
Studien zur Hochschuldidaktik und zum Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der Mathematik und in der Statistik

Reihe herausgegeben von
Rolf Biehler, Paderborn, Deutschland

Fachbezogene Hochschuldidaktik und das Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der Schule, Hochschule und in der Mathematiklehrerbildung sind in ihrer Bedeutung wachsende Felder mathematikdidaktischer Forschung. Mathematik und Statistik spielen in zahlreichen Studienfächern eine wesentliche Rolle. Hier stellen sich zahlreiche didaktische Herausforderungen und Forschungsfragen, ebenso wie im Mathematikstudium im engeren Sinne und Mathematikstudium aller Lehrämter. Digitale Medien wie Lern- und Kommunikationsplattformen, multimediale Lehrmaterialien und Werkzeugsoftware (Computeralgebrasysteme, Tabellenkalkulation, dynamische Geometriesoftware, Statistikprogramme) ermöglichen neue Lehr- und Lernformen in der Schule und in der Hochschule. Die Reihe ist offen für Forschungsarbeiten, insbesondere Dissertationen und Habilitationen, aus diesen Gebieten.

Reihe herausgegeben von

Prof. Dr. Rolf Biehler
Institut für Mathematik
Universität Paderborn
Deutschland

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/11974>

Laura Ostsieker

Lernumgebungen für Studierende zur Nacherfindung des Konvergenzbegriffs

Gestaltung und empirische
Untersuchung

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Rolf Biehler



Springer Spektrum

Laura Ostsieker
Bielefeld, Deutschland

Dissertation Universität Paderborn, Fakultät für Elektrotechnik, Informatik und
Mathematik, 2018

Tag der Disputation: 25.06.2018
Erstgutachter: Prof. Dr. Rolf Biehler
Zweitgutachter: Prof. Dr. Reinhard Hochmuth

ISSN 2194-3974 ISSN 2194-3982 (electronic)
Studien zur Hochschuldidaktik und zum Lehren und Lernen mit digitalen Medien in der
Mathematik und in der Statistik
ISBN 978-3-658-27193-0 ISBN 978-3-658-27194-7 (eBook)
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-27194-7>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen National-
bibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 2020

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Geleitwort

Bei der vorliegenden Dissertation von Laura Ostsieker zum Thema *Lernumgebungen für Studierende zur Nacherfindung des Konvergenzbegriffs – Gestaltung und empirische Untersuchung* handelt es sich um eine Studie im Paradigma des Design-Based Research.

Die Arbeit ist im Rahmen des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik (khdm) entstanden, welches Laura Ostsieker von Beginn an mit aufgebaut hat. Ihre Dissertation ist im Bereich der Entwicklung und Untersuchung von Innovationen aus den Bereichen der Lehr- und Lernmethoden angesiedelt.

Konkret wird ein Workshopkonzept zur angeleiteten Nacherfindung des Konvergenzbegriffs für Studierende der Veranstaltung Analysis I entwickelt und beforscht. Diese angeleitete Nacherfindung findet statt, bevor die Studierenden den Begriff in der Vorlesung vermittelt bekommen haben. Das Workshopkonzept beinhaltet Beispiele für als konvergent und nicht-konvergent vorgegebene Folgen, Aufgabenstellungen zur selbständigen Gruppenarbeit und vorbereitete Hilfestellungen. Das Konzept wird von Laura Ostsieker theoriebasiert entwickelt, zweimal durchgeführt und zweimal retrospektiv mit qualitativen Methoden analysiert, um das Workshopkonzept und die dabei verwendete lokale Instruktionstheorie weiter zu optimieren (Kapitel 4, 6, 7). Außerdem wird ein Vorwissenstest und ein Nachtest zum Konvergenzbegriff entwickelt (Kapitel 5), der von allen Studierenden der Analysis-I-Vorlesung bearbeitet wird, um unter anderem zu untersuchen, ob sich hierdurch Effekte der Teilnahme am Workshop nachweisen lassen. Diese Tests werden inklusive aller Items vorgestellt und könnten auch in anderen zukünftigen Studien Anwendungen finden.

