

---

# Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik

## Reihe herausgegeben von

B. Barzel, Essen, Deutschland

A. Büchter, Essen, Deutschland

B. Rott, Essen, Deutschland

F. Schacht, Essen, Deutschland

P. Scherer, Essen, Deutschland

In der Reihe werden ausgewählte exzellente Forschungsarbeiten publiziert, die das breite Spektrum der mathematikdidaktischen Forschung am Hochschulstandort Essen repräsentieren. Dieses umfasst qualitative und quantitative empirische Studien zum Lehren und Lernen von Mathematik vom Elementarbereich über die verschiedenen Schulstufen bis zur Hochschule sowie zur Lehrerbildung. Die publizierten Arbeiten sind Beiträge zur mathematikdidaktischen Grundlagen- und Entwicklungsforschung und zum Teil interdisziplinär angelegt. In der Reihe erscheinen neben Qualifikationsarbeiten auch Publikationen aus weiteren Essener Forschungsprojekten.

Weitere Bände in der Reihe <http://www.springer.com/series/13887>

---

Marcel Klinger

# Funktionales Denken beim Übergang von der Funktionenlehre zur Analysis

Entwicklung eines Testinstruments  
und empirische Befunde aus  
der gymnasialen Oberstufe

Mit einem Geleitwort von Prof. Dr. Bärbel Barzel

 Springer Spektrum

Marcel Klinger  
Essen, Deutschland

Von der Fakultät für Mathematik der Universität Duisburg-Essen genehmigte Dissertation  
zur Erlangung des Doktorgrades „Dr. rer. nat.“

Datum der mündlichen Prüfung: 7. September 2017

Gutachterinnen: Prof. Dr. Bärbel Barzel, Prof. Dr. Bettina Rösken-Winter

ISSN 2509-3169                      ISSN 2509-3177 (electronic)  
Essener Beiträge zur Mathematikdidaktik  
ISBN 978-3-658-20359-7              ISBN 978-3-658-20360-3 (eBook)  
<https://doi.org/10.1007/978-3-658-20360-3>

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2018

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen. Der Verlag bleibt im Hinblick auf geografische Zuordnungen und Gebietsbezeichnungen in veröffentlichten Karten und Institutionsadressen neutral.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature  
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH  
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Abraham-Lincoln-Str. 46, 65189 Wiesbaden, Germany

## Danksagung

---

In der vorliegenden Dissertationsschrift findet mein seit Mai 2014 andauerndes Promotionsprojekt seinen Höhepunkt. In dieser Zeit habe ich viel lernen dürfen und einiges erreicht. Rückblickend betrachtet, handelt es sich bei einer Promotion sicherlich um eines der umfangreichsten Projekte, das man überhaupt innerhalb des professionellen Lebens durchführen kann.

Im Laufe der Zeit wurde ich hierbei von vielen Menschen unterstützt. Diese Unterstützung ist einerseits von professionell-beruflicher Natur. Andererseits zeigt sie sich aber auch darin, dass geliebte Menschen mein Promotionsprojekt als umfangreichen Teil meines Lebens akzeptiert, toleriert und entsprechend unterstützt haben.

Von diesen Menschen sind einige besonders hervorzuheben, da ihr Handeln in wesentlichen Zügen zum Gelingen meines Promotionsprojektes und der damit verbundenen Anfertigung dieser Dissertationsschrift beigetragen hat.

Hierbei ist allen voran meine Mentorin Prof. Dr. Bärbel Barzel zu nennen, die von Beginn an ihr Vertrauen in mich gesetzt hat und mich stets tatkräftigt unterstützte. Besonders von der hohen Verantwortung und den damit verbundenen Freiheiten, die es benötigt, eine solche Dissertationsschrift anzufertigen, habe ich maßgeblich profitiert.

Als Zweitgutachterin stand mir ebenfalls Prof. Dr. Bettina Rösken-Winter beratend zur Seite, so dass ich auch ihr zu besonderem Dank verpflichtet bin. Mit ihren Ideen und Anregungen war auch sie stets ein wichtiger Bestandteil des Promotionsprojektes.

Hervorheben möchte ich auch Prof. Dr. Andreas Büchter, der sich stets Zeit nahm und immer ein offenes Ohr hatte, so dass auch ihm besonderer Dank gebührt.

Insgesamt erfuhr ich breite Unterstützung innerhalb der Arbeitsgruppe aber auch durch die Mathematikdidaktikerinnen und Mathematikdidaktiker der Universität Duisburg-Essen insgesamt. So waren Gespräche im

Büro, auf dem Flur oder innerhalb diverser Kolloquien stets offen, konstruktiv und somit letztlich gewinnbringend. Insbesondere während der Durchführung und Auswertung der Erhebungsdaten wurde ich von zahlreichen Kolleginnen und Kollegen auch logistisch unterstützt. Vor allem aber sind Nora Henze, Lara Meder und Anna Schulz zu nennen, die als studentische Hilfskräfte exzellente Arbeit leisteten. An dieser Stelle sollen aber auch Heike Steinbrink und (nochmals) Lara Meder genannt werden, die ihre Staatsarbeiten im Umfeld meines Promotionsprojektes ablegten und somit auch einen wichtigen Teil zum Gesamtprojekt beitrugen.

