Zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht

Thomas Bardy

Zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematik- unterricht

Mit einem Geleitwort von
Prof. Dr. Angelika Bikner-Ahsbals
und Prof. Dr. Gerald Wittmann

Springer Spektrum

Thomas Bardy
Weil am Rhein, Deutschland

Dissertation Universität Bremen, 2015

ISBN 978-3-658-10258-6 ISBN 978-3-658-10259-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-10259-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Geleitwort

Wie wird Geltung mathematischen Wissens im alltäglichen Mathematikunterricht hergestellt? Das ist die zentrale Frage der vorliegenden Arbeit von Thomas Bardy. Diese Frage ist von großer Bedeutung, weil Lernende im Verlauf von Erarbeitungs- wie Übungsphasen erkennen sollten, welches Wissen nun Geltung für den weiteren Unterricht hat und warum dieses Wissen gelten soll. Nur dann können sie beispielsweise mathematische Konventionen übernehmen oder sich mathematische Kommunikations- und Argumentationsformate aneignen.

Um die Frage nach der Herstellung von Geltung im alltäglichen Mathematikunterricht zu beantworten, klärt Thomas Bardy zunächst die relevanten Begriffe. Hilfreich dabei erweist sich ein Blick in andere Bereiche, unter anderem Rechtsphilosophie oder Sport, und wie dort Geltung und Gültigkeit unterschieden werden. So fallen beim Fußball Tore, die aufgrund einer Schiedsrichterentscheidung gelten, sich später aber als nicht gültig herausstellen, weil der Ball nicht wirklich im Tor gelandet war. Und es gibt Tore, die eigentlich gültig sind, aber dennoch nicht gelten, weil der Schiedsrichter sie in einer Fehlentscheidung verweigert hat. Geltung verlangt also stets einen sozialen Akt der Übereinkunft, während Gültigkeit dann vorliegt, wenn es Normen oder Regeln gibt, die diese Übereinkunft belegen oder begründen können.

Diese Begriffsklärung erlaubt es Thomas Bardy, seine Forschungsfrage auch empirisch anzugehen: Er untersucht, auf welche Weise Lehrkräfte bestimmten Wissenselementen Geltung verleihen. Dazu nutzt er Videodaten zur Einführung des Ableitungsbegriffs von zehnten Gymnasialklassen und ergänzt diese durch Videodaten zum Beweis des Satzes des Pythagoras in Realschulklassen. Durch Nachinterviews mit Lehrkräften können darüber hinaus auch Begründungen für deren Handeln explizit erhoben oder rekonstruiert werden. Über die Analyse dieser Daten gewinnt Thomas Bardy Formen der Herstellung von Geltung, die er zu den Kategorien *konventionell*, *konsensuell* und *argumentativ* zusammenfassen kann. In welcher Häufigkeit diese Formen im Alltagsunterricht auftreten, wird mit einem standardisierten Beobachtungsbogen in insgesamt 162 zufällig herausgegriffenen Schulstunden erfasst. So stellt die Arbeit nicht zuletzt ein gelungenes Beispiel der Verknüpfung qualitativer und quantitativer Methoden dar.

Die Herstellung von Geltung ist so alltäglich, dass man sie bislang wissenschaftlich übersehen hat. Sie nimmt etwa die Hälfte der Unterrichtszeit ein. Dabei herrschen konventionelle Formen der Herstellung von Geltung wie z.B. der Verweis auf

Autoritäten oder das Lehrbuch vor, während argumentative Formen selbst beim Beweisen kaum auftreten. Dieses Ergebnis ist schon sehr verblüffend. Mit den drei schulisch relevanten Wissensformen (Gebrauchswissen, Erfahrungswissen, Begründungswissen) versteht man wiederum, wie das geschehen kann. So werden selbst der Satz des Pythagoras und sein Beweis als Gebrauchswissen und nicht als Begründungswissen vermittelt. Mit anderen Worten: Das Handeln von Lehrkräften zielt in vielen Fällen nicht darauf, den Satz des Pythagoras wirklich zu beweisen, sondern vielmehr darauf, ihn beim Lösen entsprechender Aufgabenstellungen einsetzen zu können. Dies ist insofern problematisch, als Lehrkräften dieser Aspekt häufig nicht bewusst ist und sie demzufolge auch ihre Absicht den Lernenden gegenüber nicht immer transparent machen. Damit zeichnet auch die vorliegende Arbeit ein sehr ernüchterndes Bild davon, wie gemeinsam geltendes Wissen im Unterrichtsalltag konstruiert wird.

Thomas Bardy gelingt es – gleichermaßen theoretisch wie empirisch fundiert – darzustellen, welche Bedeutung die Herstellung von Geltung im Mathematikunterricht besitzt, welche unterschiedlichen Formen der Herstellung von Geltung dort vorkommen und in welcher Häufigkeit sie auftreten. Er gestattet damit einen aufschlussreichen Blick hinter die Fassade des alltäglichen Mathematikunterrichts und liefert einen wichtigen Beitrag, dessen Praxis zu beschreiben und zu verstehen. Es bleibt deshalb zu hoffen, dass die vorliegende Arbeit intensiv rezipiert wird und der mathematikdidaktischen Diskussion entsprechende Impulse geben kann!

Bremen und Freiburg, im März 2015

Angelika Bikner-Ahsbals und Gerald Wittmann

Dank

Nachdem mir im Spätsommer 2008 am Fachbereich 3 der Universität Bremen im Bereich Didaktik der Mathematik bei Frau Prof. Dr. Angelika Bikner-Ahsbahs die Möglichkeit eröffnet wurde, ein Promotionsprojekt zu starten, nutzte ich die Gelegenheit und begann, – neben meiner Lehrtätigkeit – im Rahmen einer Abordnung auf eine halbe Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter zum Thema „Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht“ zu forschen.

