
Stochastik für Einsteiger

Norbert Henze

Stochastik für Einsteiger

Eine Einführung in die
faszinierende Welt des Zufalls

12., verbesserte und erweiterte Auflage



Springer Spektrum

Norbert Henze
Karlsruher Institut für Technologie KIT
Karlsruhe, Deutschland

ISBN 978-3-658-22043-3
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-22044-0>

ISBN 978-3-658-22044-0 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH, ein Teil von Springer Nature 1997, 1998, 2000, 2003, 2004, 2006, 2008, 2010, 2011, 2013, 2017, 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften. Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Verantwortlich im Verlag: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH und ist ein Teil von Springer Nature.

Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

Vorwort zur 12. Auflage

Welch ein Zufall! sagen wir häufig, um unsere Verwunderung über ein als *unwahrscheinlich* angesehenes Ereignis auszudrücken. Der Zufall führt Regie bei den Ziehungen der Lottozahlen oder den Auslosungen der Spielpaarungen im DFB-Pokal, und er steht Pate bei Spielen wie *Mensch-ügere-Dich-nicht!* oder *Roulette*, wobei Zufall meist mit Glück (*Glücksgöttin Fortuna*) oder Pech (*Pechvogel*) verbunden wird.

Stochastische Begriffsbildungen sind allgegenwärtig. So verspricht der Wetterbericht eine *Regenwahrscheinlichkeit von 70 Prozent*, und Juristen nehmen einen Sachverhalt mit *an Sicherheit grenzender Wahrscheinlichkeit* an, wenn sie ihn als so gut wie sicher erachten. Wir lesen, dass die Überlegenheit einer neuen Therapie zur Behandlung einer Krankheit gegenüber einer Standard-Therapie *statistisch auf dem 5%-Niveau abgesichert* sei. Diese Formulierung mag (und soll es vielfach auch) beeindrucken; sie wird aber den meisten nicht viel sagen. Es werden Ergebnisse von Meinungsumfragen präsentiert, die eine *statistische Unsicherheit von einem Prozent* aufweisen sollen. Auch hier interpretieren wir diese Unsicherheit – wenn überhaupt – meist falsch.

Mit diesem einführenden Lehrbuch in die Stochastik soll der Leser einen ersten Einblick in die faszinierende Welt des Zufalls erhalten, um stochastische Phänomene korrekt beurteilen und etwa über „eine statistische Signifikanz auf dem 5%-Niveau“ kritisch und kompetent mitreden zu können. Es wendet sich insbesondere an Lehrer/-innen, Lehramtsstudierende, Studienanfänger an Fachhochschulen, dualen Hochschulen und Universitäten sowie Quereinsteiger aus Industrie und Wirtschaft. Durch

- Lernziele bzw. Lernzielkontrollen am Ende der Kapitel,
- 277 Übungsaufgaben mit Lösungen,
- ein Symbol- sowie ein ausführliches Sachwortverzeichnis sowie
- 220 ergänzende, durch QR-Codes gekennzeichnete Videos

eignet es sich insbesondere zum Selbststudium und als vorlesungsbegleitender Text.

Gegenüber der 11. Auflage habe ich unter anderem das Kapitel über Parameterschätzung erweitert und zahlreiche Verknüpfungen zu ergänzenden Videos bereitgestellt.

Um den Leser möglichst behutsam in die Stochastik, die Kunst des geschickten Vermutens, einzuführen, wurden die mathematischen Vorkenntnisse bewusst so gering wie möglich gehalten. So reicht für die ersten 21 Kapitel, abgesehen von einem Beweis in Kapitel 10, ein Abiturwissen in Mathematik völlig aus. Erst ab Kapitel 22 wird eine gewisse Vertrautheit mit Begriffen und Methoden der Analysis vorausgesetzt. Hier kann etwa das im Literaturverzeichnis aufgeführte Buch [HL] als Nachschlagewerk dienen.

