
essentials

Essentials liefern aktuelles Wissen in konzentrierter Form. Die Essenz dessen, worauf es als „State-of-the-Art“ in der gegenwärtigen Fachdiskussion oder in der Praxis ankommt. Essentials informieren schnell, unkompliziert und verständlich

- als Einführung in ein aktuelles Thema aus Ihrem Fachgebiet
- als Einstieg in ein für Sie noch unbekanntes Themenfeld
- als Einblick, um zum Thema mitreden zu können.

Die Bücher in elektronischer und gedruckter Form bringen das Expertenwissen von Springer-Fachautoren kompakt zur Darstellung. Sie sind besonders für die Nutzung als eBook auf Tablet-PCs, eBook-Readern und Smartphones geeignet.

Essentials: Wissensbausteine aus Wirtschaft und Gesellschaft, Medizin, Psychologie und Gesundheitsberufen, Technik und Naturwissenschaften. Von renommierten Autoren der Verlagsmarken Springer Gabler, Springer VS, Springer Medizin, Springer Spektrum, Springer Vieweg und Springer Psychologie.

Jürgen Beetz

Differentialrechnung für Höhlenmenschen und andere Anfänger

Die mathematische Behandlung
kleinster Änderungen



Springer Spektrum

Jürgen Beetz
Berlin
Deutschland

ISSN 2197-6708
essentials

ISBN 978-3-658-08484-4

DOI 10.1007/978-3-658-08485-1

ISSN 2197-6716 (electronic)

ISBN 978-3-658-08485-1 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Fachmedien Wiesbaden ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Was Sie in diesem Essential finden können

- Das Differential als Maß für die Veränderung einer Funktion
- Die Praxis der Differentialrechnung, dargestellt an verschiedenen Beispielen
- Die besonderen Eigenschaften der Exponentialfunktion

Vorwort

Inhalt dieses „essentials“ ist hauptsächlich das achte der insgesamt 13 Kapitel meines Buches „ $1 + 1 = 10$. Mathematik für Höhlenmenschen“ (Beetz 2012, S. 203–224).¹ Das Kapitel hat den Originaltitel „8. Eddi E. lernt zu differenzieren – Differentialrechnung und kleinste Größen“. Weitere Kapitel des Buches beschäftigen sich mit Funktionen, Grafiken, Folgen und Reihen, Integralrechnung, Statistik und Wahrscheinlichkeitsrechnung und Philosophie der Mathematik – mehr oder weniger Abiturstoff und zusammen „das, was man über Mathematik wissen sollte“ (zuzüglich vieler amüsanter Geschichten und sogar eines Ausblicks aus der Steinzeit in die moderne Informatik).

Mehr als die einfache Logik eines Frühmenschen brauchen Sie nicht, um die Grundzüge der Algebra zu verstehen. Denn Sie treffen in diesem Werk viele einfache, fast gefühlsmäßig zu erfassende mathematische Prinzipien des täglichen Lebens. Wir sind zwar „im Grund noch immer die alten Affen“, wie es ein Dichter formulierte, aber unser Gehirn ist schon das eines *homo sapiens*.² Die Mathematik ist ja eine Wissenschaft des Geistes, nicht der Experimente und nicht der Technik. Man braucht nur ein Gehirn dazu, genauer: rationales Denken.

Deswegen kann ich bei dem Versuch, Mathematik „begreiflich“ zu machen, in die Steinzeit zurückgehen – genauer gesagt: etwa in die Jungsteinzeit, zufällig 7986 v. Chr., also vor genau 10.000 Jahren. Jäger und Sammler waren zu Bauern und Viehzüchtern geworden. Dorfgemeinschaften, Rundhäuser und eine arbeits-

¹ Hierbei wurden die Unterkapitel des Originals zu Kapiteln hier und die Zwischenüberschriften zu Unterkapiteln.

² Gedicht von Erich Kästner (1899–1974): Die Entwicklung der Menschheit. Quelle: http://www.gedichte.vu/?die_entwicklung_der_menschheit.html.

teilige Gesellschaft existierten bereits. Dort treffen Sie Eddi Einstein (wie konnte ein Top-Mathematiker in der Jungsteinzeit auch anders heißen!?), den Denker und Rudi Radlos, den Erfinder (die paradoxe Bedeutung dieses Namens rührt daher, dass er gerade das Rad *nicht* erfunden hatte). Die „drei“ galt damals bereits als eine magische Zahl – aber ich greife vor: Die „Zahl“ als abstraktes Gebilde war auch noch nicht erfunden. Etwas Magisches also. Wie dem auch sei, ein *dritter* Geselle gehörte zu der Truppe: Siegfried „Siggi“ Spöckenkieker, der Druide und Seher.³

Siggis Rolle ist eine bedeutende: Man glaubte damals noch an Determinismus und Vorbestimmung – da traf es sich gut, dass der Seher mit der Gabe der Präkognition gesegnet war.⁴ So können wir Eddi, den Denker, mit Erkenntnissen ausstatten, die erst Jahrtausende später von bedeutenden Philosophen und Mathematikern erlangt worden waren.