Neben der wissenschaftlichen Tätigkeit an der Universität hatte ich auf diese Weise auch noch (fast) täglichen Kontakt zur Klientel, die im Mittelpunkt meiner Forschung stand: zu Lehrpersonen sowie zu Schülerinnen und Schülern.

Ich bedanke mich sehr herzlich bei meiner Betreuerin, Frau Prof. Dr. Angelika Bikner-Ahsbahs, für die Motivation, das Promotionsprojekt zu starten, die zahlreichen Hinweise und Ratschläge, das Durcharbeiten erster Manuskripte und die wertvolle Unterstützung in den zurückliegenden Jahren. Hierbei sollen auch die Teilnehmerinnen und Teilnehmer am Forschungskolloquium im Bereich Didaktik der Mathematik der Universität Bremen mit ihren wichtigen Hinweisen und konstruktiv kritischen Bemerkungen nicht vergessen werden.

Nach einer Fortbildungswoche an der Summer School der Universität Hannover im Sommer 2009 zum Thema „Methodenqualifizierungsprogramm für Doktoranden, qualitative und quantitative Sozialforschung“ begann ich, meine Lebensplanung zu ändern. Dort lernte ich meine jetzige Ehefrau Katrin Bölsterli Bardy kennen.

Nach meinem Umzug im Januar 2011 nach Basel und der Versetzung an das Georg-Büchner-Gymnasium im südbadischen Rheinfelden musste ich meine Mitarbeiterstelle an der Universität Bremen aufgeben und führte von nun an parallel zu einer vollen Deputatsverpflichtung an dieser Schule mein Promotionsprojekt fort. Dabei hat mich neben meiner Betreuerin auch Herr Prof. Dr. Gerald Wittmann von der PH Freiburg im Breisgau unterstützt. Bei den Treffen in Freiburg erhielt ich immer wertvolle Impulse und Perspektiven für mein Projekt. Dafür danke ich Gerald Wittmann sehr herzlich.

Neben dem genannten fachlichen Ansporn motivierte mich auch die tägliche Schreibarbeit mit meiner Frau Katrin im gemeinsamen Arbeitszimmer in Basel. Ihr danke ich ganz besonders für ihre Unterstützung (z.B. bei der Literaturbeschaffung) und die wertvollen Hinweise zur Gestaltung meiner Studie sowie zum Layout.

Außerdem danke ich Frau Dr. Helga Jungwirth (München) für ihre Impulse und Ratschläge zum Vorgehen in der interpretativen Unterrichtsforschung zu Beginn meiner Untersuchungen, die ich im Rahmen ihres Seminars an der Universität Bremen (im Sommersemester 2009), aber auch im gemeinsamen Büro an der Universität

Bremen erfahren durfte, sowie Frau Prof. Dr. Christine Pauli (Universität Fribourg), Herrn Prof. Dr. Kurt Reusser (Universität Zürich) und Herrn Prof. Dr. Eckhard Klieme (DIPF Frankfurt a.M.) für die Bereitstellung von Videoaufnahmen und Transkripten zu Unterrichtsreihen zum „Satz des Pythagoras“ aus der schweizerisch-deutschen Videostudie „Unterrichtsqualität, Lernverhalten und mathematisches Verständnis“.

Inhaltsverzeichnis

0 Überblick über die Studie	1
1 Begriffsklärungen.....	9
1.1 Zum Wissensbegriff.....	9
1.1.1 Der schwache und der starke Wissensbegriff nach R. HOFER.....	12
1.1.2 Mathematisches (Schul-)Wissen	16
1.1.3 Begründungs-, Gebrauchs- und Erfahrungswissen	18
1.2 Zum Begriff „Geltung“	22
1.2.1 „Geltung“ und „Gültigkeit“ in der Philosophie	22
1.2.2 „Geltung“ und „Gültigkeit“ in der Rechtstheorie und in der Rechtsprechung	24
1.2.3 „Herstellung von Geltung“ im Mathematikunterricht.....	25
2 Annäherung an den Forschungsgegenstand.....	35
2.1 Bereits vorliegende Forschungsansätze und -ergebnisse.....	35
2.1.1 Zu Interaktionen im Klassenzimmer.....	36
2.1.2 Zum Argumentieren, Begründen und Beweisen im Mathematikunterricht.....	50
2.2 Zuordnung des theoretischen Konzepts dieser Studie zu Theorien.....	57
2.2.1 Zur „Enkulturation“	57
2.2.2 Zur „Akkulturation“	59
2.2.3 Zur „Institutionalisierung“	61
2.2.4 „Herstellung von Geltung mathematischen Wissens“ als Teilaspekt von Enkulturation und Akkulturation sowie als Oberbegriff von Institutionalisierung.....	62
2.3 Desiderata der bisherigen Forschung	63
2.4 Hauptziel der Studie und Forschungsfragen	67
2.5 Sozial-konstruktivistischer Ansatz	68
2.6 Zu „allgemeinen Sozialnormen“ und „soziomathematischen Normen“ im Mathematikunterricht.....	73
3 Theorie und Methodologie	77
3.1 Forschung und Theorie in der Mathematik-Didaktik.....	77
3.2 Grounded Theory	78
3.2.1 Vorgehensweise gemäß der Grounded Theory	79
3.2.2 Kritische Reflexion der Grounded Theory	83
3.2.3 Gütekriterien für an Grounded Theory orientierte Forschung	85
3.3 Qualitatives Forschungsparadigma und gemischte Forschungsdesigns	95
3.3.1 Grundsätzlicher Ablauf eines Forschungsprozesses	95
3.3.2 Untersuchungsdesigns im Überblick.....	99

