

---

# Mathematik zum Studienbeginn

---

Arnfried Kemnitz

# Mathematik zum Studienbeginn

Grundlagenwissen für alle technischen,  
mathematisch-naturwissenschaftlichen  
und wirtschaftswissenschaftlichen  
Studiengänge

12. Auflage

 Springer Spektrum

Arnfried Kemnitz  
Institut Computational Mathematics  
Technische Universität Braunschweig  
Braunschweig, Deutschland

ISBN 978-3-658-26603-5                      ISBN 978-3-658-26604-2 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-26604-2>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2004, 2006, 2009, 2010, 2011, 2014, 2019

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von allgemein beschreibenden Bezeichnungen, Marken, Unternehmensnamen etc. in diesem Werk bedeutet nicht, dass diese frei durch jedermann benutzt werden dürfen. Die Berechtigung zur Benutzung unterliegt, auch ohne gesonderten Hinweis hierzu, den Regeln des Markenrechts. Die Rechte des jeweiligen Zeicheninhabers sind zu beachten.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag, noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Planung/Lektorat: Iris Ruhmann

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

---

## Vorwort zur 12. Auflage

Aktuelle Erfahrungen mit unseren Studierenden zeigen, dass gerade in den ersten Hochschulse mestern bisweilen erhebliche Lücken im mathematischen Grundlagenwissen klaffen. Das Buch will helfen, mitunter persönlich frustrierende mathematische Verständnisschwierigkeiten in der ersten Phase des Studiums zu vermeiden.

Für zahlreiche Zuschriften mit konstruktiven Bemerkungen zu vorhergehenden Auflagen bedanke ich mich. In der 12. Auflage sind einige Textteile überarbeitet und kleinere Verbesserungen vorgenommen worden. Außerdem wurde auf mehrfachen Wunsch ein neues einführendes Kapitel über Gewöhnliche Differentialgleichungen hinzugefügt.

Braunschweig  
April 2019

Arnfried Kemnitz

---

## Vorwort zur 11. Auflage

Auch die aktuellen Studien sowie eigene Lehrerfahrungen an der TU Braunschweig zeigen, dass das mathematische Grundlagenwissen zum Studienbeginn lückenhaft ist. Deshalb wurden für die 11. Auflage die einleitenden Abschnitte über Mengen sowie über Aussageformen und logische Zeichen deutlich erweitert. Außerdem werden in einem neuen Abschnitt grundlegende mathematische Beweisprinzipien erläutert und an verschiedenen Beispielen durchgeführt.

Braunschweig  
März 2013

Arnfried Kemnitz

---

## Vorwort zur 8. Auflage

Für die 8. Auflage wurden verschiedene Textteile überarbeitet und einige inhaltliche Änderungen vorgenommen. Inzwischen sind alle Abbildungen elektronisch neu erstellt und weiter verbessert.

Braunschweig  
Februar 2009

Arnfried Kennitz

---

## Vorwort zur 5. Auflage

Der Text wurde weiter verbessert und an die neue Rechtschreibung angepasst. Dabei wurden an verschiedenen Stellen auch Hinweise und Vorschläge von Lesern aufgegriffen und berücksichtigt.

Der Autor bedankt sich für den sehr guten Zuspruch und die zahlreichen äußerst positiven Reaktionen auf das Buch.

Die Pisa-Studie hat deutlich aufgezeigt, dass ausreichende mathematische Kenntnisse, die für zahlreiche Studiengänge notwendig sind, zum Studienbeginn nicht unbedingt vorausgesetzt werden können. Es ist ein Hauptziel der „Mathematik zum Studienbeginn“, mathematische Verständnis- und Wissenslücken zu schließen, um das Studium gut gerüstet beginnen zu können.

Braunschweig  
Oktober 2002

Arnfried Kemnitz

---

## Vorwort zur 2. Auflage

Nur wenige Monate nach Einführung erscheint eine 2. Auflage dieses Buches. Dies zeigt, dass das Konzept der „Mathematik zum Studienbeginn“ von den Lesern angenommen wird.