Der Konzeption dieses Buches liegt die Erfahrung zugrunde, dass die spezifischen Denkweisen der Stochastik den Studierenden anfangs große Schwierigkeiten bereiten. Hinzu kommt das „harte Geschäft“ der Modellierung zufallsabhängiger Vorgänge als ein wichtiges Aufgabenfeld der Stochastik. Da die Konstruktion geeigneter Modelle im Hinblick auf die vielfältigen Anwendungen der Stochastik von Grund auf gelernt werden sollte, nimmt der Aspekt der Modellbildung einen breiten Raum ein. Hier mag es trösten, dass selbst Universalgelehrte wie Leibniz oder Galilei bei einfachen Zufallsphänomenen mathematische Modelle aufstellten, die sich nicht mit den gemachten Beobachtungen des Zufalls in Einklang bringen ließen. Um dem Einüben stochastischer Modellbildung ohne Verwendung fortgeschrittener mathematischer Techniken genügend Raum zu lassen, werden stetige Verteilungsmodelle erst ab Kapitel 31 behandelt.

Ganz bewusst habe ich großen Wert auf die Motivation der Begriffsbildungen und auf die Diskussion von Grundannahmen wie z. B. die Unabhängigkeit und Gleichartigkeit von Versuchen gelegt. Ausführlich werden die Modellierung mehrstufiger Experimente sowie der Zusammenhang zwischen Übergangswahrscheinlichkeiten und den oft nur stiefmütterlich behandelten bedingten Wahrscheinlichkeiten besprochen. Auch in den Kapiteln über Schätz- und Testprobleme werden keine Rezepte vermittelt, sondern prinzipielle Vorgehensweisen der Schließenden Statistik anhand elementarer Beispiele verdeutlicht. Kritische Anmerkungen zum Testen statistischer Hypothesen entspringen einer langjährigen Erfahrung in der statistischen Beratung.

Eine Reihe paradoxer Phänomene dürfte zu anregenden Diskussionen und zur Beschäftigung mit mathematischer Modellierung führen. Hierzu gehören u.a. das *Ziegenproblem* (Kapitel 7 und 15), das *Paradoxon der ersten Kollision* (Kapitel 10), *Simpsons Paradoxon* (Kapitel 15 und Kapitel 21) und das häufig auch als *Coupon-Collector-Problem* oder *Problem der vollständigen Serie* bekannte *Sammlerproblem* (Kapitel 23).

Was beim ersten Durchblättern dieses Buches auffällt, ist ein häufiger Wechsel zwischen einem (hoffentlich) angenehm zu lesenden Prosastil und dem in der Mathematik gewohnten Definition-Satz-Beweis-Schema. Dieser Wechsel ist für die Stochastik typisch. Stochastik ist – wenn man sie nicht auf die *Mathematische Stochastik* reduziert – kein Teilgebiet der Mathematik, sondern eine interdisziplinäre Wissenschaft mit vielfältigen Anwendungen, deren formale Sprache die Mathematik ist. Denjenigen, die an der Entstehungsgeschichte dieser Wissenschaft interessiert sind, werden vermutlich die zahlreichen biografischen Hinweise und die angegebenen Internet-Adressen von Nutzen sein. Eine kleine Sammlung von Links zu den Themen Mathematik und Mathematikgeschichte findet man unter <http://turnbull.mcs.st-and.ac.uk/history/>.

Steigen Sie ein in die faszinierende Welt des Zufalls!

Pfinztal, im März 2018

Danksagung

An dieser Stelle möchte ich allen danken, die mir während der Entstehungsphase dieses Buches eine unschätzbare Hilfe waren. Frau Ingrid Voss „ \TeX te“ große Teile des Manuskriptes und war an der Erstellung des Sachwortverzeichnisses sowie des Symbolverzeichnisses beteiligt. Herr Dipl.-Math. techn. Thorsten Wagner und Herr Dipl.-Math. Heiko Zimmermann steuerten zahlreiche Abbildungen bei und waren stets mit Rat und Tat zur Stelle. Herr Dipl.-Math. Michael Fichter ließ uns uneigennützig von seinem „ \TeX pertenwissen“ profitieren.