Die wahre Meisterin dieser Wissenschaftsdisziplin ist jedoch Wilhelmine Wicca, meist „Willa“ genannt. Sie ist die erste Mathematikerin der Geschichte und würde es auch lange bleiben.⁵ Zu Unrecht, wie man weiß, benutzt eine Frau doch nicht nur eine, sondern *beide* Gehirnhälften. Und da durch diese Verbindung nach den Regeln der Systemtheorie ein neues Gesamtsystem entsteht („Das Ganze ist mehr als die Summe seiner Teile“), ist es nicht verwunderlich, dass Willa so klug

³ Als Spöckenkieker werden im westfälischen und im niederdeutschen Sprachraum, speziell im Emsland, Münsterland und in Dithmarschen, Menschen mit „zweitem Gesicht“ bezeichnet. Der Begriff Spöckenkieker kann dabei in etwa mit „Spuk-Gucker“ oder „Geister-Seher“ übersetzt werden. Spöckenkiekern wird die Fähigkeit nachgesagt, in die Zukunft blicken zu können. Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Spöckenkieker>.

⁴ Determinismus (lat. *determinare* „abgrenzen“, „bestimmen“) bezeichnet die Auffassung, dass zukünftige Ereignisse durch Vorbedingungen eindeutig festgelegt sind. Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Determinismus>. Präkognition (lateinisch: vor der Erkenntnis) ist die Bezeichnung für die angebliche Vorhersage eines Ereignisses oder Sachverhaltes aus der Zukunft, ohne dass hierfür rationales Wissen zum Zeitpunkt der Voraussicht zur Verfügung gestanden hätte. Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Präkognition>.

⁵ Als erste Mathematikerin überhaupt gilt Hypatia von Alexandria (ca. 355–415), die ein grausiges Ende fand (Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Hypatia>). Die erste Mathematik*professorin*, die russische Mathematikerin Sofja Kowalewskaja (1850–1891), betrat erst 1889 in Stockholm die akademische Bühne. Quelle: http://de.wikipedia.org/wiki/Sofja_Kowalewskaja.

war wie die drei Kerle *zusammen*. Deshalb galt sie auch als Hexe⁶ – was damals ein Ehrentitel war – und als weise Frau.

Wir werden die Gedankengänge und Erfahrungen unserer Vorfahren hier verfolgen und nachvollziehen. Ich werde schwierige Gedanken nicht nur in einfache Worte kleiden, sondern sie in kleine verdaubare Häppchen zerlegen. Ein kompliziertes Problem bleibt nämlich kompliziert, auch wenn man es einfach nur umgangssprachlich ausdrückt. Erst die Verringerung des Schwierigkeitsgrades durch Zerlegung in einzelne Teilprobleme schafft Klarheit – ein Vorgehen, das seit jeher zum Prinzip der Naturwissenschaft gehört.

Mathematik ist eine exakte Wissenschaft – mit kleinen „Löchern“, die wir noch thematisieren werden. Sie zeichnet sich auch durch eine präzise Schreibweise aus und verschiedene typographische Regeln, die beachtet werden sollten. Aber an diesem Konjunktiv merken Sie schon: *so* ernst wollen wir das hier nicht nehmen. So werden hier manchmal mathematische Größen (wie es in Fachbüchern üblich ist) klein oder groß oder kursiv oder steil geschrieben, manchmal aber auch nicht. Da Sie ja mitdenken, wird Sie das nicht verwirren. Und die kursive Schreibweise verwenden wir auch (wie Sie zwei Sätze weiter oben sehen), um etwas zu betonen und hervorzuheben.

Mathematik ist nicht die merkwürdige Spielwiese lebensfremder Streber mit ungepflegtem Äußeren, sondern sie durchzieht unseren Alltag und ist mit den zentralen Fragen unseres Lebens verbunden: Was hängt wie zusammen? Welche Gesetze bestimmen das Dasein des Menschen und der Natur? Welche Strukturen gibt es und wie kann der menschliche Geist sie in Erkenntnisse umformen? Wie ziehen wir aus unseren Wahrnehmungen angemessene und logische Schlüsse? Von Anfang an war Mathematik deshalb mit der Philosophie verbunden. Deswegen schrieb schon der große Philosoph Platon um 370 v. Chr.: „Und nun, sprach ich, begreife ich auch, nachdem die Kenntnis des Rechnens so beschrieben ist, wie herrlich sie ist und uns vielfältig nützlich zu dem, was wir wollen, wenn einer sie des Wissens wegen betreibt und nicht etwa des Handelns wegen“.⁷ Allerdings kann ich dem nicht ganz zustimmen – am Ende fehlt ein „nur“: „... *nur* des Handelns