Für zahlreiche Zuschriften mit konstruktiven Bemerkungen bedanke ich mich. Einige der Hinweise sind in dieser Auflage berücksichtigt. Auf mehrfachen Wunsch ist das Kapitel über Kombinatorik erweitert worden.

Braunschweig  
Mai 1999

Arnfried Kemnitz



---

## Vorwort zur 1. Auflage

Die Mathematik ist ein wichtiges Grundlagenfach für viele Studiengänge an Fachhochschulen, Technischen Hochschulen und Universitäten. Studierende vieler Fachrichtungen benötigen zum Beginn ihres Studiums gute mathematische Grundkenntnisse.

Dieses Buch wendet sich an Studentinnen und Studenten ingenieurwissenschaftlicher, technischer, wirtschaftswissenschaftlicher und mathematisch-naturwissenschaftlicher Studiengänge sowie an Lehramtsstudierende.

Eine internationale Studie von TIMSS (Third International Mathematics and Science Study), deren Ergebnisse im Frühjahr dieses Jahres veröffentlicht wurden, zum Wissensstand in Mathematik von Schülern der Abschlussklassen in 24 europäischen und außereuropäischen Ländern hat gezeigt, dass die deutschen Schüler nur einen Platz im unteren Mittelfeld einnehmen. Zum Beispiel hatten 30 % der befragten deutschen Schüler Schwierigkeiten beim Auflösen von Gleichungen mit einer Unbekannten.

Auch eigene Lehrerfahrungen in mathematischen Grundvorlesungen an der Technischen Universität Braunschweig zeigen, dass viele Studienbeginnerinnen und Studienbeginner Anfangsschwierigkeiten haben, wofür es eine Reihe unterschiedlicher Ursachen gibt. Viele dieser Schwierigkeiten beruhen darauf, dass der Schulstoff, der an den Hochschulen und Universitäten vorausgesetzt wird, nicht sicher beherrscht wird. Nicht selten führen solche Probleme in den mathematischen Grundlagen sogar zum Studienabbruch.

Das Buch will helfen, solche Anfangsschwierigkeiten zu vermeiden. Es enthält als einen Schwerpunkt einen Überblick des Schulstoffs. Vor allem die für die Mathematikausbildung des Studiums wichtigen Gebiete sind ausführlich und mit vielen Beispielen dargestellt. Die Grundlagen der Mathematik werden systematisch und methodisch aufbereitet präsentiert. Das Buch eignet sich deshalb sehr gut zum Selbststudium für die Vorbereitung auf das Hochschulstudium.

An vielen Hochschulen und Universitäten finden vor Beginn eines Wintersemesters Vorkurse oder Brückenkurse in Mathematik statt. Diese Kurse wenden sich an Studienbeginner aller Mathematik anwendenden Fachrichtungen, vor allem also an die ingenieurwissenschaftlichen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge. In diesen Kursen sollen die für das Studium erforderlichen Kenntnisse in Mathematik aufgefrischt bzw. vervollständigt werden. Dieses Buch

eignet sich wegen der grundlegenden Begriffserläuterungen mit vielen Beispielen sehr gut als Begleitbuch für einen solchen Brückenkurs oder Vorkurs.

Darüber hinaus werden als weiterer Schwerpunkt mathematische Grundlagen für die Anfangssemester behandelt wie Analytische Geometrie und Differential- und Integralrechnung. Deshalb ist das Buch auch als begleitendes Lehr- und Handbuch für die Grundvorlesungen von großem Interesse.

Alle behandelten Themen sind durchgängig verständlich dargestellt. Zahlreiche Beispiele sollen die Kenntnisse vertiefen, viele Abbildungen sollen mathematische Objekte visualisieren und Ergebnisse veranschaulichen. Großer Wert wurde auf Anschaulichkeit gelegt.