Herrn Dr. Martin Folkers verdanke ich zahllose Verbesserungsvorschläge und viele wertvolle biografische Hinweise. Herr Dr. Wolfgang Henn fand trotz eines beängstigend vollen Terminkalenders noch die Zeit, große Teile des Manuskriptes einer wohlwollenden Kritik zu unterziehen. In tiefer Schuld stehe ich bei Frau Dipl.-Math. Nora Gürtler und Herrn Dipl.-Math. Bernhard Klar. Durch gründliches und schnelles Korrekturlesen und zahlreiche Verbesserungsvorschläge haben beide einen entscheidenden Anteil daran, dass sich der Abgabetermin beim Verlag nicht noch weiter verzögert hat. Herrn Prof. Dr. Daniel Hug und Herrn Prof. Dr. Lutz Mattner verdanke ich Hinweise auf Fehler, die in der aktuellen Auflage korrigiert wurden.

Meiner Frau Edda und meinen Kindern Martin, Michael und Matthias danke ich zutiefst für ihr Verständnis und ihre grenzenlose Geduld. Ihnen ist dieses Buch gewidmet.

Lesehinweise

Für ein Verständnis der Grundbegriffe der elementaren diskreten Wahrscheinlichkeitstheorie, der wichtigsten diskreten Verteilungen und des Schwachen Gesetzes großer Zahlen sowie des Zentralen Grenzwertsatzes von de Moivre–Laplace sind die Kapitel 1–4, 6–9, 11–18 und 20–28 unverzichtbar. In diesem Zusammenhang können die Kapitel 10, 19, 25 und 26 zunächst übersprungen werden. Einen sanften Einstieg in stetige Verteilungsmodelle liefern die darauf aufbauenden Kapitel 31–33. Wer sich für die Statistik interessiert, kann sich nach Lektüre von Kapitel 5 zunächst die Grundbegriffe und Methoden der Schließenden Statistik in Kapitel 29 und 30 erarbeiten. Bei Bedarf kann dabei auf benötigte Resultate früherer Kapitel zurückgegriffen werden. Die entsprechenden Betrachtungen bei stetigen Verteilungsmodellen im letzten Kapitel erfordern Kenntnisse der Kapitel 31–33.

Inhaltsverzeichnis

Vorwort zur 12. Auflage	V
1 Zufallsexperimente, Ergebnismengen	1
2 Ereignisse	5
3 Zufallsvariablen	10
4 Relative Häufigkeiten	16
5 Grundbegriffe der deskriptiven Statistik	20
6 Endliche Wahrscheinlichkeitsräume	36
7 Laplace-Modelle	45
8 Elemente der Kombinatorik	50
9 Urnen- und Fächer-Modelle	60
10 Das Paradoxon der ersten Kollision	65
11 Die Formel des Ein- und Ausschließens	70
12 Der Erwartungswert	76
13 Stichprobenentnahme: Die hypergeometrische Verteilung	86
14 Mehrstufige Experimente	91
15 Bedingte Wahrscheinlichkeiten	100
16 Stochastische Unabhängigkeit	118
17 Gemeinsame Verteilung von Zufallsvariablen	131
18 Die Binomialverteilung und die Multinomialverteilung	142
19 Pseudozufallszahlen und Simulation	154
20 Die Varianz	160
21 Kovarianz und Korrelation	166
22 Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume	179

23 Wartezeitprobleme	187
24 Die Poisson-Verteilung	197
25 Erzeugende Funktionen	203
26 Bedingte Erwartungswerte und bedingte Verteilungen	211
27 Gesetz großer Zahlen	223
28 Zentraler Grenzwertsatz	227
29 Parameterschätzung, Konfidenzbereiche	238
30 Statistische Tests	267
31 Allgemeine Modelle	294
32 Stetige Verteilungen, Kenngrößen	305
33 Mehrdimensionale stetige Verteilungen	321
34 Statistische Verfahren bei stetigen Merkmalen	337
Nachwort	363
Tabelle der standardisierten Normalverteilung	364
Quantile der t -Verteilung	365
Kritische Werte der Wilcoxon-Rangsummenstatistik	366
Lösungen der Übungsaufgaben	367
Literaturverzeichnis	396
Symbolverzeichnis	398
Index	400