3.3.3 Probleme und Grenzen methodologischer Programme	105
4 Untersuchungsdesign	107
4.1 Überblick über das methodische Vorgehen	107
4.2 Datenerhebung und Datenaufbereitung	109
4.2.1 Videoaufnahmen	109
4.2.1.1 Möglichkeiten und Grenzen videogestützter Unterrichtsforschung	109
4.2.1.2 Videoaufnahmen zu drei Unterrichtseinheiten „Einführung in die Differenzialrechnung“	111
4.2.1.3 Videoaufnahmen zu drei Unterrichtseinheiten „Satz des Pythagoras“	112
4.2.2 Unterrichtsbeobachtungen zu weiteren mathematischen Themen	112
4.2.3 Lehrerinterviews	115
4.2.3.1 Befragungsarten	115
4.2.3.2 Gestaltung von Interviews	117
4.2.3.3 Ziele von Interviews	119
4.2.3.4 Probleme bei Interviews	119
4.2.3.5 Vorgehen in dieser Studie	120
4.3 Datenanalyse	122
4.3.1 Vorgehensweise gemäß der Grounded Theory in der vorliegenden Studie	122
4.3.2 Analyse der erhobenen Daten	125
4.3.3 Idealtypenbildung	129
4.3.3.1 Der Typusbegriff und Idealtypenbildung	129
4.3.3.2 Zum Vorgehen der Idealtypenbildung in dieser Studie	134
4.3.3.3 Fallrekonstruktionen: einzelne Fälle darstellen	135
4.3.3.4 Fallrekonstruktionen und Gruppierung der Fälle	140
4.3.3.5 Bildung von Prototypen durch Kontrastierung	140
4.3.3.6 Bildung von Idealtypen	141
4.3.3.7 Rekontextualisierung	141
5 Ergebnisse der Datenanalyse	143
5.1 Formen, Kategorien und Modi der Herstellung von Geltung	143
5.2 Ausgewählte Beispiele zu einzelnen Formen der Herstellung von Geltung	150
5.3 Mit den Kategorien der Herstellung von Geltung verbundene allgemeine Sozialnormen und soziomathematische Normen	153
5.4 Verteilungen der Formen der Herstellung von Geltung bei den Unterrichtsstunden zur Einführung in die Differenzialrechnung	156
5.5 Zur Herstellung von Geltung in den inhaltlich zentralen Stunden bei der Einführung in die Differenzialrechnung	165
5.6 Verteilungen der Formen der Herstellung von Geltung bei den Unterrichtsstunden zum Satz des Pythagoras	168

5.7 Zur Herstellung von Geltung in den inhaltlich zentralen Stunden beim Satz des Pythagoras	173
5.8 Verteilungen der Kategorien der Herstellung von Geltung bei den Unterrichtsstunden zu weiteren mathematischen Themen	174
5.9 Anteil der Herstellung von Geltung an der gesamten Unterrichtszeit	177
6 Typen von Mathematikstunden im Hinblick auf die Herstellung von Geltung	185
6.1 Typenbildung durch Komparation	185
6.2 Prototypen	191
6.3 Idealtypen	200
6.4 Rekontextualisierung	205
7 Zusammenfassung und Ausblick	209
7.1 Zusammenfassung der Ergebnisse	209
7.2 Konsequenzen aus mathematik-didaktischer Perspektive	213
7.2.1 Zur Theorieentwicklung	213
7.2.2 Zu methodischen Vorgehensweisen	215
7.2.3 Zur Mathematiklehreraus- und -fortbildung	216
7.2.4 Zur Unterrichtspraxis	218
7.3 Offene Fragen und Ausblick	220
Literatur	223
Anhang	245

Abbildungsverzeichnis

Abbildung 1: Annäherung an die Thematik	2
Abbildung 2: Transkriptausschnitt I	31
Abbildung 3: Transkriptausschnitt II	31
Abbildung 4: Vorgehen bei einer empirischen Untersuchung (FOSCHT, ANGERER & SWOBODA, 2007, 250)	96
Abbildung 5: Untersuchungsdesigns im Überblick (nach FOSCHT ET AL., 2007, 253).....	99
Abbildung 6: Typen von mehrgleisigen gemischten Designs im Überblick (FOSCHT ET AL., 2007, 254)	101
Abbildung 7: eigenes Forschungsdesign (nach FOSCHT ET AL., 2007, 254).....	102
Abbildung 8: methodisches Vorgehen.....	108
Abbildung 9: Ausschnitt eines ausgefüllten Beobachtungsbogens	114
Abbildung 10: zeitliche Anteile der Kategorien bei den Stunden 29 bis 35	115
Abbildung 11: Ausschnitt eines Episodenplans.....	126
Abbildung 12: Beispiele zur Form 1.3.3 der Herstellung von Geltung.....	127
Abbildung 13: zeitlicher Anteil der Kategorien in Stunde 2	128
Abbildung 14: zeitlicher Anteil der Formen in Stunde 2	128
Abbildung 15: zeitlicher Anteil der Herstellung von Geltung in Stunde 21	129
Abbildung 16: Transkriptausschnitt III	135
Abbildung 17: Transkriptausschnitt IV.....	136
Abbildung 18: Transkriptausschnitt V	136
Abbildung 19: Transkriptausschnitt VI.....	137
Abbildung 20: mehrere Transkriptausschnitte.....	137
Abbildung 21: Formen der Herstellung von Geltung in Stunde 9	139
Abbildung 22: Kategorien-Profile der Stunden 1 bis 6	140
Abbildung 23: Kategorien-Profile der Stunden 50 bis 56	140
Abbildung 24: Aufteilung in Modi und Kategorien	145
Abbildung 25: Formen der Herstellung von Geltung bei Modus 1.....	146
Abbildung 26: Formen der Herstellung von Geltung bei Modus 2.....	149
Abbildung 27: Transkriptausschnitt VII.....	151
Abbildung 28: Transkriptausschnitt VIII.....	151
Abbildung 29: Transkriptausschnitt IX.....	152
Abbildung 30: Transkriptausschnitt X.....	152
Abbildung 31: Gesamtzeitspannen und Anzahlen des Auftretens der Kategorien.....	154
Abbildung 32: Gesamtzeitspannen der Formen in den Stunden 1 bis 28.....	155