Die einzelnen Abschnitte können weitgehend unabhängig voneinander durchgearbeitet werden, Verweise erleichtern das Auffinden notwendiger Begriffserläuterungen.

Das Buch eignet sich auch gut als Nachschlagewerk für die Grundlagen der Mathematik, eben als *das* Mathematikbuch zum Studienbeginn.

Für Studierende ingenieurwissenschaftlicher Fachbereiche sind die im gleichen Verlag erschienenen Werke „Das Techniker Handbuch“ (Hrsg. A. Böge), „Vieweg Handbuch Elektrotechnik“ (Hrsg. W. Böge) sowie „Vieweg Lexikon Technik“ (Hrsg. A. Böge) von großem Interesse, deren Mathematikabschnitte von Dr. F. Kemnitz bzw. vom Autor dieses Buches geschrieben wurden.

Der Autor bedankt sich bei Frau U. Schmickler-Hirzebruch vom Verlag Vieweg für die gute Zusammenarbeit. Mein besonderer Dank gilt meinen Kollegen Dr. W. Oelke, C. Thürmann und Dr. H. Weiß für die Mithilfe bei der Erstellung der reproduktionsfähigen Druckvorlage.

Braunschweig  
August 1998

Arnfried Kemnitz

---

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Arithmetik</b> .....	<b>1</b>
1.1	Mengen .....	1
1.2	Aussageformen und logische Zeichen .....	5
1.3	Einteilung der Zahlen .....	9
1.4	Grundrechenarten .....	12
1.5	Grundlegende Rechenregeln .....	13
1.5.1	Buchstabenrechnen .....	13
1.5.2	Kehrwert, Quersumme .....	13
1.5.3	Teilbarkeitsregeln .....	13
1.5.4	Punktrechnung vor Strichrechnung .....	14
1.5.5	Potenzrechnung vor Punktrechnung .....	14
1.5.6	Grundgesetze der Addition und Multiplikation .....	15
1.5.7	Grundregeln der Klammerrechnung .....	16
1.5.8	Multiplikation mit Klammern .....	17
1.5.9	Indizes, Summenzeichen, Produktzeichen .....	18
1.5.10	Binomische Formeln .....	20
1.5.11	Division mit Klammern .....	20
1.6	Bruchrechnung .....	21
1.6.1	Definitionen .....	21
1.6.2	Erweitern und Kürzen .....	22
1.6.3	Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche .....	23
1.6.4	Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Brüche .....	23
1.6.5	Multiplizieren von Brüchen .....	25
1.6.6	Dividieren von Brüchen .....	26
1.7	Potenz- und Wurzelrechnung .....	27
1.7.1	Definition der Potenz .....	27
1.7.2	Regeln der Potenzrechnung .....	28
1.7.3	Definition der Wurzel .....	32
1.7.4	Regeln der Wurzelrechnung .....	33