Die Arbeit von Laura Ostsieker schließt an internationale Forschung zum Konvergenzbegriff an. Die von ihr vorgestellte Lernumgebung basiert auf einem Vorschlag von Malgorzata Przenioslo für die Einführung des Grenzwerts von Folgen in der Schule, welcher laut Aussage der Autorin mehrfach erprobt, doch nicht durch eine wissenschaftliche Studie begleitet wurde. Diese Lücke wird von Frau Ostsieker geschlossen. Zudem handelt es sich bei der Lernumgebung um eine wesentliche Weiterentwicklung des Vorschlags von Przenioslo und jedes einzelne Element wird detailliert und präzise begründet.

Abgesehen von einer klaren Gliederung und einer enormen Vielfaltigkeit der Studie ist die Methodentransparenz eine große Stärke der vorliegenden Arbeit. Alle Erhebungs- und Analyseinstrumente sowie getroffenen Entscheidungen werden ausführlich offen gelegt. Ebenfalls trifft dies auf die Beschreibung der Kohorten zu. Auch scheut sich Frau Ostsieker nicht, Grenzen ihrer Arbeit zu benennen.

Für die Untersuchung der Studierendendiskussionen während der Nacherfindung der Definition hat Laura Ostsieker ein zweistufiges Analysekonzept entwickelt, das hervorragend geeignet ist, intersubjektive Überprüfbarkeit herzustellen. Dazu werden zunächst hypothetische Erkenntnisverläufe herausgearbeitet, um anschließend die tatsächlichen Erkenntnisverläufe der Studierenden mit diesen vergleichen zu können. Jede beobachtete Gruppe wird zunächst ausführlich interpretiert und strukturiert dokumentiert. Anschließend werden die Forschungsfragen differenziert beantwortet. Dies geschieht basierend auf mehr als zehn Unterfragen, welche im Grunde selbst bereits ein Ergebnis einer ersten empirischen Analyse sind. Dieses Vorgehen ermöglicht es, anschließend die Ergebnisse aller Gruppen zu synthetisieren und zu vergleichen sowie darauf aufbauend das Konzept der Lernumgebung weiterzuentwickeln.

Ohne den Ergebnissen vorweg greifen zu wollen, kann festgehalten werden, dass der didaktische Ansatz der entwickelten Lernumgebung bei den Studierenden sehr erfolgreich ist. Das Konzept kann von anderen Lehrenden in ähnlichen Veranstaltungen eingesetzt werden. Die in dieser Arbeit präsentierten Erkenntnisse könnten außerdem genutzt werden, um zu anderen Themengebieten analoge Lernumgebungen zu entwickeln.

Paderborn, im April 2019

Prof. Dr. Rolf Biehler

Danksagung

Das Verfassen dieser Dissertation wäre ohne die Unterstützung einiger Personen nicht möglich gewesen. Ich möchte mich an dieser Stelle bei allen bedanken, die mich dabei begleitet haben.

An erster Stelle bedanke ich mich bei Prof. Dr. Rolf Biehler für die zahlreichen Gespräche, sein Feedback und die viele Zeit, die er in die Betreuung dieser Arbeit investiert hat. Auch möchte ich mich dafür bedanken, dass er mir die Teilnahme an verschiedenen Tagungen ermöglicht hat.

Prof. Dr. Reinhard Hochmuth danke ich für seine Bereitschaft, das Zweitgutachten zu übernehmen und für einige Diskussionen, die mir wertvolle Anregungen geliefert haben.

Mein Dank gilt der Arbeitsgruppe Biehler, der Fachgruppe „Didaktik der Mathematik“ und den Mitgliedern des Kompetenzzentrums Hochschuldidaktik Mathematik für die angenehme Atmosphäre und zahlreiche Anregungen.

Bei Prof. Dr. Michael Winkler und Prof. Dr. Specovius-Neugebauer bedanke ich mich für die Möglichkeit, in ihren Vorlesungen Studien durchzuführen. Dr. Andreas Seifert danke ich dafür, dass er sich die Zeit genommen hat, mich in die Item-Response-Theorie und den Umgang mit der Software „ConQuest“ einzuführen.