Abbildung 33: Verteilung der Formen in Stunde 5	157
Abbildung 34: Verteilung der Formen in Stunde 10	157
Abbildung 35: Verteilung der Formen in Stunde 18	158
Abbildung 36: Gesamtzeitspanne Modus 1 und Modus 2 in den Stunden 1 bis 19	159
Abbildung 37: Verteilung der Formen in den Stunden 1 bis 6	159
Abbildung 38: Verteilung der Formen in den Stunden 7 bis 12	160
Abbildung 39: Verteilung der Formen in den Stunden 13 bis 19	160
Abbildung 40: Transkriptausschnitte I LP 1	161
Abbildung 41: Transkriptausschnitte II LP 1	161
Abbildung 42: Transkriptausschnitt III LP 1	161
Abbildung 43: Transkriptausschnitt IV LP 1	161
Abbildung 44: Transkriptausschnitte V LP 1	161
Abbildung 45: Transkriptausschnitt VI LP 1	162
Abbildung 46: Transkriptausschnitt I LP 2	162
Abbildung 47: Transkriptausschnitte II LP 2	162
Abbildung 48: Transkriptausschnitte III LP 2	163
Abbildung 49: Transkriptausschnitte IV LP 2	163
Abbildung 50: Transkriptausschnitte V LP 2	163
Abbildung 51: Transkriptausschnitte VI LP 2	163
Abbildung 52: Transkriptausschnitte I LP 3	164
Abbildung 53: Transkriptausschnitte II LP 3	164
Abbildung 54: Transkriptausschnitte III LP 3	164
Abbildung 55: Transkriptausschnitt IV LP 3	165
Abbildung 56: Transkriptausschnitt VII LP 1	166
Abbildung 57: Transkriptausschnitte VII LP 2	166
Abbildung 58: Transkriptausschnitt V LP 3	167
Abbildung 59: Transkriptausschnitt VI LP 3	167
Abbildung 60: Verteilung der Formen in Stunde 21	169
Abbildung 61: Verteilung der Formen in Stunde 24	170
Abbildung 62: Verteilung der Formen in Stunde 28	170
Abbildung 63: Gesamtzeitspanne Modus 1 und Modus 2 in den Stunden 20 bis 28	171
Abbildung 64: Verteilung der Formen in den Stunden 20 bis 22	171
Abbildung 65: Verteilung der Formen in den Stunden 23 bis 25	171
Abbildung 66: Verteilung der Formen in den Stunden 26 bis 28	172
Abbildung 67: Kategorien Stunden 29 bis 35	175
Abbildung 68: Kategorien Stunden 43 bis 49	175

Abbildung 69: Kategorien Stunden 50 bis 56	175
Abbildung 70: Kategorien Stunden 57 bis 63	176
Abbildung 71: Kategorien Stunden 92 bis 98	176
Abbildung 72: Kategorien Stunden 155 bis 162	176
Abbildung 73: zeitlicher Anteil der Herstellung von Geltung	178
Abbildung 74: Anteile Stunde 1	178
Abbildung 75: Anteile Stunde 8	178
Abbildung 76: Anteile Stunde 26	179
Abbildung 77: Anteile Stunde 27	179
Abbildung 78: Anteile Stunde 5	179
Abbildung 79: Anteile Stunde 10	180
Abbildung 80: Anteile Stunde 18	181
Abbildung 81: Anteile Stunde 21	181
Abbildung 82: Anteile Stunde 24	181
Abbildung 83: Anteile Stunde 28	182
Abbildung 84: Anteil von Sonstigem	183
Abbildung 85: Anteil von Einzel- / Partner- / Gruppenarbeit	183
Abbildung 86: Anteile Stunde 29	183
Abbildung 87: Anteile Stunde 44	184
Abbildung 88: Anteile Stunde 35	184
Abbildung 89: Verteilung Stunden 1 bis 162	187
Abbildung 90: 3D-Verteilung Stunden 1 bis 162	187
Abbildung 91: Verteilungen Stunden 7 bis 12	192
Abbildung 92: Verteilungen Stunden 13 bis 19	192
Abbildung 93: Verteilungen Stunden 20 bis 27	192
Abbildung 94: Verteilung der Kategorien in Stunde 12	193
Abbildung 95: Verteilungen Stunden 52 bis 59	193
Abbildung 96: Verteilung der Formen in Stunde 12	194
Abbildung 97: Verteilung der Kategorien in Stunde 14	194
Abbildung 98: Verteilungen Stunden 100 bis 107	195
Abbildung 99: Verteilung der Formen in Stunde 14	195
Abbildung 100: Verteilung der Kategorien in Stunde 24	196
Abbildung 101: Verteilung der Formen in Stunde 24	196
Abbildung 102: Verteilung der Kategorien in Stunde 15	197
Abbildung 103: Verteilung der Formen in Stunde 15	197
Abbildung 104: Verteilungen Stunden 44 bis 51	198