1.8	Dezimalzahlen und Dualzahlen . . . . .	39
1.8.1	Dezimalsystem . . . . .	39
1.8.2	Dualsystem . . . . .	40
1.8.3	Runden . . . . .	41
1.9	Logarithmen . . . . .	42
1.9.1	Definition des Logarithmus . . . . .	42
1.9.2	Spezielle Basen . . . . .	43
1.9.3	Regeln der Logarithmenrechnung . . . . .	44
1.9.4	Zusammenhang von Logarithmen mit verschiedenen Basen . . . . .	46
1.9.5	Dekadische Logarithmen . . . . .	47
1.10	Mittelwerte . . . . .	48
1.10.1	Arithmetisches Mittel . . . . .	48
1.10.2	Geometrisches Mittel . . . . .	48
1.10.3	Harmonisches Mittel . . . . .	49
1.10.4	Quadratisches Mittel . . . . .	49
1.11	Ungleichungen . . . . .	50
1.11.1	Definitionen und Rechenregeln . . . . .	50
1.11.2	Absolutbetrag . . . . .	52
1.11.3	Intervalle . . . . .	53
1.12	Komplexe Zahlen . . . . .	55
1.12.1	Algebraische Form . . . . .	55
1.12.2	Trigonometrische Form . . . . .	57
1.12.3	Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen . . . . .	58
1.12.4	Multiplizieren komplexer Zahlen . . . . .	59
1.12.5	Dividieren komplexer Zahlen . . . . .	61
1.12.6	Potenzieren komplexer Zahlen . . . . .	63
1.12.7	Radizieren komplexer Zahlen . . . . .	64
1.12.8	Eulersche Formel . . . . .	67
1.13	Beweisprinzipien . . . . .	68
1.13.1	Direkter Beweis . . . . .	68
1.13.2	Beweis durch Kontraposition . . . . .	68
1.13.3	Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis) . . . . .	69
1.13.4	Beweis mit vollständiger Induktion . . . . .	69
<b>2</b>	<b>Gleichungen</b> . . . . .	<b>73</b>
2.1	Gleichungsarten . . . . .	73
2.2	Äquivalente Umformungen . . . . .	76
2.3	Lineare Gleichungen . . . . .	78
2.4	Proportionen . . . . .	79

2.5	Quadratische Gleichungen . . . . .	82
2.5.1	Definitionen . . . . .	82
2.5.2	Lösungsverfahren . . . . .	82
2.5.3	Satz von Viëta für quadratische Gleichungen . . . . .	88
2.6	Algebraische Gleichungen höheren Grades . . . . .	89
2.6.1	Kubische Gleichungen . . . . .	89
2.6.2	Polynomdivision . . . . .	92
2.6.3	Gleichungen vierten Grades . . . . .	94
2.6.4	Gleichungen $n$ -ten Grades . . . . .	98
2.6.5	Satz von Viëta für Gleichungen $n$ -ten Grades . . . . .	99
2.7	Auf algebraische Gleichungen zurückföhrbare Gleichungen . . . . .	101
2.7.1	Bruchgleichungen . . . . .	101
2.7.2	Wurzelgleichungen . . . . .	103
2.8	Transzendente Gleichungen . . . . .	105
2.8.1	Exponentialgleichungen . . . . .	105
2.8.2	Logarithmische Gleichungen . . . . .	107
2.8.3	Trigonometrische Gleichungen . . . . .	108
2.9	Lineare Gleichungssysteme . . . . .	109
2.9.1	Definitionen . . . . .	109
2.9.2	Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen . . . . .	109
2.9.3	Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen . . . . .	114
2.9.4	Matrizen und Determinanten . . . . .	115
2.10	Lineare Ungleichungen . . . . .	128
2.10.1	Definitionen . . . . .	128
2.10.2	Lineare Ungleichungen mit einer Variablen . . . . .	129
2.10.3	Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen . . . . .	130
2.10.4	Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen . . . . .	132
<b>3</b>	<b>Planimetrie . . . . .</b>	<b>135</b>
3.1	Geraden und Strecken . . . . .	135
3.2	Winkel . . . . .	136
3.3	Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal . . . . .	140
3.4	Projektion . . . . .	143
3.5	Geometrische Örtter . . . . .	144
3.6	Dreiecke . . . . .	145
3.6.1	Allgemeine Dreiecke . . . . .	145
3.6.2	Gleichschenklige Dreiecke . . . . .	147
3.6.3	Gleichseitige Dreiecke . . . . .	148
3.6.4	Rechtwinklige Dreiecke . . . . .	148
3.6.5	Besondere Geraden, Strecken und Kreise . . . . .	149
3.6.6	Flächensätze im rechtwinkligen Dreieck . . . . .	153
3.6.7	Kongruenz von Dreiecken . . . . .	155
3.6.8	Grundkonstruktionen des Dreiecks . . . . .	157

