzungsprozesse nur einer Größe und Übersetzungsprozesse des funktionalen Zusammenhangs	186
8	Empirische Studie: Auswertung Teil 2	189
8.1	Umgang mit dem Schieberegler	190
8.2	Simulationsstrategien	192
8.3	Arten von Simulationsstrategien	200
9	Empirische Studie: Auswertung Teil 3	203
9.1	Simulationsstrategien und Aspekte des funktionalen Denkens in Mathematisierungssituationen	204
9.1.1	Statische Strategien und Zuordnungsaspekt	204
9.1.2	Statische Strategien und Änderungsaspekt	209
9.1.3	Statische Strategien und Objektaspekt	211
9.1.4	Dynamische Strategien und Zuordnungsaspekt	212
9.1.5	Dynamische Strategien und Änderungsaspekt	214
9.1.6	Dynamische Strategien und Objektaspekt	220
9.2	Simulierprozesse	221
9.2.1	Zusammenhänge untersuchen	222
9.2.2	Darstellungswechsel	227
9.2.3	Übersetzungsprozesse	230
9.3	Entwicklungen	233
10	Empirische Studie: Zusammenfassung der Ergebnisse	237
10.1	Funktionales Denken im MATHEMATIK-Labor	237
10.2	Simulationsstrategien	237
10.3	Simulieren und funktionales Denken im MATHEMATIK-Labor	238
10.4	Chancen und Gefahren beim Einsatz der Simulationen für das funktionale Denken in Mathematisierungssituationen	240
11	Diskussion und Ausblick	243
	Anhang	249
	Literaturverzeichnis	251

Abbildungsverzeichnis

1.1	Klassifikation von Lernen nach unterschiedlichen Kriterien. Entnommen aus Baum et al. (2013, S.5).	8
1.2	Laborraum vor dem Besuch einer Schulklasse.	16
2.1	Realmodell 1 - Die Lernenden experimentieren mit einem Laser, den sie auf eine mit Wasser gefüllte Plexiglaswanne richten.	32
2.2	Realmodell 2 - Erweiterung des gegenständlichen Modells (Abb. 2.1) durch Zeichnung des Strahlenverlaufs auf der Wand der Plexiglaswanne und Hinzufügung von Lot und Winkelmarkierungen.	32
2.3	Realmodell 3 - Reales Bild, das die visuell wahrnehmbaren Oberflächenmerkmale des Originals (u. a. konkreter Verlauf des Laserstrahls) repräsentiert.	32
2.4	Mathematisches Modell 1 - Wertetabelle, die verschiedene Werte für den Einfallswinkel α und den Brechungswinkel β enthält.	32
2.5	Mathematisches Modell 2 - Funktionsgraph, der den funktionalen Zusammenhang zwischen Einfallswinkel α und Brechungswinkel β abbildet.	32
2.6	Mathematisches Modell 3 - Funktionsgleichung, die den Zusammenhang zwischen α und β quantifiziert.	32
2.7	Realmodell - Laserstrahl als Funktionsgraph.	33
2.8	Mathematisches Modell - Funktionsgleichung.	33
2.9	Modellierungskreislauf nach Blum und Leiss (2005, S.19).	35
2.10	Arbeitsprozesse in Mathematisierungssituationen.	36
2.11	Laserstrahl, der an einer mit Wasser gefüllten Petrischale gebrochen und reflektiert wird.	40
2.12	Aufteilung des einfallenden Lichtstrahls.	40
2.13	Laserstrahl, der an einer mit Wasser gefüllten verspiegelten Petrischale gebrochen und reflektiert wird.	40
2.14	Einfallshöhe und Umlenkwinkel am Realmodell mit Verspiegelung.	40
2.15	Geometrische Verhältnisse im Realmodell.	41
2.16	Brechung eines Lichtstrahls an der Wasseroberfläche.	43
2.17	Funktionsgraph zur Funktion $h \mapsto \gamma(h)$.	45
2.18	Dispersion im Regentropfen.	46
2.19	Brechungsindizes 20°C warmes Wasser gegen Luft gleicher Temperatur. Entnommen aus http://www.wissenschaft-technik-ethik.de/wasser_eigenschaften.html (9.2), zuletzt abgerufen am 24.4.2018.	47

