Denkstrukturen in Lösungsansätzen von Modellierungsaufgaben

Xenia-Rosemarie Reit

Denkstrukturen in Lösungsansätzen von Modellierungsaufgaben

Eine kognitionspsychologische Analyse
schwierigkeitsgenerierender Aspekte

Springer Spektrum

Xenia-Rosemarie Reit
Frankfurt, Deutschland

Dissertation zur Erlangung des Doktorgrades der Naturwissenschaften angenommen
vom Fachbereich 12 der Johann Wolfgang Goethe-Universität in Frankfurt am Main,
2015

D30

Dekan: Prof. Dr. Uwe Brinkschulte
Erstgutachter: Prof. Dr. Reinhard Oldenburg
Zweitgutachter: Prof. Dr. Gilbert Greefrath
Datum der Disputation: 10.12.2015

ISBN 978-3-658-13188-3 ISBN 978-3-658-13189-0 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-13189-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist Teil von Springer Nature
Die eingetragene Gesellschaft ist Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH

Danksagung

Mein Dank gilt Prof. Dr. Reinhard Oldenburg für die Unterstützung und das Vertrauen während der Anfertigung dieser Arbeit. Weiterhin möchte ich mich bei Prof. Dr. Gilbert Greefrath, für sein entgegengebrachtes Interesse an meiner Arbeit bedanken.

Durch die finanzielle Unterstützung der Stiftung Polytechnische Gesellschaft war es mir möglich, all meine Zeit der Anfertigung dieser Arbeit zu widmen. Ich bin nicht zuletzt wegen der Seminare und der Möglichkeit des wissenschaftlichen Austauschs mit anderen, sehr dankbar Teil der polytechnischen Familie zu sein.

Weiterhin gilt mein Dank allen Kollegen, die meine Arbeit vorangebracht haben. Hanna, vielen Dank für die dringend nötigen Kaffeepausen und deine unermüdliche Motivation dich in meine Themen hineinzudenken.

Ganz herzlich möchte ich mich bei Matthias Ludwig für seine unendliche Geduld, die konstruktiven Antworten auf all meine Fragen und den Rückhalt während der letzten drei Jahre bedanken.

Meine Familie und Freunde standen mir mit Rat und Tat beiseite. Mein besonderer Dank gilt meinem Vater Hans-Gerd Reit für die fordernden Fragen, kritischen Diskussionen und die geduldige Unterstützung all meiner Pläne.

Abschließend möchte ich mich bei den fleißigen Korrekturlesern Jana, Henrieke, Verena und Lukas bedanken.

Zusammenfassung

Unter mathematischem Modellieren wird, vereinfacht ausgedrückt, der Prozess des Bearbeitens einer realen Problemsituation, unter Verwendung von Mathematik, verstanden. Als eine von sechs mathematischen Kompetenzen, wird dem mathematischen Modellieren eine bedeutende Stellung in den Bildungsstandards zuerkannt. Auch auf internationaler Ebene ist mathematisches Modellieren in Vergleichsstudien wie z.B. PISA (Programme for International Student Assessment) etabliert. Trotz des bildungspolitischen und fachdidaktischen Konsens über die Wichtigkeit mathematischen Modellierens in der Schule, zeigen einige Studien, dass der Anteil mathematischen Modellierens am Alltagsunterricht gering ist. In diesem Zusammenhang geht aus mehreren Untersuchungen hervor, dass dem mathematischen Modellieren im schulischen Kontext wenig Bedeutung beigemessen wird, wohingegen technische Aufgaben im Mittelpunkt des Unterrichtsgeschehens stehen. Eine detaillierte Auseinandersetzung mit den Implikationen einer unterrichtlichen Integration mathematischen Modellierens, bringt Schwierigkeiten und Hindernisse zu Tage, welche in Zusammenhang mit speziellen Charakteristika von Modellierungsaufgaben zu sehen sind. Eine Schwierigkeit ist die Vielfalt der zur Lösung möglichen Lösungswege und die damit verbundene Anwendbarkeit verschiedenster fachmathematischer Kenntnisse. Das führt dazu, dass Modellierungsaufgaben in vielerlei Hinsicht zunächst wenig überschaubar sind.