Danken möchte ich aber auch Can Gürer, der mich insbesondere hinsichtlich statistischer Themen – besonders rund um das Rasch-Modell – unterstützt hat und stets für eine entsprechende Diskussion zur Verfügung stand.

Mein Dank gilt aber auch Dr. Marc Bosse und Martina Hoffmann, die gerade in den ersten Tagen innerhalb meines neuen Jobs im Deutschen Zentrum für Lehrerbildung Mathematik (DZLM) wichtige Ansprechpartner waren und auch weiterhin blieben.

Maßgebliche Bereicherung fand meine Zeit als Doktorand darüber hinaus in einer weiteren Person durch die enge Verbindung, die unsere Promotionsprojekte zueinander hatten: Daniel Thurm. Die gemeinsame Arbeit habe ich stets sehr genossen und letzten Endes einen guten Freund gewonnen.

Ich bin aber auch meiner Familie und Freunden zu Dank verpflichtet, die in den letzten Jahren häufig auf mich verzichten mussten.

Hier möchte ich meine Eltern Susanne und Jörg Klinger besonders hervorheben, die von den Anfängen meiner Schulzeit an bis hin zur Promotion stets hinter mir standen und mir so ermöglichten, mich zu dem Menschen zu bilden, der ich heute bin.

Die größte und wichtigste Unterstützerin meiner Promotion war aber meine Freundin, Lebensgefährtin, Verlobte und inzwischen Frau Annika Klinger, die häufig auf mich verzichten musste, jedoch stets Verständnis aufbrachte. Zusammen sind wir einen weiten Weg gegangen.

## Geleitwort

---

Funktionales Denken gehört seit der Meraner Reform (1905) als zentrales Thema zum festen Kanon der Schulmathematik in der Sekundarstufe I und schafft wichtige Voraussetzungen für spätere Themen, z.B. den Analysisunterricht in der Oberstufe. Zum funktionalen Denken gehört als Kernkompetenz der flexible Umgang mit funktionalen Beziehungen in verschiedenen Darstellungen und inner- wie außermathematischen Kontexten. Doch wie ist es um diese Kompetenz bei Schülerinnen und Schülern bestellt? Von welchen Voraussetzungen kann der Analysisunterricht in der Oberstufe ausgehen?

Dieser Frage hat sich Marcel Klinger mit seiner Arbeit intensiv gewidmet. Er hat zwei Tests entwickelt, wovon einer für den Einsatz zu Beginn der Oberstufe und einer nach der Einführung der Differentialrechnung konzipiert wurde. Mit beiden Tests liefert Herr Klinger hilfreiche Diagnosewerkzeuge, die sowohl für Wissenschaft als auch Schulpraxis hilfreiche Instrumente darstellen, da sie Informationen über die kognitiven Voraussetzungen der Schülerinnen und Schüler liefern. Für die Schule ist dies dienlich als Grundlage zur gezielten individuellen Förderung und zur Weiterentwicklung der Lehre.

Das Besondere an den von Herrn Klinger entwickelten Tests ist die gute fachdidaktische Durchdringung der einzelnen Aufgaben wie des Gesamt-Settings. Er verbindet die Erkenntnisse und Empfehlungen der spezifisch deutschen Tradition der Stoffdidaktik mit anglo-amerikanischen Ansätzen (z.B. die Theorie von Concept Image und Concept Definition oder das Procept als Verknüpfung von Process und Concept) in eloquenter Weise. Das entstandene Kompetenzmodell ist auch weit über die Arbeit hinaus hilfreich bei der Konzeption wie Analyse von Aufgaben im Themenbereich.

Mit den Tests werden vielfältige kognitive Aktivitäten gefordert, wodurch die Aufgaben hohen diagnostischen Wert haben und sich deutlich von kalkülorientierten Testbatterien absetzen, die gerade für die Oberstufe und den Übergang von der Schule zur Hochschule häufig noch üblich

sind. Damit setzt Herr Klinger einen guten Standard, die Problematik fachlicher Lücken in diesem Themenbereich fachdidaktisch fundiert anzugehen und neu zu denken. Die Erkenntnisse des Testeinsatzes mit über 3000 Schülerinnen und Schüler in Nordrhein-Westfalen geben bereits wichtige Hinweise auf Problemstellen im Verstehen und im Umgang mit Funktionen wie zum Beispiel Übergeneralisierungen und Gender-Unterschiede.

Die Arbeit von Herrn Klinger ist entstanden im Rahmen des Deutschen Zentrums für Lehrerbildung Mathematik (DZLM), konkret als Rahmung eines Fortbildungskurses für Oberstufenlehrkräfte zur sinnvollen Integration digitaler Werkzeuge. Die ersten Befunde mit Impulsen zur Gestaltung von Aufgaben und Unterricht wurden bereits in diese Fortbildungsreihe integriert und werden auch zukünftig Bestandteil weiterer Fortbildungen sein.