Abbildung 105: Verteilungen Stunden 68 bis 75	198
Abbildung 106: Prototypen von Stunden	199
Abbildung 107: Dimensionalisierung der Idealtypen	204
Abbildung 108: Verteilungen Stunden 1 bis 6	205
Abbildung 109: Verteilungen Stunden 7 bis 12	205
Abbildung 110: Verteilungen Stunden 13 bis 19	206
Abbildung 111: Verteilungen Stunden 20 bis 27	206
Abbildung 112: Verteilungen Stunden 28 bis 35	207
Abbildung 113: idealtypische Unterrichtsepisoden.....	207

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Vergleich „Herstellung von Geltung“ mit „Enkulturation“, „Akkulturation“ und „Institutionalisierung“ sowie deren Bezug zum „mathematischen Wissen“	63
Tabelle 2: Ein Rahmen zur Analyse gemeinsamer und individueller mathematischer Aktivitäten und des Lernens (COBB ET AL., 2001, 119).....	74
Tabelle 3: Übersicht über die gewonnenen Prototypen	199
Tabelle 4: Übersicht über die gewonnenen Idealtypen	204

Schulisches Lernen erfordert die subjektive Akzeptanz der Geltung des Gelernten, d.h. die Anerkennung von Gründen. (R. HOFER, 2010, 510)

0 Überblick über die Studie

Im Mathematikunterricht geht es u.a. darum, dass Schülerinnen und Schülern durch eine Lehrperson mathematische Inhalte vermittelt werden, die verbindlich sind und im Rahmen von Lernkontrollen abgeprüft werden können. Ziel der „Herstellung von Geltung“ mathematischer Inhalte im Mathematikunterricht ist ein „verbindliches Wissen“ in der Klasse, auf das sich alle Beteiligten immer wieder beziehen und berufen können. Das „gemeinsam geteilte, geltende“ Wissen, welches sowohl verbindlich ist als auch von den Lernenden akzeptiert wird, ist durch das mathematische Wissen der Lehrperson bestimmt sowie durch das Alltagswissen und das mathematische (Vor-) Wissen der Lernenden beeinflusst (siehe Abbildung 1). Andererseits verändert und erweitert das „gemeinsam geteilte, geltende Wissen“ das mathematische Wissen der Lernenden.

Zu beachten ist weiter, dass ein mathematischer Inhalt in einer Klasse „Geltung“ haben kann, ohne dass alle Lernenden ihn verstanden haben. Denn die interpretative Unterrichtsforschung geht von der theoretischen Grundannahme aus, dass die „Bedeutung eines Unterrichtsgegenstandes, einer mathematischen Aufgabe, einer Lehrerfrage usw. [...] nicht einfach objektiv vorliegt, T. B.], sie wird nicht passiv erfahren, sondern sie wird vom Subjekt innerhalb eines Kontextes konstruiert“ (MAIER & VOIGT, 1991, 9). Dies geschieht, „indem es [das Subjekt, T. B.] deutet, wie andere Subjekte damit umgehen“ (a.a.O., 9).

Durch diesen Vergleich, wie andere Subjekte damit umgehen, kann eine „subjektive Akzeptanz“ (siehe das Zitat von R. HOFER auf dieser Seite) der „Geltung“ des Gelernten durch jeden einzelnen Lernenden entstehen, dies eventuell auch notgedrungen, um z.B. bei Lernkontrollen gut abschneiden zu können.

In dieser Studie¹ wird nicht untersucht, ob „Geltung“ längerfristig oder gar dauerhaft entstanden ist. Hier geht es um den kurzfristigen Akt der „Herstellung von Geltung“ mathematischen Wissens im Unterricht.

Nun stellt sich aber die Frage, welche Möglichkeiten einer Lehrperson konkret zur Verfügung stehen, diese „Geltung“ mathematischen Wissens im Unterricht herzustellen. Aus der Perspektive der Lernenden ergibt sich die Frage, welche Inhalte im

¹ Wenn hier und im Folgenden von „dieser Studie“ oder „der vorliegenden Studie“ gesprochen wird, ist immer die gesamte Arbeit gemeint, nicht nur ihr empirischer Teil.

Mathematikunterricht „geltend“ sind, d.h. welche Inhalte in einer Prüfung abrufbar sein müssen.

Empirische Daten zur Beantwortung dieser beiden Fragestellungen aus Lehrpersonen- bzw. Lernenden-Sicht fehlen bislang. Aus diesem Grund wird in der vorliegenden Studie dieses Desideratum für den Mathematikunterricht geschmälert. Daraus ergibt sich folgende zentrale Fragestellung dieser Studie: Wie erlangt mathematisches Wissen im Unterrichtsgeschehen „Geltung“ bei Schülerinnen und Schülern?

Die Studie behandelt somit das Thema „Herstellung von Geltung mathematischen Wissens im Mathematikunterricht“ und versucht, in seine einzelnen Facetten einzudringen.

Abbildung 1: Annäherung an die Thematik²

Abbildung 1 beinhaltet in ersten Überlegungen, dass es als Antwort auf diese zentrale Fragestellung drei theoretische Möglichkeiten gibt, wie „Modi“ von „Formen“ der Herstellung von Geltung im Mathematikunterricht in grober Differenzierung benannt werden können:

- **Lehrerzentrierte Formen:** die Lehrperson versucht, bei ihren Schülerinnen und Schülern Geltung mathematischer Inhalte zu erzeugen (die Lehrperson nimmt hierbei eine sehr aktive Rolle ein).
- **Situationszentrierte Formen:** die Lehrperson und die Lernenden versuchen gemeinsam, in Interaktionen³ Geltung mathematischer Inhalte innerhalb der Klassenge-

² Die zwei Comic-Bilder sind Ausschnitte eines Bildes; siehe BUNDESZENTRALE FÜR GESUNDEITLICHE AUFKLÄRUNG (2013).