Die Ungleichheit zwischen bildungspolitischen Vorgaben und Schulalltag zeigt, dass vor allem diesbezüglich Handlungsbedarf besteht. Die vorliegende Arbeit knüpft an diese Problematik an, indem auf Basis tatsächlicher Schülerlösungen¹, eine systematische Erarbeitung schwierigkeitsgenerierender Aspekte in Lösungsansätzen von Modellierungsaufgaben, insbesondere aus kognitionspsychologi-

¹In der Arbeit wird der generische Maskulin verwendet. Dieser schließt aber stets auch die weibliche Form mit ein.

scher Sicht, erfolgt. Schülerlösungen, welche z.B. auf dem gleichen mathematischen Modell beruhen, werden zunächst zu Lösungsansätzen zusammengefasst. Anschließend wird die kognitive Struktur von Lösungsansätzen auf parallele bzw. sequentielle Denkopoperationen hin untersucht. Eine, aus der Kognitionspsychologie abgeleitete Hypothese ist, dass ein Zusammenhang zwischen der Anzahl parallel durchzuführender Denkopoperationen und der Schwierigkeit des jeweiligen Lösungsansatzes besteht. Ziel ist es, darauf aufbauend eine tragfähige Methode zu entwickeln, welche eine valide theoretische Einschätzung der Schwierigkeit von Lösungsansätzen erlaubt. Zusätzlich wird ein Bewertungsschema erarbeitet, das sich auf die kognitionspsychologischen Ansätze zur Schwierigkeit stützt. Durch einen Vergleich von theoretischer Schwierigkeit und durchschnittlicher Punktzahl des jeweiligen Lösungsansatzes, als Maß für dessen empirische Schwierigkeit, kann eine Aussage über die Validität einzelner Aspekte der erarbeiteten Methode zur Ermittlung der theoretischen Schwierigkeit getroffen werden. Eine Erweiterung der Methode auf komplette Modellierungsaufgaben, führt zur Beschreibung einer theoretischen Aufgabenschwierigkeit.

In der vorliegenden Arbeit werden fünf Modellierungsaufgaben entwickelt, von denen je drei zusammen in einem Testbooklet von circa 600 Gymnasialschülern der neunten Jahrgangsstufe bearbeitet werden. Für die Auswertung stehen circa 1800 Schülerlösungen zur Verfügung. Die Schülerlösungen werden in verschiedene Lösungsansätze eingeordnet und mit einem in der Arbeit entwickelten Bewertungsschemas bewertet. Die so ermittelte durchschnittliche Punktzahl eines Lösungsansatzes, wird mit der theoretischen Schwierigkeit des jeweiligen Lösungsansatzes, welche mit der in der Arbeit entwickelten Methode ermittelt wird, verglichen.

Die statistische Auswertung dieser Daten bestätigt die Vermutung, dass Denkopoperationen, welche innerhalb eines Lösungsansatzes parallel durchgeführt werden müssen, zu einer Verkomplizierung führen. Werden Modellierungsaufgaben als Ganzes in den Blick genommen, zeigt sich auch hier eine Präferenz für einen solchen Zusammenhang zwischen parallelen Denkopoperationen und Schwierigkeit. Allerdings deuten die Ergebnisse darauf hin, dass dieser weniger stark ausfällt. In diesem Zusammenhang unterstützen die Ergebnisse, das zumeist intuitive Vorgehen von Lehrkräften bei der Entwicklung eines Bewertungsschemas einer Mathematikaufgabe, bei dem wichtige Zwischenschritte einer Lösung identifiziert und bepunktet und anschließend zu einer Gesamtpunktzahl aufsummiert werden.