Mit seiner Arbeit leistet Herr Klinger sowohl für die Schulpraxis als auch für die fachdidaktische Forschung einen wichtigen, innovativen Beitrag, da er wegweisende Standards setzt für eine fachdidaktisch fundierte Entwicklung quantitativer Tests im Bereich der Oberstufenmathematik.

Essen im Oktober 2017

Prof. Dr. Bärbel Barzel



## Kurzdarstellung

---

Die vorliegende Arbeit stellt die Konzeption, Entwicklung und Durchführung eines Testinstruments im Bereich des Funktionalen Denkens dar. Das Instrument besteht aus zwei Einzeltests, welche speziell konzipiert sind, um zu Beginn und gegen Ende der Einführungsphase der gymnasialen Oberstufe eingesetzt zu werden. Die inhaltliche Fokussierung der Tests zielt auf die Erhebung der Schülerleistung beim Übergang von der Funktionenlehre der Sekundarstufe I zur Analysis der Oberstufe ab.

Hierbei steht im Mittelpunkt, ob seitens der Lernenden Verständnis der Inhalte und ihrer Zusammenhänge erworben werden konnte. Neben der literaturgeleiteten Klärung der Begriffe des konzeptuellen und prozeduralen Wissens wird hierzu die Relevanz unterschiedlicher Repräsentationsformen und entsprechender Wechsel zwischen ihnen speziell für die Mathematik aufgezeigt. Darüber hinaus wird auf die in deutscher Tradition stehende Grundvorstellungstheorie sowie vergleichbare anglo-amerikanisch geprägte Varianten eingegangen. Weiterhin werden die genannten Theorieelemente für die Inhaltsbereiche der Funktionenlehre und der frühen Analysis konkretisiert, um diese so für die Testkonstruktion nutzbar zu machen und den genannten Verständnisbegriff zu operationalisieren.

Weiterhin werden testtheoretisch-methodische Elemente, wie das eindimensionale dichotome Rasch-Modell, erläutert. Darüber hinaus wird auf das häufig innerhalb mathematischer Leistungstests auftretende Phänomen geschlechtsspezifischer Effekte zu Gunsten der männlichen Probanden eingegangen. Die Konzeption des Testinstruments orientiert sich schließlich an einem im Rahmen der Arbeit entwickelten Kompetenzstrukturmodell, das wiederum auf den vorgestellten Theoriefacetten fußt.

Neben der Entwicklung des genannten Testinstruments und der Sicherung und Erörterung seiner Qualität, verfolgt die Arbeit das Ziel, den Stand der Fähigkeiten der Schülerinnen und Schüler in der Einführungsphase umfangreich zu beschreiben. Weiterhin soll geklärt werden, welche

individuellen Leistungsprofile sich innerhalb der besagten Inhaltsbereiche ausmachen lassen und wie stark die festgestellten Fähigkeiten und Leistungsprofile durch das Geschlecht der Probanden determiniert werden.

Anhand einer großen Feldtestung mit über 3000 Schülerinnen und Schülern in Nordrhein-Westfalen finden die entwickelten Tests daher Anwendung. Die so gewonnenen Daten lassen sich mit dem eindimensionalen dichotomen Rasch-Modell, aber auch dem Modell von Birnbaum skalieren. Um vor allem einen fachdidaktisch-gehaltvollen Blick auf die Leistungen der Lernenden zu werfen, wird jedes verwendete Item einer eingehenden Analyse unterzogen, die neben theoretischen Grundlagen auch auf den gewonnenen empirischen Daten fußt. Im Rahmen weiterer Analysen werden u.a. sich individuell ergebende Bearbeitungsprofile mittels Latente-Klassen-Analyse herausgearbeitet und die Leistungsdaten bezüglich geschlechtsspezifischer Effekte untersucht.

Insgesamt lassen die gewonnenen Daten einen breiten und vielseitigen Blick auf die Leistungen der Schülerinnen und Schüler zu Beginn und gegen Ende der Einführungsphase zu. Es zeigt sich u.a., dass Schülerinnen und Schüler unterschiedliche mathematische Aktivitäten häufig nicht hinreichend vernetzen und sowohl benachbarte Themenkomplexe als auch unterschiedliche Darstellungsformen nicht gewinnbringend miteinander in Verbindung bringen. Weiterhin stellen sich auf nahezu allen Ebenen der Datenanalyse deutliche Effekte zu Gunsten der männlichen Probanden ein, die auf eine teils beachtliche Bevorteilung von Jungen gegenüber Mädchen schließen lassen.