³ Unter Interaktion versteht man ein „wechselseitiges, aufeinander bezogenes Verhalten von Personen und Gruppen unter Verwendung gemeinsamer Symbole, wobei eine Ausrichtung an den Erwartungen der Handlungspartner aneinander erfolgt“ (LAMNEK, 2005, 724).

meinschaft herzustellen (die Lehrperson und die Lernenden haben beide eine aktive Rolle). Es kommt somit zu einem „gemeinsamen“ (STREECK, 1979, 249) oder als „geteilt geltenden (mathematischen) Wissen“ (BAUERSFELD, 1982, 2, 32; KRUMMHEUER, 1983, 10; VOIGT, 1984, 212), das dann auch akzeptiert wird, verbindlich ist und damit im Unterricht Geltung hat. So können z.B. Schreibweisen oder Vorgehensweisen bei der Lösungsfindung in einer Klassendiskussion festgelegt werden.

- *Schülerzentrierte Formen*: die Lernenden stellen im Rahmen von Einzel-/Partner- oder Gruppenarbeit ohne aktives Auftreten der Lehrperson Geltung mathematischer Inhalte her (die Lernenden haben hier eine sehr aktive Rolle, wobei die Lehrperson die Organisation der Arbeitsaufträge übernimmt). Im Rahmen dieser Studie werden die schülerzentrierten Formen nicht näher untersucht.

In der vorliegenden Studie wird in *Abschnitt 1.1* der zugrunde gelegte Wissensbegriff herausgearbeitet. Aus einer Vielzahl möglicher Facetten des Wissensbegriffs wird auf den „pädagogischen“ Wissensbegriff nach R. HOFER (2012) näher eingegangen, der als Grundlage dieser Arbeit dient. Insbesondere geht es um einen Wissensbegriff, der im Rahmen von Interaktionen tragfähig ist, da in der Studie die Interaktionen zwischen Lehrperson und Lernenden zentral sind. Als Wissensformen werden Begründungs-, Gebrauchs- und Erfahrungswissen verwendet.

In *Abschnitt 1.2* folgt eine Klärung der Unterscheidung der zentralen Begriffe „Geltung“ und „Gültigkeit“. Aus den Blickwinkeln der Philosophie und der Rechtstheorie werden die Begriffe näher beleuchtet und voneinander abgegrenzt. Auf dieser Grundlage entstehen Definitionen der beiden Begriffe im Hinblick auf ihre mögliche Benutzung in der Mathematik-Didaktik. Damit werden die Bedeutungen der Begriffe „Geltung“ und „Gültigkeit“ sowie der „Herstellung von Geltung“ für die Studie festgelegt.

In *Kapitel 2* geht es um eine Annäherung an den Forschungsgegenstand. Zur Verortung der Studie wird zunächst (*Abschnitt 2.1*) auf die (aktuelle) mathematikdidaktische Forschung und Theoriebildung zu sozialen Interaktionen bzw. Aushandlungsprozessen im Unterricht eingegangen, die die vorliegende Studie tangieren. VOIGT (1984) und andere Akteure der interpretativen Unterrichtsforschung der 1980er und 1990er Jahre verwenden die Konstrukte „gemeinsames Aushandeln von Bedeutungen“ und „gemeinsames Wissen“ oder auch „geteilt geltendes Wissen“. Ihre Studien sind mikro-soziologisch ausgerichtet und untersuchen diese Aushandlungsprozesse und deren interaktionale Muster, etwa Routinen. Sie zeigen damit auf, dass der Mathematikunterricht häufig oberflächlich verläuft. Vor allem VOIGT (1984) analy-

siert Situationen, in denen kaum inhaltlich tiefgehende Kommunikation⁴ stattfindet, sondern viel aneinander vorbeigeredet wird und die Lehrperson Schüleräußerungen „umbiegt“, weil sie auf ein Ziel zusteuern will.

Im Rahmen seiner (soziologischen) Theorie pädagogischer Kodes wurden von BERNSTEIN (1996) die so genannten „recognition rules“ (Erkennens-Regeln) thematisiert. Bezüglich der Herstellung von Geltung kann die auf das Erkennen von Verbindlichkeit bezogene Erkennens-Regel den Lernenden dazu dienen, geltendes Wissen von nicht geltendem zu unterscheiden und auf diese Weise Leistungsanforderungen zu erkennen.

In *Abschnitt 2.1* werden weitere Ergebnisse aktueller Forschung zu „Unterrichtsgesprächen“ im Klassenzimmer mit Bezug auf die vorliegende Studie zusammengetragen sowie Studien zum „Argumentieren“, „Begründen“ und „Beweisen“ bezüglich der Herstellung von Geltung diskutiert.

In *Abschnitt 2.2* wird erörtert, inwieweit das Phänomen der „Herstellung von Geltung“ mit den theoretischen Konzepten der „Enkulturation“, „Akkulturation“ und „Institutionalisierung“ abgedeckt werden kann. Dabei erweist sich die „Institutionalisierung“ als eine spezielle Art der Herstellung von Geltung.