Für das Korrekturlesen dieser Arbeit danke ich Carmen, Jörg, Juliane, Lars, Lea, Lucas, Michael, Michelle und Timo.

Mein besonderer Dank gilt meiner Familie, allen voran meinen Eltern, und meinen Freunden. Ohne eure Unterstützung und euren Glauben an mich wäre diese Arbeit nicht möglich gewesen.

Zusammenfassung

Der Übergang von der Schul- zur Hochschulmathematik stellt für viele Studienanfängerinnen und -anfänger eine große Herausforderung dar. Für Studierende des Bachelorstudiengangs Mathematik und des gymnasialen Lehramts ist eine der ersten universitären Mathematikveranstaltungen die Veranstaltung „Analysis 1“. In dieser ist die Konvergenz von Folgen einer der zentralen Begriffe. Zu diesem bringen die Studierenden oftmals bereits ein *Concept Image* nach Tall und Vinner (1981) mit, das jedoch angepasst werden muss. Ebenso muss eine *Concept Definition* aufgebaut oder angepasst werden. Dies gelingt jedoch nicht allen Studierenden.

In dieser Arbeit werden zum einen die Vorstellungen und Kenntnisse von Mathematikstudierenden und Studierenden des gymnasialen Lehramts Mathematik bezüglich des Begriffs der Folgenkonvergenz untersucht. Dazu werden zwei Testinstrumente entwickelt, von denen eines vor der Behandlung des Themas Konvergenz in der Vorlesung eingesetzt wird und das für den Konvergenzbegriff relevante Vorwissen testet. Das andere Testinstrument wird nach Abschluss des Themas in der Vorlesung eingesetzt, um die Vorstellungen und Fähigkeiten bezüglich des Konvergenzbegriffs zu erheben. Es werden sowohl empirische Ergebnisse zu diesem zweiten Testinstrument präsentiert als auch zum Zusammenhang zwischen dem erhobenen Vorwissen und den Kenntnissen nach der Behandlung in der Vorlesung. Mit Erkenntnissen zu (Fehl-)Vorstellungen von Studierenden einer Analysis-1-Veranstaltung zum Konvergenzbegriff wird ein Beitrag zu dem Stand der mathematikdidaktischen Forschung zum Grenzwertbegriff geleistet.

Zum anderen wird in einer Design-Based-Research-Studie eine Lernumgebung zur angeleiteten Nacherfindung des Konvergenzbegriffs entwickelt. Dazu wird ein

Konzept von Przenioslo (2005) adaptiert und erstmalig durch eine wissenschaftliche Studie begleitet. Basierend auf einer vorgegebenen Menge vielfältiger Beispiele und einem Nicht-Beispiel konvergenter Folgen sollen die Studierenden die Definition der Konvergenz gegen einen Grenzwert nacherfinden. Für mögliche Problemsituationen werden Unterstützungsangebote vorbereitet. Die Nacherfindungsprozesse von Teilnehmerinnen und Teilnehmern von zwei Durchführungen des Workshops werden retrospektiv analysiert. Das Ergebnis dieser Design-Based-Research-Studie ist eine lokale Instruktionstheorie zur angeleiteten Nacherfindung des Konvergenzbegriffs. Außerdem wird mit Hilfe der Testinstrumente ein – wenn auch kleiner – Effekt der Workshopteilnahme nachgewiesen.

Abstract

The transition from school to university mathematics poses a big challenge for many first-year students. For students of the bachelor programme mathematics and students who are studying to become a teacher for secondary school, one of the first mathematics courses at university is „Analysis 1“. In this class the convergence of sequences is an essential concept. The students often already have a *concept image* according to Tall und Vinner (1981), but this has to be modified. Likewise, a *concept definition* has to be built or adapted. However, not every student succeeds in doing this.