# Inhaltsverzeichnis

---

Danksagung	V
Geleitwort	VII
Kurzdarstellung	IX
Abbildungsverzeichnis	XVII
Tabellenverzeichnis	XXI
I Einleitung	1
1 Einleitung	3
1.1 Hintergrund zur Entstehung dieser Arbeit . . . . .	5
1.2 Notwendigkeit eines neuen Testinstruments . . . . .	6
1.3 Gliederung der Arbeit . . . . .	7
II Theoretische Grundlagen	11
2 Rahmentheorien	13
2.1 Konzeptuelles Wissen . . . . .	13
2.1.1 Der kognitionspsychologische Standpunkt . . . . .	15
2.1.2 Zur Definition konzeptuellen und prozeduralen Wissens . . . . .	18
2.1.3 Weitere Eigenschaften der Begriffe . . . . .	21
2.1.4 Konkretisierung für die Mathematikdidaktik . . . . .	23
2.2 Repräsentationen . . . . .	25
2.2.1 Das Konzept „Repräsentation“ . . . . .	26
2.2.2 Repräsentationswechsel: Perspektive schafft Tiefe . .	29
2.3 Grundvorstellungen und Concept Image . . . . .	33
2.3.1 Grundvorstellungen . . . . .	34
2.3.2 Concept Image und Concept Definition . . . . .	37
2.3.3 Zusammenhang beider Theorien . . . . .	40
3 Funktionenlehre und Funktionales Denken	43
3.1 Historische Entwicklung des Funktionsbegriffs . . . . .	44
3.2 Zwischen Kinematik und Statik . . . . .	48

3.2.1	Meraner Reform von 1905 . . . . .	48
3.2.2	Neue Mathematik ab 1970 . . . . .	50
3.3	Definition Funktionalen Denkens und Grundvorstellungen	51
3.4	Funktionen im heutigen Curriculum . . . . .	59
3.5	Funktionen und ihre Repräsentationen . . . . .	60
3.5.1	Repräsentationsformen . . . . .	61
3.5.2	Repräsentationswechsel . . . . .	66
3.5.3	Zusammenhang zu Wissensarten . . . . .	71
3.6	Qualitative Funktionen . . . . .	77
3.7	Ausgewählte Schülerfehler . . . . .	79
3.7.1	Graph-als-Bild-Fehler . . . . .	81
3.7.2	Illusion of Linearity . . . . .	85
4	Von der Funktionenlehre zur Analysis	91
4.1	Die Analysis und der Ableitungsbegriff . . . . .	93
4.1.1	Historische Entwicklung . . . . .	93
4.1.2	Fachliche Charakterisierung . . . . .	95
4.1.3	Grundvorstellungen zum Ableitungsbegriff . . . . .	96
4.1.4	Zugänge im Unterricht und Begriffsbildungsprozess	99
4.1.5	Die Gefahr einer Überbetonung des Kalküls . . . . .	103
4.2	Infinitesimales Denken . . . . .	105
4.2.1	Unendlichkeit und das Grenzwertkonzept . . . . .	107
4.2.2	Propädeutischer Grenzwertbegriff . . . . .	111
4.2.3	Infinitesimales Denken im Analysisunterricht . . . . .	114
4.2.4	Zusammenhang zum Funktionalen Denken . . . . .	116
4.3	Funktionales Denken in der Analysis . . . . .	119
4.3.1	Von Parametern zu Transformationen . . . . .	120
4.3.2	Objektaspekt und Object Concept . . . . .	124
4.3.3	Differentiation und Funktionales Denken . . . . .	127
5	Mathematische Leistungstests	133
5.1	Mögliche Testformate . . . . .	134
5.2	Allgemeine Testgütekriterien . . . . .	135
5.3	Rasch-Modell . . . . .	142
5.3.1	Ziel von Rasch-Modellen . . . . .	143
5.3.2	Das eindimensionale dichotome Rasch-Modell . . . . .	144
5.3.3	Eigenschaften des Rasch-Modells . . . . .	146

5.3.3.1	Suffiziente Statistiken . . . . .	146
5.3.3.2	Lokale stochastische Unabhängigkeit . . . . .	147
5.3.3.3	Spezifische Objektivität . . . . .	148
5.3.4	Parameterschätzung . . . . .	151
5.3.5	Umgang mit fehlenden Daten . . . . .	152
5.3.6	Differential Item Functioning . . . . .	155
5.3.7	Rasch-Homogenität und Fit-Statistiken . . . . .	156
5.3.8	Zur Eindimensionalität von Mathematikleistung . . . . .	159
5.4	Geschlechtsspezifische Effekte . . . . .	161
5.4.1	Kritik hinsichtlich methodischer Facetten . . . . .	161
5.4.2	Effektstärke geschlechtsspezifischer Differenzen . . . . .	162
5.4.3	Domänenspezifität der Differenzen . . . . .	168
5.4.4	Mögliche Ursachen der Differenzen . . . . .	170
III	Empirische Untersuchung . . . . .	173
6	Fragestellung . . . . .	175
6.1	Zwischenfazit . . . . .	175
6.2	Forschungsfragen . . . . .	177
6.2.1	Allgemeine Forschungsfragen . . . . .	177
6.2.2	Instrumentbezogene Forschungsfragen . . . . .	178
7	Testentwicklung und Pilotierung . . . . .	181
7.1	Inhaltlicher Fokus und curriculare Anbindung . . . . .	181
7.2	Kompetenzstrukturmodell zur Itementwicklung . . . . .	184
7.3	Wesentliche Gestaltungsentscheidungen . . . . .	189
7.4	Pilotierungsphasen und Itemauswahl . . . . .	192
7.4.1	Ergebnisse der Pilotierungen . . . . .	193
7.4.2	Verlauf einer Itemkonstruktion . . . . .	198
7.4.3	Ausschluss eines Items . . . . .	202
7.4.4	Zusammenstellung der Testhefte . . . . .	204
8	Haupterhebung und Datenanalyse . . . . .	207
8.1	Durchführung und Stichprobe . . . . .	207
8.2	Modellschätzung . . . . .	213
8.2.1	Modellgeltungstests . . . . .	221
8.2.1.1	Grafische Modellkontrolle . . . . .	223
8.2.1.2	Likelihood-Ratio-Test . . . . .	228