Bei Betrachtung des Forschungsstands in der Mathematik-Didaktik (vor allem vor dem Hintergrund der Theorie didaktischer Situationen von BROUSSEAU) lassen sich in *Abschnitt 2.3* Desiderata aufzeigen, die mit der vorliegenden Studie geschmälert werden sollen. Das Hauptdesideratum ist die Unkenntnis darüber, wie Lehrpersonen versuchen, Geltung mathematischer Inhalte herzustellen. Dies bezieht sich insbesondere auf die Frage, wie in den Interaktionen des Mathematikunterrichts zwischen Lehrperson und Lernenden konkret deutlich gemacht wird, was die Lernenden wissen sollen.

Die Ziele der Studie und die bearbeiteten Forschungsfragen werden in *Abschnitt 2.4* formuliert. Das *Hauptziel* dieser Studie besteht darin, „Formen“ der „Herstellung von Geltung“ mathematischer Inhalte empirisch zu identifizieren und aus ihrem Auftreten Schlussfolgerungen für Theorie und Unterrichtspraxis zu ziehen.

In *Abschnitt 2.5* wird die Hintergrundtheorie der Studie – der Sozial-Konstruktivismus – vorgestellt. Dies, weil sich die hier vorgelegten Untersuchungen zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens ausschließlich auf (beobachtbare) Interaktionen und Kommunikationen zwischen Lehrperson und Lernenden im Unterricht beziehen und nicht auf individuelles bzw. selbstständig erworbenes Wissen der

⁴ Kommunikation (von lat. communicatio: Mitteilung, Verständigung) ist eine (in der Regel sprachliche) Sozialhandlung, an der mehrere Menschen beteiligt sind. „Unter kommunikativer Kompetenz versteht Habermas [...] die Fähigkeit eines Sprechers/Hörers, die sozialen Rahmenregeln menschlicher Rede zu beherrschen bzw. zu verstehen [...]“ (GETHMANN, 2004, 421)

Schülerinnen und Schüler. Die Studie bedarf somit eines theoretischen Ansatzes, der die soziale Interaktion bei der Wissenskonstruktion nicht nur berücksichtigt, sondern in den Mittelpunkt stellt. Genau dies leistet der Sozial-Konstruktivismus.

Die beobachteten und analysierten Unterrichtssequenzen basieren auf einer Unterrichtskultur (hier der jeweiligen Klasse) mit ihren Normen, Werten, Einstellungen, Praktiken, Medien usw. In *Abschnitt 2.6* wird deshalb aufgezeigt, dass die Normen (sowohl „allgemeine Sozialnormen“ als auch „soziomathematische Normen“) und Werte in einer Klassengemeinschaft die individuelle Grundlage für Entscheidungen für oder gegen etwas und somit bedeutsam für die Herstellung von Geltung sind. Sie hängen auch von den Rahmenbedingungen der Schule und des Unterrichts ab.

Wie oben bereits erwähnt, geht es in der vorliegenden Studie vor allem um das Aufdecken von „Formen“ der Herstellung von Geltung im Mathematikunterricht, in gewisser Hinsicht aber auch um eine Weiterentwicklung der Unterrichtsqualität, da durch das Explizitmachen von verschiedenen Möglichkeiten der Herstellung von Geltung einer Lehrperson Alternativen im Hinblick auf ihren Unterricht aufgezeigt werden können. Grundlage ist die interpretative empirische Forschung, die die datenbasierte Konstruktion von Theorien zum Ziel hat. In *Abschnitt 3.1* wird deshalb der Begriff „Theorie“ in Bezug auf die Studie geklärt.

Sowohl die in dieser Studie ansatzweise entwickelten Theoriebausteine zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens als auch die vorgelegten Beiträge für eine Theorie zu Typen von Mathematikstunden im Hinblick auf die Herstellung von Geltung können als Elemente einer sog. „beschreibenden Theorie“ eingestuft werden.

Da in der mathematik-didaktischen Forschung bisher noch kein Ansatz zu einer Theorie der „Herstellung von Geltung mathematischen Wissens“ vorhanden ist, wird mit dieser Studie versucht, dazu beizutragen, eine sog. „Vordergrundtheorie“ zur Herstellung von Geltung mathematischen Wissens zu entwickeln.

In den nächsten Abschnitten des *Kapitels 3* werden methodische Vorgehensweisen bei (hauptsächlich qualitativ orientierten) Forschungsprojekten und ihre methodologischen Grundlagen beschrieben. Die der Studie zugrunde liegende Methodologie der „Grounded Theory“ wird in *Abschnitt 3.2* kurz dargestellt. Der ständige Abgleich der (theoretischen) Annahmen mit den zuvor erhobenen empirischen Daten, die Organisation des Forschungsprozesses (nach dem theoretischen Sampling) sowie das Datensammeln und die Datenanalyse als parallel verlaufender, iterativer Prozess werden aufgezeigt.

Konkret wurden in der Studie Transkripte interpretiert und die Ergebnisse mithilfe von Kodes, die erst aus der Datenanalyse entwickelt wurden, einzelnen Formen der Her-

stellung von Geltung zugeordnet (sog. *offenes Kodieren*). Das offene Kodieren diente dabei der Gewinnung erster grober Formen/Phänomene der Herstellung von Geltung, indem die Daten in möglichst viele Untereinheiten/Episoden zerlegt wurden. Später wurde versucht, Beziehungen oder Unterschiede zwischen den einzelnen Formen der Herstellung von Geltung zu beschreiben, die Formen speziellen Kategorien der Herstellung von Geltung unterzuordnen und bedeutsame Kategorien herauszuarbeiten (sog. *axiales Kodieren*). Im letzten Kodierschritt (dem sog. *selektiven Kodieren*) wurden „Kernkategorien“ (die „konventionellen“, „konsensuellen“ und „argumentativen Arten“ der Herstellung von Geltung) identifiziert, die für die Beantwortung der Forschungsfragen relevanter und ertragreicher sind als die beim axialen Kodieren gewonnenen Kategorien.