3.7	Vierecke . . . . .	160
3.7.1	Allgemeine Vierecke . . . . .	160
3.7.2	Trapeze . . . . .	162
3.7.3	Parallelogramme . . . . .	163
3.7.4	Rhomben . . . . .	164
3.7.5	Rechtecke . . . . .	164
3.7.6	Quadrate . . . . .	165
3.7.7	Drachen . . . . .	166
3.7.8	Sehnenvierecke . . . . .	166
3.7.9	Tangentenvierecke . . . . .	168
3.8	Reguläre $n$ -Ecke . . . . .	168
3.9	Polygone . . . . .	171
3.10	Kreise . . . . .	172
3.10.1	Definitionen . . . . .	172
3.10.2	Kreissectoren . . . . .	174
3.10.3	Kreissegmente . . . . .	175
3.10.4	Kreise und Geraden . . . . .	176
3.10.5	Winkelsätze am Kreis . . . . .	176
3.10.6	Eigenschaften von Sekanten und Sehnen . . . . .	177
3.10.7	Tangentenkonstruktionen . . . . .	178
3.10.8	Sätze über Sehnen, Sekanten, Tangenten . . . . .	180
3.10.9	Bogenmaß . . . . .	182
3.11	Symmetrie . . . . .	183
3.11.1	Punktsymmetrie . . . . .	183
3.11.2	Achsensymmetrie . . . . .	183
3.12	Ähnlichkeit . . . . .	184
3.12.1	Zentrische Streckung . . . . .	184
3.12.2	Strahlensätze . . . . .	184
3.12.3	Ähnliche Figuren . . . . .	186
3.12.4	Streckenteilungen . . . . .	188
<b>4</b>	<b>Stereometrie . . . . .</b>	<b>191</b>
4.1	Prismen . . . . .	191
4.1.1	Allgemeine Prismen . . . . .	191
4.1.2	Parallelepipid und Würfel . . . . .	192
4.2	Zylinder . . . . .	194
4.2.1	Allgemeine Zylinder . . . . .	194
4.2.2	Gerade Kreiszyylinder . . . . .	195
4.2.3	Hohlzylinder . . . . .	196
4.3	Pyramiden . . . . .	197
4.3.1	Allgemeine Pyramiden . . . . .	197
4.3.2	Gerade quadratische Pyramiden . . . . .	198

4.4	Kegel	199
4.4.1	Allgemeine Kegel	199
4.4.2	Gerade Kreiskegel	200
4.5	Cavalierisches Prinzip	201
4.6	Pyramidenstümpfe und Kegelstümpfe	201
4.6.1	Pyramidenstümpfe	201
4.6.2	Kegelstümpfe	202
4.7	Platonische Körper	204
4.8	Kugeln	206
4.8.1	Definitionen	206
4.8.2	Kugelsegmente	207
4.8.3	Kugelsektoren	208
4.8.4	Kugelschichten	209
<b>5</b>	<b>Funktionen</b>	<b>211</b>
5.1	Definition und Darstellungen von Funktionen	211
5.1.1	Definitionen	211
5.1.2	Funktionsgleichung	212
5.1.3	Graph einer Funktion	214
5.1.4	Wertetabelle einer Funktion	214
5.2	Verhalten von Funktionen	215
5.2.1	Monotone Funktionen	215
5.2.2	Symmetrische Funktionen	217
5.2.3	Beschränkte Funktionen	219
5.2.4	Injektive Funktionen	219
5.2.5	Surjektive Funktionen	220
5.2.6	Bijektive Funktionen	221
5.2.7	Periodische Funktionen	221
5.2.8	Umkehrfunktionen	222
5.2.9	Reelle und komplexe Funktionen	222
5.3	Einteilung der elementaren Funktionen	224
5.4	Ganze rationale Funktionen	228
5.4.1	Konstante Funktionen	228
5.4.2	Lineare Funktionen	229
5.4.3	Quadratische Funktionen	233
5.4.4	Kubische Funktionen	240
5.4.5	Ganze rationale Funktionen $n$ -ten Grades	242
5.4.6	Horner-Schema	245
5.5	Gebrochene rationale Funktionen	246
5.5.1	Nullstellen, Pole, Asymptoten	246
5.5.2	Partialbruchzerlegung	253
5.6	Irrationale Funktionen	257