Die Ergebnisse, welche die Annahme einer Verkomplizierung durch Parallelität weitestgehend bestätigenden, stellen das Potential kognitionspsychologisch basierter Methoden im Bereich von Modellierungsaufgaben bezüglich Schwierigkeit

und Bewertung heraus. Zusätzlich kann dadurch ein wesentlichen Beitrag geleistet werden, die komplexe Struktur von Schülerlösungen von Modellierungsaufgaben zu verstehen und zu nutzen. Vor allem aus Sicht einer Lehrkraft ist dies ein wichtiger Schritt hin zu einer besseren Handhabbarkeit von Modellierungsaufgaben und folglich, deren alltagsunterrichtlicher Integration.

Abstract

Mathematical modelling can be seen, in simplified terms, as a process in which mathematics is used to elaborate on a realistic problem. Mathematical modelling is one of the six general mathematical competencies which are named in the German education standards for secondary education. At international level mathematical modelling is established in comparative studies, such as PISA (Programme for International Student Assessment). However, several studies confirm that the percentage of mathematical modelling in everyday school life is low. Regarding these findings, technical tasks are still the centre of mathematical teaching, whereas modelling tasks seem to be of little importance. A detailed examination of the implications of curricular integration of mathematical modeling, reveals difficulties and obstacles which can be associated with special characteristics of modelling tasks. The variety of possible solutions for solving modelling tasks and the related applicability of different kinds of mathematical knowledge, means that, in many respects, modelling tasks are not easily manageable.

The disparity between educational requirements and everyday school teaching shows that especially in this area a need for action can be identified. The present thesis builds on this issue by working out difficulty-generating aspects based on actual student solutions, particularly from a cognitive psychological perspective. At first student solutions which are based e.g. on the same mathematical model, are clustered into solution approaches. The cognitive structure of solution approaches is then analysed for parallel and sequential thought operations. A hypothesis derived from cognitive psychology is that the number of parallel thought operations has an influence on the difficulty of the respective solution approach. The aim is to develop a valid method to determine the theoretical difficulty of solution approaches. In addition, an assessment scheme is developed which is based on the cognitive psychological approach used for the determination of difficulty. By comparison

of theoretical difficulty and average score of the respective solution approach as a measure for the empirical difficulty, a statement can be made about the validity of different aspects of the developed method for the determination of difficulty. An extension of the method to complete modelling tasks results in a description of a theoretical task difficulty.

In the present thesis five modelling tasks have been developed. The test booklets consisted of three modelling tasks each and have been solved by ca. 600 high school students of the 9th grade (15 to 16 years of age). Thus, ca. 1800 student solutions were available for evaluation. The student solutions were classified into different solution approaches and scored on the basis of an assessment scheme developed within this thesis. The average score of a solution approach, as a measure for the empirical difficulty, has then been quantitatively compared to the respective theoretical difficulty which was determined by the developed method.

The statistical analysis of this data confirms the assumption that thought operations being processed in parallel within one solution approach, lead to a complication of the respective solution approach. In view of complete modelling tasks, the results show a similar preference for a relation between parallel thought operations and difficulty, however, this relation turns out to be less dominant. In this context, the results support a mostly intuitive approach of teachers in developing an assessment scheme of mathematics tasks by identifying and scoring important intermediate steps which are then added up to a total score.

The results which most closely confirm the hypothesis of a complication by parallelism of thought operations, point out the potential of cognitive psychological based methods in the area of modelling tasks concerning both difficulty and assessment. Additionally a significant contribution is made to understand and make use of the complex structure of student solutions of modelling tasks. Especially from a teachers' point of view this is an important step towards a better manageability and thus, an integration of modelling tasks to everyday school life.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
I	Theoretische Grundlagen	3
2	Mathematisches Modellieren	5
2.1	Begriffsdefinition	5
2.1.1	Mathematisches Modell	6
2.1.2	Mathematisches Modellieren	8
2.1.3	Modellierungskreislauf	11
2.1.4	Modellierungsaufgaben	16
2.2	Zielsetzungen	19
3	Mathematisches Modellieren im Mathematikunterricht	25
3.1	Mathematisches Modellieren im Schulalltag	26
3.2	Schwierigkeiten und Hindernisse	27
3.2.1	Organisatorische Hindernisse	28
3.2.2	Schülerbezogene Hindernisse	29
3.2.3	Materialbezogene Hindernisse	30
3.2.4	Lehrerbezogene Hindernisse	31
3.3	Bewertung von Modellierungsaufgaben	33
3.4	Aufgabenschwierigkeit	38
3.5	Folgerungen für die vorliegende Arbeit	41