In this study, the conceptions and knowledge of mathematics students and pre-service teachers for upper secondary school of the notion of convergence of sequences will be investigated. For this purpose, two test instruments will be developed, one of which will be applied before the treatment of the subject of convergence in class and tests the previous knowledge for the concept of convergence. The other test instrument will be applied after finishing the topic in class in order to collect the conceptions and abilities for the concept of convergence. Empirical results of this second test are presented, and also empirical results concerning the correlation between prior knowledge and knowledge after the treatment in class. With findings about (mis-)conceptions of students of an Analysis-1-class regarding the concept of convergence, a contribution will be made to the state of mathematics education research regarding the concept of limit.

In addition, a learning environment for the guided reinvention of the concept of convergence will be developed in a design-based research study. For this purpose, a concept of Przenioslo (2005) will be adapted and analysed in a scientific study. Based on a given set of diverse examples and one non-example of convergent se-

quences, the students will reinvent the definition of the convergence of a sequence towards a limit. For possible problematic situations remedial help will be prepared. The reinvention processes from two implementations will be analysed retrospectively. The result of this design-based research study is a local instruction theory for the guided reinvention of the notion of convergence. Furthermore, by means of the test results an effect of the attendance at the workshop, although small, will be established.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Einordnung des Projekts	1
1.2	Ausgangslage	2
1.3	Ziele und Forschungsfragen	3
1.4	Überblick	4
2	Theoretischer Hintergrund und Forschungsstand	7
2.1	Begriffsbildung: <i>Concept Image</i> und <i>Concept Definition</i>	7
2.2	Metawissen über Definitionen	10
2.3	Relevantes Vorwissen für den Konvergenzbegriff	15
2.3.1	Unendlichkeit	15
2.3.2	Funktionsbegriff	17
2.3.3	Folgen	20
2.3.4	Variablenbegriff	24
2.3.5	Quantoren	26
2.3.6	Beträge und Ungleichungen	28
2.4	Forschung zu (Fehl-)Vorstellungen zum Konvergenzbegriff	29
2.4.1	Aspekte und Grundvorstellungen zum Grenzwertbegriff ...	30
2.4.2	Die $0, \bar{9}$ -Problematik	33
2.4.3	„Folgliedern kommen dem Grenzwert immer näher“ ...	36
2.4.4	Eingeschränkte Vorstellung von monotonen, konvergenten Folgen	37
2.4.5	„Grenzwert darf nicht angenommen werden“	38
2.4.6	„Grenzwert als Schranke“	39
2.4.7	Alltagssprachliche Bedeutung des Begriffs „Grenzwert“ ..	39
2.5	Konzepte für Interventionen	42

2.5.1	Die Behandlung des Konvergenzbegriffs im Rahmen einer üblichen Analysis-1-Veranstaltung	43
2.5.2	Motivation für alternative Konzepte zur Behandlung des Konvergenzbegriffs	45
2.5.3	Interventionsstudie von Roh	46
2.5.4	Konzept von Oehrtman, Swinyard, Martin et al.	60
2.5.5	Konzept von Przenioslo	67
2.5.6	Zusammenfassung der Konzepte in Bezug auf den zu entwickelnden Workshop	72
3	Forschungsfragen und Anlage der Studie	75
3.1	Forschungsfragen	75
3.2	Design-Based Research	77
3.3	Realistic Mathematics Education und Guided Reinvention	79
3.4	Anlage der Studie	82
4	Hypothetical Learning Trajectory – Version 1	87
4.1	Starting Points und End Points	87
4.1.1	Starting Points des Vorbereitungsworkshops	87
4.1.2	End Points des Vorbereitungsworkshops	89
4.1.3	Starting Points des Nachbereitungsworkshops	90
4.1.4	End Points des Nachbereitungsworkshops	91
4.2	Aktivitäten und hypothetische Erkenntnisverläufe (Version 1)	93
4.2.1	Vorbereitende Aktivitäten	94
4.2.2	Hauptaufgabe	95
4.2.3	Hypothetische Erkenntnisverläufe	99
4.2.4	Geplante Interventionen	105
4.2.5	Abschließende Aktivitäten Vorbereitungsworkshop	117
4.2.6	Aktivitäten Nachbereitungsworkshop	118
5	Quantitative Teilstudie	133
5.1	Item-Response-Theorie als Methode zur Entwicklung und Auswertung von Tests	134
5.1.1	Klassische Testtheorie	134
5.1.2	Item-Response-Theorie	136
5.2	Entwicklung und Skalierung der Testinstrumente	155
5.2.1	„Vortest“ – Entwicklung und Ergebnisse auf Itemebene	155
5.2.2	Skalierung des „Vortests“	190
5.2.3	„Nachttest“ – Entwicklung und Ergebnisse auf Itemebene	205
5.2.4	Skalierung des „Nachttests“	242