	8.2.1.3	Wald-Test . . . . .	230
	8.2.2	Alternativen zum Rasch-Modell . . . . .	234
8.3		Diskussion der Einzelitems . . . . .	240
	8.3.1	Aufgaben zu Situationen und Funktionen (erster Test)	243
	8.3.1.1	Schwimmbecken (N <sub>1</sub> FQ/R) . . . . .	243
	8.3.1.2	Kegelfüllung (J <sub>9</sub> SD/E) . . . . .	246
	8.3.1.3	Weihnachtsmann (H <sub>7</sub> ZD) . . . . .	251
	8.3.1.4	Rennstrecke (Q <sub>3</sub> WD) . . . . .	256
	8.3.1.5	Skifahrer (I <sub>6</sub> JG) . . . . .	261
	8.3.1.6	Dateidownload (G <sub>6</sub> UH/I) . . . . .	264
	8.3.1.7	Kugelstoßen (P <sub>5</sub> CX) . . . . .	267
	8.3.1.8	Müngstener Brücke (F <sub>7</sub> GH) . . . . .	271
	8.3.1.9	Grundstücksfläche (K <sub>8</sub> GF) . . . . .	275
	8.3.2	Innermathematische Aufgaben (erster Test) . . . . .	280
	8.3.2.1	Koordinatensystem (A <sub>5</sub> CV/W) . . . . .	280
	8.3.2.2	Scheitelpunkt (B <sub>3</sub> XY/Z) . . . . .	286
	8.3.2.3	Verschobene Funktion I (C <sub>4</sub> XF) . . . . .	292
	8.3.2.4	Parabelgleichung (L <sub>4</sub> MB) . . . . .	295
	8.3.2.5	Parabelquiz (R <sub>4</sub> TG) . . . . .	301
	8.3.3	Aufgaben zum Differenzieren (zweiter Test) . . . . .	304
	8.3.3.1	Ableitungskalkül (H <sub>4</sub> AB) . . . . .	304
	8.3.3.2	Verschobene Ableitung (X <sub>4</sub> TP) . . . . .	308
	8.3.3.3	Flugzeug (Y <sub>2</sub> VK) . . . . .	313
	8.3.3.4	Funktionenlupe (W <sub>7</sub> CK) . . . . .	320
	8.3.4	Aufgaben zum graphischen Differenzieren (zweiter Test) . . . . .	326
	8.3.4.1	Graphische Ableitung I (S <sub>3</sub> AB) . . . . .	326
	8.3.4.2	Graphische Ableitung II (U <sub>3</sub> PT) . . . . .	331
	8.3.4.3	Graphische Ableitung III (V <sub>3</sub> RK) . . . . .	334
	8.3.4.4	Vorzeichen der Ableitung (Z <sub>7</sub> PC) . . . . .	337
	8.3.5	Aufgaben zu Transformationen (zweiter Test) . . . . .	343
	8.3.5.1	Verschobene Funktion II (M <sub>8</sub> PL) . . . . .	343
	8.3.5.2	Skalierte Funktion (O <sub>5</sub> ZG) . . . . .	347
	8.3.5.3	Parabelöffnung / Zwei Nullstellen (D <sub>6</sub> LG) . . . . .	352
	8.3.6	Zusammenfassung . . . . .	359