II	Forschungsansatz und Zielsetzung	43
4	Forschungsfragen	45
5	Schwierigkeit von Modellierungsaufgaben	49
5.1	Die Struktur von Lösungsansätzen	50
5.1.1	Beziehung zu Modellbildungssoftware	53
5.1.2	Der Zusammenhang von Lösungsstruktur und Schwierigkeit	57
5.2	Denkstrukturanalyse	58
5.2.1	Verortung von Denkopoperationen in der Denkstruktur . . .	64
5.3	Denkstrukturen und das Arbeitsgedächtnis	70
5.4	Komplexität der Aufgabenstellung	72
5.5	Modelle zur Bestimmung der Schwierigkeit von Lösungsansätzen	77
III	Methode	85
6	Konzeption der Studie	87
6.1	Ablauf und Stichprobe	87
6.2	Aufgabenentwicklung	89
6.2.1	Kriterien zur Entwicklung der Modellierungsaufgaben . .	90
6.3	Die Modellierungsaufgaben	91
6.3.1	Taj Mahal	91
6.3.2	Kartoffel	93
6.3.3	Cola	95
6.3.4	Tennisschläger	97
6.3.5	Brücke	99
7	Komplexität der Aufgabenstellung	103
8	Kategorisierung von Schülerlösungen	107
8.1	Lösungsansätze Taj Mahal	108
8.1.1	Lösungsansatz Fläche	110
8.1.2	Lösungsansatz Zeilen/Spalten	113
8.1.3	Lösungsansatz Etage	116
9	Denkstrukturen und Schwierigkeitsgrad	119
9.1	Denkstrukturanalyse Taj Mahal	119
9.1.1	Fläche	121
9.1.2	Lösungsansatz Zeilen/Spalten	124

9.1.3	Lösungsansatz Etage	126
9.2	Theoretische Schwierigkeit der Lösungsansätze Taj Mahal	129
10	Bewertungsschema	131
10.1	Entwicklung eines Bewertungsschemas	132
10.2	Bewertungsschemata Taj Mahal	133
10.2.1	Lösungsansatz Fläche	134
10.2.2	Lösungsansatz Zeilen/Spalten	137
10.2.3	Etage	139
IV	Ergebnisse, Diskussion und Ausblick	141
11	Ergebnisse und Auswertung	143
11.1	Lösungsraum der Modellierungsaufgaben	145
11.2	Empirische Schwierigkeit	148
11.3	Vergleich von empirischer und theoretischer Schwierigkeit	154
11.3.1	Regressionsmodelle und Gütemaß	154
11.3.2	Empirische und theoretische Schwierigkeit der Lösungsansätze	158
11.3.3	Empirische und theoretische Schwierigkeit der Modellierungsaufgaben	167
12	Diskussion der Ergebnisse	173
12.1	Lösungsraum der Modellierungsaufgaben	173
12.2	Analyse der empirischen Schwierigkeit	175
12.3	Analyse des theoretischen und empirischen Schwierigkeitsvergleichs auf Ebene der Lösungsansätze	176
12.4	Analyse des theoretischen und empirischen Schwierigkeitsvergleichs auf Ebene der Modellierungsaufgaben	178
13	Zusammenfassung und Ausblick	181
 Anhang		
A	Test-Booklets	185
B	Analyse der restlichen Modellierungsaufgaben	193
B.1	Modellierungsaufgabe <i>Kartoffel</i>	194
B.1.1	Lösungsansätze	194