5.3	Ergebnisse der quantitativen Teilstudie	260
5.3.1	Ergebnisse in Bezug auf die Kenntnisse und Vorstellungen der Studierenden nach der Behandlung des Themas Konvergenz von Folgen	260
5.3.2	Ergebnisse in Bezug auf den Zusammenhang zwischen dem Vorwissen und den Kenntnissen und Vorstellungen nach der Behandlung des Themas Konvergenz von Folgen .	276
5.4	Ergebnisse in Bezug auf einen möglichen Zusammenhang mit der Workshopteilnahme	287
5.4.1	Skalierung des Subtests	296
5.4.2	Möglicher Effekt des Workshops auf den Subtest	301
6	Retrospektive Analyse der Design-Based-Research-Studie	305
6.1	Auswertungsmethode und Leitfragen zur retrospektiven Analyse .	305
6.2	Erkenntnisverläufe bei der Nacherfindung	310
6.2.1	Gruppe 1: Tatsächlicher Verlauf	310
6.2.2	Gruppe 1: Analyse in Bezug auf die Leitfragen	337
6.2.3	Gruppe 2: Tatsächlicher Verlauf	349
6.2.4	Gruppe 2: Analyse in Bezug auf die Leitfragen	370
6.2.5	Gruppe 3: Tatsächlicher Verlauf	381
6.2.6	Gruppe 3: Analyse in Bezug auf die Leitfragen	416
6.2.7	Gruppe 4: Tatsächlicher Verlauf	429
6.2.8	Gruppe 4: Analyse in Bezug auf die Leitfragen	473
6.3	Ergebnisse in Bezug auf die Leitfragen	489
6.3.1	Ergebnisse zur Berücksichtigung des Vorwissens	490
6.3.2	Ergebnisse aus dem Vergleich der tatsächlichen und der hypothetischen Erkenntnisverläufe	497
6.3.3	Ergebnisse zur Eignung der Lernumgebung für unterschiedliche Studierende	513
6.3.4	Ergebnisse zu den erarbeiteten Definitionen	514
6.4	Zwischenfazit	516
7	Weiterentwicklung des Konzepts	519
7.1	Veränderungen des Designs der Studie	519
7.2	Hypothetical Learning Trajectory – Version 2	521
7.2.1	Starting Points und End Points	521
7.2.2	Aktivitäten und hypothetische Lernverläufe – Version 2 . .	523
7.3	Retrospektive Analyse	556
7.3.1	Auswertungsmethode und Leitfragen zur retrospektiven Analyse	556

7.3.2	Analyse in Bezug auf ausgewählte Leitfragen	558
7.4	Hypothetical Learning Trajectory – Version 3	585
7.4.1	Starting Points und End Points	586
7.4.2	Aktivitäten und hypothetische Lernverläufe – Version 3	588
8	Zusammenfassung und Diskussion	605
8.1	Zusammenfassung der Ergebnisse	605
8.1.1	Analysen der Kenntnisse und Vorstellungen zum Konvergenzbegriff	607
8.1.2	Entwicklung eines theoretisch fundierten Konzepts für einen Workshop zur angeleiteten Nacherfindung der Definition der Folgenkonvergenz	613
8.1.3	Nachweis eines Effekts der Workshopteilnahme auf die Kenntnisse und Vorstellungen zum Konvergenzbegriff	640
8.2	Beitrag dieser Arbeit für die mathematikdidaktische Forschung	641
8.3	Verallgemeinerbarkeit der Ergebnisse	649
8.4	Möglichkeiten für anknüpfende Forschung	650
Literatur		651