2.20	Strahlen unterschiedlicher Wellenlänge werden von unterschiedlichen Regentropfen ins Auge des Beobachters zurückgeworfen.	48
2.21	Zollstock, Stift und Tafel als Realmodell für die Umlenkung der Lichtstrahlen an einer Regenfront und den entstehenden Regenbogen. Eine große senkrecht aufgestellte Pappröhre dient als Beobachter. Entnommen aus Baum (2013a, S.27).	48
2.22	Geometrischer Ort aller umgelenkten Strahlen einer Wellenlänge. Entnommen aus Baum (2013a, S.27).	48
2.23	Scheibenwischeranlage aus 1 Kurbelschwinge, 2 Wischarm, 3 Wischblatt, 4 Antriebsmotor (1+4 Antriebseinheit, 2+3 Wischhebel). Entnommen und bearbeitet aus dem Schülerarbeitsmaterial der von Tabernaus entwickelten Laborstation (vgl. Tabernaus 2009, S.113).	49
2.24	Realmodell zum Einarmwischer.	50
2.25	Realmodell zum Parallelwischer.	50
2.26	Realmodell zum Zweiarmwischer.	50
2.27	Gelenkviereck aus Lochstangen.	51
2.28	Anordnung der Stäbe im Gelenkviereck: 1.Fall.	53
2.29	Anordnung der Stäbe im Gelenkviereck: 2.Fall.	53
2.30	Anordnung der Stäbe im Gelenkviereck: 3.Fall.	53
2.31	Konkaves Viereck.	53
2.32	Überschlagenes Viereck.	53
2.33	Totlage 1.	53
2.34	Totlage 2.	53
2.35	Gelenkparallelogramm und Gelenkantiparallelogramm.	57
2.36	Kurbelschwinge und Gelenkparallelogramm des Parallelwischers.	57
2.37	Wischfläche des vereinfachten Einarmwischers.	59
2.38	Wischfläche des Einarmwischers bei gedrehtem Wischblatt.	60
2.39	Verschieben einzelner Segmente.	60
2.40	Einarmwischer mit gedrehtem Wischblatt auf einer Autofrontscheibe.	61
2.41	Wischfläche des Parallelwischers.	62
2.42	Symmetrische Wischfläche eines Parallelwischers.	63
2.43	Berechnung der Wischfläche des Parallelwischers.	64
2.44	Berechnung des Schwenkwinkels δ einer Kurbelschwinge	65
3.1	Ausschnitt aus der Simulation Seifenblasen.	73
3.2	Applet zum Kreisinhalt.	75
3.3	Applet zum Kreisring.	75
3.4	Facetten bzw. Repräsentationen (facets) und Stufen (layers) des Funktionskonzepts nach DeMarois und Tall (1996, S.298).	78
3.5	Senkrecht Lesen einer waagrecht notierten Tabelle.	81
3.6	Waagrecht Lesen einer waagrecht notierten Tabelle.	81