B.1.2	Denkstrukturanalyse	204
B.1.3	Bewertungsschemata	211
B.2	Modellierungsaufgabe <i>Cola</i>	216
B.2.1	Lösungsansätze	216
B.2.2	Denkstrukturanalyse	224
B.2.3	Bewertungsschemata	229
B.3	Modellierungsaufgabe <i>Tennisschläger</i>	233
B.3.1	Lösungsansätze	233
B.3.2	Denkstrukturanalyse	241
B.3.3	Bewertungsschemata	246
B.4	Modellierungsaufgabe <i>Brücke</i>	250
B.4.1	Lösungsansätze	250
B.4.2	Denkstrukturanalyse	256
B.4.3	Bewertungsschemata	264
C	Anhänge zur statistischen Auswertung	269
	Abbildungsverzeichnis	279
	Tabellenverzeichnis	285
	Literaturverzeichnis	291

Kapitel 1

Einleitung

In der mathematikdidaktischen Diskussion findet das mathematische Modellieren seit einigen Jahrzehnten besondere Beachtung. Dies manifestiert sich nicht zuletzt insbesondere in der ersten und dritten von Winter (1995, S. 37) formulierten Grunderfahrung, welche insgesamt den Beitrag des Fachs Mathematik zur Allgemeinbildung herausstellen:

„(1) Erscheinungen der Welt um uns, die uns alle angehen oder angehen sollten, aus Natur, Gesellschaft und Kultur, in einer spezifischen Art wahrzunehmen und zu verstehen,

(2) mathematische Gegenstände und Sachverhalte, repräsentiert in Sprache, Symbolen, Bildern und Formeln, als geistige Schöpfungen, als eine deduktiv geordnete Welt eigener Art kennen zu lernen und zu begreifen,

(3) in der Auseinandersetzung mit Aufgaben Problemlösefähigkeiten, die über die Mathematik hinaus gehen, (heuristische Fähigkeiten) zu erwerben.“

Als eine von sechs mathematischen Kompetenzen nimmt das mathematische Modellieren auch in den Bildungsstandards für das Fach Mathematik eine Schlüsselrolle ein (Kultusministerkonferenz, 2004). Auf internationaler Ebene wird dem mathematischen Modellieren als fester Bestandteil von Leistungsstudien wie PISA (Programme for International Student Assessment) oder TIMSS (Trends in International Mathematics and Science Study) eine besondere Bedeutung zuerkannt.

Somit herrscht bildungspolitisch und fachdidaktisch weitestgehend Einigkeit über die Relevanz der unterrichtlichen Integration von mathematischem Modellieren. Verschiedene Studien deuten jedoch darauf hin, dass die unterrichtliche Wirklichkeit diesen Konsens nur bedingt widerspiegelt (siehe z.B. Drücke-Noe, 2014; Hiebert et al., 2003; Jordan et al., 2008; Kunter et al., 2006). Die Suche nach Gründen für diese Situation lässt ein breites Spektrum an Ansatzpunkten zu. So können u.a. organisatorische, material-, schüler- und lehrerbezogene Hindernisse identifiziert werden (Blum, 1996, S. 17ff), welche die unterrichtliche Integration von Modellierungsaufgaben erschweren. Aus Lehrerperspektive, als Exekutive bildungspolitischer und curricularer Vorgaben, haben mehrere Studien gezeigt, dass Aspekte wie Zeitumfang und Bewertung maßgebliche Hindernisse für die Integration von Modellierungsaufgaben darstellen (siehe z.B. Gainsbourg, 2008; Schmidt, 2009). Die Verwendungsmöglichkeit verschiedener Lösungsansätze führt dazu, dass Modellierungsaufgaben im Allgemeinen zunächst schwer zu überblicken sind. Dies kann dazu beitragen, dass deren unterrichtliche Integration als mit Schwierigkeiten behaftet angesehen wird.