5.7	Transzendente Funktionen . . . . .	260
5.7.1	Exponentialfunktionen . . . . .	260
5.7.2	Logarithmusfunktionen . . . . .	262
<b>6</b>	<b>Trigonometrie</b> . . . . .	<b>265</b>
6.1	Definition der trigonometrischen Funktionen . . . . .	265
6.2	Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel . . . . .	268
6.3	Beziehungen für den gleichen Winkel . . . . .	270
6.4	Graphen der trigonometrischen Funktionen . . . . .	271
6.5	Reduktionsformeln . . . . .	274
6.6	Additionstheoreme . . . . .	274
6.7	Sinussatz und Kosinussatz . . . . .	278
6.8	Grundaufgaben der Dreiecksberechnung . . . . .	279
6.9	Arkusfunktionen . . . . .	283
<b>7</b>	<b>Analytische Geometrie</b> . . . . .	<b>289</b>
7.1	Koordinatensysteme . . . . .	289
7.1.1	Kartesisches Koordinatensystem der Ebene . . . . .	290
7.1.2	Polarkoordinatensystem der Ebene . . . . .	291
7.1.3	Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten . . . . .	291
7.1.4	Kartesisches Koordinatensystem des Raums . . . . .	294
7.1.5	Kugelkoordinatensystem des Raums . . . . .	295
7.1.6	Zylinderkoordinatensystem des Raums . . . . .	296
7.2	Geraden . . . . .	297
7.2.1	Geradengleichungen . . . . .	297
7.2.2	Abstände . . . . .	303
7.3	Kreise . . . . .	305
7.3.1	Kreisgleichungen . . . . .	305
7.3.2	Berechnung von Kreisen . . . . .	308
7.3.3	Kreis und Gerade . . . . .	309
7.4	Kugeln . . . . .	315
7.5	Kegelschnitte . . . . .	316
7.5.1	Ellipsen . . . . .	319
7.5.2	Hyperbeln . . . . .	323
7.5.3	Parabeln . . . . .	329
7.5.4	Anwendungen . . . . .	334
7.6	Graphisches Lösen von Gleichungen . . . . .	340
7.7	Vektoren . . . . .	345
7.7.1	Definitionen . . . . .	345
7.7.2	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar . . . . .	346
7.7.3	Addition und Subtraktion zweier Vektoren . . . . .	347
7.7.4	Komponentendarstellung von Vektoren in der Ebene . . . . .	348
7.7.5	Komponentendarstellung von Vektoren im Raum . . . . .	350