3.7	Kurbelschwinge mit einer Schwingenlänge $c = CD = 3 \text{ cm}$. Die Wischfläche wird rot dargestellt. Sie entsteht als Spur des Wischblattes nach der Betätigung des virtuellen Antriebsmotors in der Simulation (vgl. Abschnitt 4.4.2).	85
3.8	Kurbelschwinge mit einer Schwingenlänge $c = 6 \text{ cm}$, die Kurbellänge $a = AB $ entspricht der in Abbildung 3.7. Die Wischfläche wird blau dargestellt.	85
3.9	Durch Veränderung der Spurfarbe des Wischblattes können verschiedene Wischflächen erzeugt und verglichen werden.	85
3.10	Graphen der Funktionenschar $c \mapsto A_a(c)$	86
3.11	Beschreibungsmodell zum funktionalen Denken in Mathematisierungssituationen.	88
3.12	Lichtstrahl durch den Kreismittelpunkt.	90
3.13	Maximale Einfallshöhe.	90
3.14	Maximale Umlenkung des Lichtstrahls.	90
3.15	Übertragen der Wertepaare in Form von Punkten in ein Koordinatensystem.	91
3.16	Graph zur Funktion $h \mapsto \gamma(h)$	93
3.17	Jedem Laserstrahl auf der Phänomenebene wird ein Punkt im Koordinatensystem zugeordnet, so dass der Graph zu $h \mapsto \gamma(h)$ als Punktspur von $P = (h, \gamma(h))$ entsteht.	94
3.18	Umlenkung eines roten und eines blauen Lichtstrahls im Tropfenmodell	95
3.19	Aus dem Hilfeheft der Station <i>Regenbogenmathematik</i> : Verschiedene qualitative Graphen werden angegeben, von denen nur einer den funktionalen Zusammenhang zwischen Einfallshöhe und Umlenkwinkel wiedergibt.	96
3.20	Funktionsgraph zu (3.3).	100
3.21	Spur der gebrochenen Strahlen in 1000-facher Vergrößerung.	100
3.22	Graph der Funktion (3.4).	101
3.23	Graph der Funktion (3.5) für eine relative Einfallshöhe $\frac{h}{r} = 0.86$	102
3.24	Funktionenschar zu $\frac{h}{r} \mapsto \gamma_\lambda(\frac{h}{r})$	102
3.25	Wischfeld des Einarmwischers ohne gedrehtes Wischblatt und $l_{WA} < \frac{l_{WB}}{2}$	103
3.26	Funktionsgraph zu (3.6) und (3.7).	103
3.27	Funktionenschar zu $c \mapsto \alpha_a(c)$ (3.9).	105
3.28	Funktionenschar zu $a \mapsto \alpha_c(a)$ (3.10).	105
4.1	Dreieck im Thaleskreis.	110
4.2	Klassifikation von Simulieren.	117
4.3	Kategorien zu den Vorgehensweisen beim innermathematischen Experimentieren im Drei-Räume-Modell. Die Abbildung bei Philipp (2013, S.92) wurde hier nachgebildet.	120
4.4	Simulation <i>Brechung</i>	134

4.5	Simulation <i>Dispersion</i>	135
4.6	Simulation <i>Strahlengang im Regentropfen</i> zur Umlenkung des Lichtstrahls im Regentropfenmodell.	136
4.7	Simulation <i>Strahlengang im Regentropfen</i> mit der Spur der Strahlen.	137
4.8	Simulation <i>Strahlengang 2</i> mit graphischer Darstellung des funktionalen Zusammenhangs zwischen Einfallshöhe und Umlenkwinkel.	137
4.9	Simulation <i>Dispersion in einem Regentropfen</i>	138
4.10	Simulation <i>Einarmwischer</i>	139
4.11	Simulation <i>Parallelwischer</i>	140
4.12	Simulation <i>Einarmwischer und Gelenkviereck</i>	141
4.13	Simulation <i>Parallelwischer und Gelenkviereck</i>	141
5.1	Graphische Darstellung des Zusammenhangs zwischen α und β	145
5.2	Antwort Schülerin 1: <i>Ja, weil Nullpunkte übereinstimmen & die Steigung wird bei größerem α geringer (Simulation)</i>	145
5.3	Antwort Schülerin 2: <i>Die Steigung wird bei größerem α geringer. \Rightarrow stärkere Brechung</i>	145
6.1	Fragen zur Station <i>Mathematik im Scheibenwischer</i>	154
6.2	Bildschirmfoto bei der Auswertung der Transkripte mit dem Programm MaxQDA.	156
7.1	Erweitertes Beschreibungsmodell zum funktionalen Denken in Mathematisierungssituationen.	182
8.1	Simulationsstrategien.	202
9.1	Phänomenebene am Bildschirm nach Zeile 33 (Beispielsequenz 36).	216
9.2	Phänomenebene am Bildschirm nach Zeile 38 (Beispielsequenz 36).	216
9.3	Phänomenebene am Bildschirm nach Zeile 40 (Beispielsequenz 36).	216
9.4	Darstellung von zwei Wischflächen zu $(l_{WA}, l_{WB}) = (80 \text{ cm}, 30 \text{ cm})$ (rot) und zu $(l_{WA}, l_{WB}) = (40 \text{ cm}, 60 \text{ cm})$ (blau) in der Simulation <i>Einarmwischer</i>	217
9.5	Schematische Darstellung des Simulierprozesses in Beispielsequenz 36.	222
9.6	Schematische Darstellung der Simulierprozesse nach Muster 1.	224
9.7	Schematische Darstellung der Simulierprozesse nach Muster 2.	225
9.8	Schematische Darstellung der Simulierprozesse nach Muster 3.	226