---

8.3.7	Ausschluss von Items und Wahl des Modells . . . . .	375
8.4	Verbindung beider Tests mittels Ankeritems . . . . .	379
8.4.1	Gemeinsame Modellschätzung . . . . .	382
8.4.2	Fähigkeitsveränderungen der Probanden . . . . .	385
8.5	Geschlechtsspezifische Effekte . . . . .	388
8.5.1	Vergleich auf Testebene . . . . .	388
8.5.2	Vergleich hinsichtlich Schulform . . . . .	391
8.5.3	Vergleich auf Itemebene . . . . .	393
8.6	Latente-Klassen-Analyse . . . . .	397
8.6.1	Bestimmung der Anzahl latenter Klassen . . . . .	398
8.6.2	Begutachtung der Modellgüte . . . . .	400
8.6.3	Durchführung der Analyse . . . . .	402
8.6.4	Interpretation der Analyse . . . . .	409
8.7	Abschließende Beurteilung der Testgüte . . . . .	412
8.7.1	Zur Objektivität . . . . .	412
8.7.2	Zur Reliabilität . . . . .	413
8.7.3	Zur Validität . . . . .	416
8.7.4	Zu den Nebengütekriterien . . . . .	420
IV	Schluss . . . . .	423
9	Fazit . . . . .	425
9.1	Beantwortung der Forschungsfragen . . . . .	425
9.1.1	Allgemeine Forschungsfragen . . . . .	425
9.1.2	Instrumentbezogene Forschungsfragen . . . . .	433
9.2	Praxisbezug der Arbeit . . . . .	440
9.2.1	Unterrichtliche Konsequenzen . . . . .	440
9.2.2	Lehrerfortbildungen zur Veränderung von Unterricht . . . . .	444
9.3	Reflexion und Ausblick . . . . .	445
v	Anhang . . . . .	449
10	Verwendete Materialien und Software . . . . .	451
10.1	Testhefte . . . . .	451
10.1.1	Erster Test . . . . .	451
10.1.2	Zweiter Test . . . . .	451
10.2	Handreichung für Lehrkräfte . . . . .	451

- 10.3 Verwendete Software . . . . . 451
  - 10.3.1 ACER ConQuest . . . . . 451
  - 10.3.2 Mplus . . . . . 452
  - 10.3.3 R . . . . . 452
    - 10.3.3.1 Package eRm . . . . . 452
    - 10.3.3.2 Package WrightMap . . . . . 452
  - 10.3.4 Entwickelte Software . . . . . 452
  
- Literaturverzeichnis . . . . . 457



## Abbildungsverzeichnis

---

Abb. 3.5.1	Darstellungsformen einer Funktion . . . . .	61
Abb. 3.6.1	Beispiel einer qualitativen Funktion . . . . .	78
Abb. 3.7.1	Geschwindigkeits-Zeit-Diagramm eines Rennwagens .	82
Abb. 3.7.2	Mögliche Formen einer Rennstrecke . . . . .	83
Abb. 3.7.3	Querschnitt eines Hügels mit Radfahrer . . . . .	84
Abb. 3.7.4	Weihnachtsmann sowie dreifache Vergrößerung . . . .	89
Abb. 4.2.1	Zusammenhang Funktionalen und Infinitesimalen Denkens . . . . .	117
Abb. 4.2.2	Alternativer Zusammenhang Funktionalen und Infini- tesimalen Denkens . . . . .	118
Abb. 4.3.2	Funktionsebenen- und Aspektwechsel . . . . .	129
Abb. 5.3.1	Item Characteristic Curve . . . . .	146
Abb. 5.3.2	Item Characteristic Curve zweier Items . . . . .	149
Abb. 7.2.1	Aufgabenklassifikationsmodell zur Testentwicklung . .	185
Abb. 7.2.2	Konkretisierung der Ebene „Differenzierte Funktion“ .	187
Abb. 7.4.3	Unterschiedlich skalierte Koordinatenachsen in TI- Nspire . . . . .	199
Abb. 7.4.4	Ausgeschlossene Aufgabe A4CV . . . . .	200
Abb. 7.4.5	Aufgenommene Aufgabe A5CV . . . . .	201
Abb. 7.4.6	Ausgeschlossene Aufgabe T7BG . . . . .	203
Abb. 8.1.1	Zusammensetzung der gezogenen Stichprobe nach Schulform . . . . .	211
Abb. 8.2.4	Wright Map (erster Test) . . . . .	219
Abb. 8.2.5	Wright Map (zweiter Test) . . . . .	220
Abb. 8.2.6	Grafische Modellkontrolle für Kriterium „Median“ . .	225
Abb. 8.2.7	Grafische Modellkontrolle für Kriterium „Zufall“ . . .	226
Abb. 8.2.8	Grafische Modellkontrolle für Kriterium „Geschlecht“	227
Abb. 8.3.1	Aufgabe „Schwimmbecken“ (N1FQ) . . . . .	243
Abb. 8.3.3	Aufgabe „Kegelfüllung“ (J9SD) . . . . .	247
Abb. 8.3.5	Aufgabe „Weihnachtsmann“ (H7ZD) . . . . .	252