Außerdem werden in *Abschnitt 3.2* Gütekriterien für an Grounded Theory orientierte Forschung diskutiert.

Abschnitt 3.3 klärt allgemein den Ablauf eines Forschungsprozesses bzw. die Untersuchungsschritte, die auch bei der vorliegenden Studie durchgeführt wurden. U.a. werden dabei fünf Phasen (Themensuche, Untersuchungsplanung, Datenerhebung, Datenauswertung, Berichterstattung) eines Forschungsprozesses vorgestellt. Gemäß dem gewählten Design wird die Beschreibung von Forschungsdesigns auf „gemischte Forschungsdesigns“ mit sequenzieller Vorgehensweise fokussiert, wobei die vorliegende Studie zwei qualitative Hauptstudien verbindet.

In *Kapitel 4* wird zunächst ein Gesamtüberblick über das methodische Vorgehen in dieser Studie (*Abschnitt 4.1*) mit Videostudien, Beobachtungsbögen, Lehrerinterviews, Suchen und Entdecken von Prototypen von Unterrichtsstunden im Hinblick auf die Herstellung von Geltung sowie Idealtypenbildung gegeben. Dabei wird auch auf den in Abschnitt 3.3 allgemein dargestellten Forschungsprozess – nun konkret bezogen auf die vorliegende Studie – ausführlich eingegangen. Wichtig ist, dass im Anschluss an die Hauptstudien die qualitativ erhobenen Daten quantitativ ausgewertet und durch zwei Ergänzungsstudien abgesichert wurden. Am Ende des Forschungsprozesses dieser Studie steht eine Idealtypenbildung von Unterrichtsstunden bezüglich der Herstellung von Geltung mathematischen Wissens.

Insgesamt wurden die Daten der Hauptstudien I und II qualitativ (interpretativ, auf Basis der Grounded Theory) und quantitativ (mit Mitteln der beschreibenden Statistik) ausgewertet. Somit liegen in dieser Studie sowohl eine Daten- als auch eine Methodentriangulation vor.

Die Methoden der Datenerhebung und Datenaufbereitung in dieser Studie werden anschließend in *Abschnitt 4.2* ausführlich erläutert. Dabei werden die verschiedenen Videoaufnahmen (zur „Einführung in die Differenzialrechnung“ in Klasse 10 (Gym-

nasium) und zum „Satz des Pythagoras“ in Klasse 9 (Realschule)), die Unterrichtsbeobachtungen mithilfe eines entwickelten Beobachtungsbogens und die Lehrerinterviews im Anschluss an die Videoaufnahmen zur „Einführung in die Differenzialrechnung“ kommentiert.

Die den Videomitschnitten zugrunde liegenden Sachanalysen und fachdidaktischen Analysen zu den videografierten Unterrichtsstunden mit den mathematischen Fachinhalten „Einführung in die Differenzialrechnung“ und „Satz des Pythagoras“ finden sich im *Anhang*. Dabei spielen die in Unterabschnitt 1.1.3 herausgearbeiteten Wissensformen (siehe R. HOFER, 2012) eine wichtige Rolle.

Ebenfalls wird in *Kapitel 4* ausführlich auf die Datenanalyse eingegangen. Dabei werden die Vorgehensweise gemäß der Grounded Theory (*Unterabschnitt 4.3.1*), einzelne spezielle Datenanalysen (*Unterabschnitt 4.3.2*) und die Idealtypenbildung (*Unterabschnitt 4.3.3*) thematisiert.

Die Ergebnisse der Datenanalyse sind Gegenstand von *Kapitel 5*. Hier werden ausführlich die entwickelten „Formen“, „Kategorien“ und „Modi“ der Herstellung von Geltung mathematischen Wissens beschrieben, und es werden die zeitlichen Verteilungen der Formen (bei 28 Unterrichtsstunden), der Kategorien (bei allen 162 Stunden) und der Modi (bei Zusammenfassungen von Stunden) der Herstellung von Geltung dargestellt. Auch wird u.a. der zeitliche Anteil der Herstellung von Geltung für jede der 162 Unterrichtsstunden ermittelt.

Kapitel 6 beschreibt die Entwicklung von idealtypischen Mathematikstunden im Hinblick auf die Herstellung von Geltung. So wird zunächst die Typenbildung durch Komparation (*Abschnitt 6.1*) dargestellt. Hierzu wurden die aus den Formen der Herstellung von Geltung entwickelten Kategorien der „konventionellen“, „konsensuellen“ oder „argumentativen“ Art der Herstellung von Geltung zugeordnet. Somit lassen sich die analysierten Unterrichtsstunden mit ihren zeitlichen Verteilungen im Hinblick auf die Herstellung von Geltung vergleichen und verschiedene Prototypen herausarbeiten (*Abschnitt 6.2*). Die aus den Prototypen entwickelten Idealtypen von Mathematikstunden werden in *Abschnitt 6.3* vorgestellt. In *Abschnitt 6.4* werden Beziehungen der videografierten 28 Stunden zu den Idealtypen von Mathematikstunden im Hinblick auf die Herstellung von Geltung aufgezeigt, wobei der Unterricht der sechs beobachteten Lehrpersonen in Bezug auf die Idealtypen im Vordergrund steht.

Eine Zusammenfassung der Ergebnisse der Studie und einen Ausblick auf noch offene Fragen bzw. auf den theoretischen und praktischen Nutzen der Studie findet man in *Kapitel 7*.