⁶ „Wicca“ ist eine neureligiöse Bewegung und versteht sich als eine wiederbelebte Natur- und als Mysterienreligion. Wicca hat seinen Ursprung in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts und ist eine Glaubensrichtung des Neuheidentums. Die meisten der unterschiedlichen Wicca-Richtungen sind [...] anti-patriarchalisch. Wicca versteht sich auch als die „Religion der Hexen“, die meisten Anhänger bezeichnen sich selbst als Hexen. Quelle: <http://de.wikipedia.org/wiki/Wicca>.

⁷ Platons Höhlengleichnis. Das Siebte Buch der Politeia, Abschn. 107. c) Nutzen der Rechenkunst zur Bildung der philosophischen Seele.

wegen“. Denn Sie werden sehen, wie viele mathematische Erkenntnisse auch im Alltag praktische Auswirkungen haben.

Naturwissenschaftliche Kenntnisse gehören nicht zur Bildung, das meinen viele. Nein, finde ich, sie sind immens wichtig zum Verständnis der Kultur – die Wendung vom erdzentrierten Weltbild des Mittelalters (und der Kirche) zur modernen kopernikanischen Erkenntnis der Neuzeit, wonach die Sonne im Mittelpunkt unseres Planetensystems steht, hat unser gesamtes Denken und unsere Kultur beeinflusst. Naturwissenschaft und Mathematik prägen unser gesamtes Weltbild, zum Leidwesen vieler Dogmatiker, die im Mittelalter stehen geblieben sind. Aber ich möchte nicht polemisieren, ich möchte *begreiflich* machen. Denn besonders die Mathematik fristet im Bewusstsein der Menschen ein Schattendasein und beeinflusst doch direkt oder indirekt einen großen Teil unseres modernen Lebens – nicht zuletzt durch ihre „Mechanisierung“, den Computer. Was nicht ganz stimmt, zugegeben – denn er kann „nur rechnen“ Mathematik aber ist kristallines Denken, Scharfsinn in Reinkultur.

Wir wollen gemeinsam versuchen, diesen inneren Widerspruch aufzulösen: In einer von Wissenschaft und Technik geprägten Welt weigern sich viele Menschen, ihre mathematischen Grundlagen zur Kenntnis zu nehmen. Denn mit Zahlen, Formeln, Figuren und Kurven kann man seltsamerweise auch in der „Wissensgesellschaft“ unserer Zeit nicht nur Kindern einen Schrecken einjagen. Aber die Naturwissenschaften haben unser Dasein erobert und gestaltet, deswegen wollen wir uns nun mit ihren geistigen Grundlagen beschäftigen.

Gehen wir nun in die Steinzeit zurück und lernen wir etwas über die Gegenwart! „Mathematik“ bedeutet ja – dem altgriechischen Ursprung des Wortes folgend – die „Kunst des Lernens“. Damit Sie das nicht als Mühe empfunden, habe ich es in unterhaltsame Geschichten verpackt. Also machen wir uns auf die Reise ins Neolithikum – Met, Mammut und Mathe *all-inclusive*.

Jürgen Beetz, November 2014 (10.000 Jahre nach diesen Geschichten)

Besuchen Sie mich auf meinem Blog
<http://beetzblog.blogspot.de>



Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
2	Das Maß für Veränderung	3
2.1	Die Steigung einer mathematischen Kurve	5
2.2	Die Regeln des Differenzierens	8
3	Die Praxis der Differentialrechnung	11
3.1	Die Steigung der Hyperbel als Beispiel	12
3.2	Sinus und Kosinus in der Differenzierungspraxis	13
3.3	Das einzig Konstante im Leben ist die Änderung	17
4	Die Exponentialfunktion beweist ihre königliche Eigenschaft	21
4.1	Die Ableitung der Exponentialfunktion, zum zweiten und ganz kurz	25
4.2	Die Badewannenkurve	25
4.3	Elementare Funktionen und ihre 1. Ableitung	27
5	Zusammenfassung: dieses Essential in Kürze	31
	Was Sie aus diesem Essential mitnehmen können	33
	Anmerkungen	35
	Literatur	37

Der Autor

Jürgen Beetz studierte nach einer humanistischen und naturwissenschaftlichen Schulausbildung Elektrotechnik, Mathematik und Informatik an der TH Darmstadt und der *University of California, Berkeley*.

Bei einem internationalen IT-Konzern war er als Systemanalytiker, Berater und Dozent in leitender Funktion tätig.

E-Mail: Juergen.Beez@gmail.com