Abb. 8.3.6	Weihnachtsmann mit Rahmen . . . . .	255
Abb. 8.3.7	Aufgabe „Rennstrecke“ (Q3WD) . . . . .	257
Abb. 8.3.9	Aufgabe „Skifahrer (I6JG) . . . . .	261
Abb. 8.3.11	Aufgabe „Dateidownload“ (G6UH) . . . . .	264
Abb. 8.3.13	Aufgabe „Kugelstoßen“ (P5CX) . . . . .	268
Abb. 8.3.15	Aufgabe „Müngstener Brücke“ (F7GH) . . . . .	272
Abb. 8.3.17	Aufgabe „Grundstücksfläche“ (K8GF) . . . . .	276
Abb. 8.3.18	Relative Häufigkeiten (K8GF) . . . . .	279
Abb. 8.3.19	Korrekte und falsche Skizze (K8GF) . . . . .	280
Abb. 8.3.20	Aufgabe „Koordinatensystem“ (A5CV) . . . . .	281
Abb. 8.3.22	Falschbearbeitungen (A5CV/W) . . . . .	285
Abb. 8.3.23	Aufgabe „Scheitelpunkt“ (B3XY) . . . . .	286
Abb. 8.3.25	Unverständiges Einsetzen (B3XY) . . . . .	290
Abb. 8.3.26	Aufgabe „Verschobene Funktion I“ (C4XF) . . . . .	293
Abb. 8.3.27	Aufgabe „Parabelgleichung“ (L4MB) . . . . .	296
Abb. 8.3.28	Ansätze zur Lösung (L4MB) . . . . .	299
Abb. 8.3.29	Aufgabe „Parabelquiz“ (R4TG) . . . . .	301
Abb. 8.3.31	Aufgabe „Ableitungskalkül“ (H4AB) . . . . .	305
Abb. 8.3.33	Ansätze zur Lösung (H4AB <sub>3</sub> ) . . . . .	308
Abb. 8.3.34	Aufgabe „Verschobene Ableitung“ (X4TP) . . . . .	309
Abb. 8.3.35	Aufgabe „Flugzeug“ (Y2VK) . . . . .	314
Abb. 8.3.37	Schätzen der Durchschnittsgeschwindigkeit (Y2VK <sub>3</sub> ) . . . . .	319
Abb. 8.3.38	Aufgabe „Funktionenlupe“ (W7CK) . . . . .	321
Abb. 8.3.39	Funktionenlupe in GeoGebra . . . . .	323
Abb. 8.3.40	Argumentation über lokale Extremstelle (W7CK) . . . . .	324
Abb. 8.3.41	Argumentation über lokale Linearität (W7CK) . . . . .	325
Abb. 8.3.42	Aufgabe „Graphische Ableitung I“ (S3AB) . . . . .	327
Abb. 8.3.43	Musterlösung (S3AB) . . . . .	328
Abb. 8.3.45	Aufgabe „Graphische Ableitung II“ (U3PT) . . . . .	332
Abb. 8.3.46	Aufgabe „Graphische Ableitung III“ (V3RK) . . . . .	335
Abb. 8.3.48	Aufgabe „Vorzeichen der Ableitung“ (Z7PC) . . . . .	339
Abb. 8.3.50	Aufgabe „Verschobene Funktion II“ (M8PL) . . . . .	344
Abb. 8.3.52	Aufgabe „Skalierte Funktion“ (O5ZG) . . . . .	348
Abb. 8.3.53	Distraktor-Plot (O5ZG) . . . . .	351
Abb. 8.3.54	Aufgabe „Parabelöffnung / Zwei Nullstellen“ (D6LG) . . . . .	353

---

Abb. 8.3.55	Aufgabenbeispiel MSW NRW . . . . .	354
Abb. 8.3.56	Argumentation mit graphischem Bezug (D6LG1) . . .	357
Abb. 8.3.57	Argumentation mit algebraisch-symbolischem Bezug (D6LG1) . . . . .	358
Abb. 8.3.61	Wright Map nach Ausschluss von Aufgabe Z7PC (zweiter Test) . . . . .	378
Abb. 8.4.2	Gemeinsames Ankerdesign . . . . .	381
Abb. 8.4.4	Gemeinsames Histogramm (Fähigkeitsparameter) . . .	386
Abb. 8.4.5	Gemeinsames Histogramm (Lösungsquoten) . . . . .	386
Abb. 8.4.6	Histogramm (Differenzen der verbundenen Fähigkeits- parameter) . . . . .	387
Abb. 8.5.2	Histogramm Gesamtpunktzahl nach Geschlecht (ers- ter Test) . . . . .	390
Abb. 8.5.3	Histogramm Gesamtpunktzahl nach Geschlecht (zwei- ter Test) . . . . .	390
Abb. 8.5.5	Differenz der durchschnittlichen Lösungsquoten nach Geschlecht (erster Test) . . . . .	394
Abb. 8.5.6	Differenz der durchschnittlichen Lösungsquoten nach Geschlecht (zweiter Test) . . . . .	394
Abb. 8.6.3	Latente-Klassen-Analyse (erster Test) . . . . .	403
Abb. 8.6.4	Latente-Klassen-Analyse (zweiter Test) . . . . .	405
Abb. 9.2.1	Wirkungsebenen . . . . .	444
Abb. 10.3.1	Eingabemaske . . . . .	453
Abb. 10.3.2	Übersicht für teilnehmende Lehrkräfte . . . . .	454
Abb. 10.3.3	Diagramme für teilnehmende Lehrkräfte . . . . .	455
Abb. 10.3.4	Itemübersicht für teilnehmende Lehrkräfte . . . . .	456