7.7.6	Skalarprodukt . . . . .	351
7.7.7	Vektorprodukt . . . . .	353
7.7.8	Spatprodukt . . . . .	355
<b>8</b>	<b>Differential- und Integralrechnung . . . . .</b>	<b>357</b>
8.1	Folgen . . . . .	357
8.1.1	Grundbegriffe . . . . .	357
8.1.2	Arithmetische Folgen . . . . .	359
8.1.3	Geometrische Folgen . . . . .	360
8.1.4	Grenzwert einer Folge . . . . .	360
8.1.5	Tabelle einiger Grenzwerte . . . . .	362
8.1.6	Divergente Folgen . . . . .	362
8.2	Reihen . . . . .	364
8.2.1	Definitionen . . . . .	364
8.2.2	Arithmetische Reihen . . . . .	367
8.2.3	Geometrische Reihen . . . . .	368
8.2.4	Harmonische Reihen . . . . .	369
8.2.5	Alternierende Reihen . . . . .	370
8.3	Grenzwerte von Funktionen . . . . .	371
8.3.1	Grenzwert an einer endlichen Stelle . . . . .	371
8.3.2	Einseitige Grenzwerte . . . . .	373
8.3.3	Grenzwert im Unendlichen . . . . .	374
8.3.4	Rechenregeln für Grenzwerte . . . . .	375
8.3.5	Unbestimmte Ausdrücke . . . . .	375
8.3.6	Stetigkeit einer Funktion . . . . .	377
8.3.7	Unstetigkeitsstellen . . . . .	377
8.4	Ableitung einer Funktion . . . . .	379
8.4.1	Definitionen . . . . .	379
8.4.2	Differentiationsregeln . . . . .	381
8.4.3	Höhere Ableitungen . . . . .	386
8.4.4	Ableitungen einiger algebraischer Funktionen . . . . .	387
8.4.5	Ableitungen einiger transzendenter Funktionen . . . . .	387
8.4.6	Sekanten und Tangenten . . . . .	392
8.4.7	Extremwerte von Funktionen . . . . .	393
8.4.8	Krümmungsverhalten von Funktionen . . . . .	394
8.4.9	Wendepunkte von Funktionen . . . . .	396
8.4.10	Kurvendiskussion . . . . .	397
8.4.11	Anwendungsbeispiele . . . . .	399
8.4.12	Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung . . . . .	401
8.5	Integralrechnung . . . . .	404
8.5.1	Unbestimmtes Integral . . . . .	404
8.5.2	Integrationsregeln . . . . .	405

8.5.3	Unbestimmte Integrale einiger algebraischer Funktionen . . . . .	411
8.5.4	Unbestimmte Integrale einiger transzendenter Funktionen . . . . .	412
8.5.5	Bestimmtes Integral . . . . .	413
8.5.6	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung . . . . .	415
8.5.7	Eigenschaften des bestimmten Integrals . . . . .	416
8.5.8	Einige Anwendungen der Integralrechnung . . . . .	418
8.6	Funktionenreihen . . . . .	422
8.6.1	Definitionen . . . . .	423
8.6.2	Potenzreihen . . . . .	425
8.6.3	Fourier-Reihen . . . . .	429
<b>9</b>	<b>Gewöhnliche Differentialgleichungen</b> . . . . .	<b>439</b>
9.1	Grundbegriffe . . . . .	439
9.2	Explizite gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	443
9.3	Lineare gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung . . . . .	446
<b>10</b>	<b>Kombinatorik</b> . . . . .	<b>451</b>
10.1	Kombinatorische Grundprinzipien . . . . .	451
10.2	Fakultäten, Binomialkoeffizienten und Pascalsches Dreieck . . . . .	453
10.3	Binomischer Lehrsatz . . . . .	456
10.4	Permutationen und Variationen . . . . .	457
10.5	Kombinationen . . . . .	460
10.6	Permutationen mit eingeschränkter Wiederholung . . . . .	463
10.7	Multinomialsatz . . . . .	465
10.8	Prinzip der Inklusion und Exklusion . . . . .	466
<b>11</b>	<b>Wahrscheinlichkeitsrechnung</b> . . . . .	<b>471</b>
11.1	Zufällige Ereignisse . . . . .	471
11.2	Absolute und relative Häufigkeit von Ereignissen . . . . .	474
11.3	Stichproben . . . . .	475
11.4	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	482
11.5	Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit . . . . .	485
11.6	Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	492
11.7	Zufallsvariablen . . . . .	496
	<b>Anhang A: Symbole und Bezeichnungen</b> . . . . .	<b>501</b>
	<b>Anhang B: Mathematische Konstanten</b> . . . . .	<b>505</b>
	<b>Anhang C: Das griechische Alphabet</b> . . . . .	<b>507</b>
	<b>Literatur</b> . . . . .	<b>509</b>
	<b>Stichwortverzeichnis</b> . . . . .	<b>511</b>