## Tabellenverzeichnis

---

Tab. 2.1.1	Trennung von Wissensart und -qualität . . . . .	20
Tab. 2.1.2	Arten und Facetten von Wissen . . . . .	24
Tab. 3.5.2	Aktivitäten zum Darstellungswechsel . . . . .	67
Tab. 3.5.3	Kategorisierung der Darstellungswechsel nach Wissensart . . . . .	77
Tab. 4.1.1	Der Weg von $f(x_0)$ zu $f'(x_0)$ . . . . .	97
Tab. 4.1.2	Ableitungsbegriff in gängiger Schulbuchliteratur . . . . .	103
Tab. 4.3.1	Rollen von Variablen und entsprechende Handlungen . . . . .	122
Tab. 5.4.1	Geschlechtsspezifische Effekte in mathematischen Leistungsstudien . . . . .	164
Tab. 5.4.2	Geschlechtsspezifische Differenzen nach Leitideen . . . . .	169
Tab. 7.4.1	Pilotierte Items (erster Test) . . . . .	194
Tab. 7.4.2	Pilotierte Items (zweiter Test) . . . . .	196
Tab. 8.2.1	Kennzahlen zur Gesamtstichprobe . . . . .	213
Tab. 8.2.2	Itemübersicht Rasch-Modell (erster Test) . . . . .	215
Tab. 8.2.3	Itemübersicht Rasch-Modell (zweiter Test) . . . . .	217
Tab. 8.2.9	Likelihood-Ratio-Test . . . . .	230
Tab. 8.2.10	Wald-Test (erster Test) . . . . .	232
Tab. 8.2.11	Wald-Test (zweiter Test) . . . . .	233
Tab. 8.2.12	Itemübersicht 2PL-Modell (erster Test) . . . . .	236
Tab. 8.2.13	Itemübersicht 2PL-Modell (zweiter Test) . . . . .	237
Tab. 8.2.14	Vergleich von 1PL- und 2PL-Modell . . . . .	239
Tab. 8.3.2	Antwortcodes (N1FQ/R) . . . . .	246
Tab. 8.3.4	Bearbeitungsklassifikation (J9SD/E) . . . . .	250
Tab. 8.3.8	Antwortcodes (Q3WD) . . . . .	260
Tab. 8.3.10	Antwortcodes (I6JG) . . . . .	263
Tab. 8.3.12	Antwortcodes (G6UH/I) . . . . .	267
Tab. 8.3.14	Bearbeitungsklassifikation (P5CX1) . . . . .	270
Tab. 8.3.16	Bearbeitungsklassifikation (F7GH) . . . . .	275
Tab. 8.3.21	Bearbeitungsklassifikation (A5CV/W) . . . . .	284

Tab. 8.3.24	Bearbeitungsklassifikation (B <sub>3</sub> XY/Z) . . . . .	289
Tab. 8.3.30	Antwortverhalten (R <sub>4</sub> TG) . . . . .	304
Tab. 8.3.32	Lösungsquoten (H <sub>4</sub> AB) . . . . .	307
Tab. 8.3.36	Antwortcodes (Y <sub>2</sub> VK) . . . . .	317
Tab. 8.3.44	Bearbeitungsklassifikation (S <sub>3</sub> AB) . . . . .	330
Tab. 8.3.47	Bearbeitungsklassifikation (V <sub>3</sub> RK) . . . . .	337
Tab. 8.3.49	Bearbeitungsklassifikation (Z <sub>7</sub> PC) . . . . .	342
Tab. 8.3.51	Bearbeitungsklassifikation (M <sub>8</sub> PL) . . . . .	346
Tab. 8.3.58	Häufigkeit „Illusion of Linearity“ . . . . .	360
Tab. 8.3.59	Kennzahlen zur Gesamtstichprobe (nach Ausschluss von Aufgabe Z <sub>7</sub> PC) . . . . .	376
Tab. 8.3.60	Itemübersicht Neuberechnung Rasch-Modell (zweiter Test) . . . . .	377
Tab. 8.4.1	Ankeritems . . . . .	380
Tab. 8.4.3	Itemübersicht Rasch-Modell (gleichzeitige Skalierung)	384
Tab. 8.5.1	Kennzahlen zu geschlechtsspezifischen Abweichungen	389
Tab. 8.5.4	Kennzahlen zu geschlechtsspezifischen Abweichun- gen nach Schulform . . . . .	392
Tab. 8.6.1	Mögliche Klassenanzahlen für die Latente-Klassen- Analyse . . . . .	399
Tab. 8.6.2	Mittlere Klassenzuordnungswahrscheinlichkeiten . . .	401
Tab. 8.6.5	Geschlechterverhältnis innerhalb der Klassen . . . . .	408
Tab. 8.6.6	Lösungswahrscheinlichkeiten für die Aufgaben C <sub>4</sub> XF, P <sub>5</sub> CX sowie den Aufgaben, die qualitative Funktionen einbinden . . . . .	410
Tab. 8.7.1	Schätzwerte für die Reliabilität beider Tests . . . . .	415
Tab. 8.7.2	Häufigkeit der Codes nach dem Aufgabenklassifikati- onsmodell . . . . .	418
Tab. 9.1.1	Items mit Fit-Werten außerhalb des Intervalls [0.8, 1.2] .	435