Einführungskurs Mathematik und Rechenmethoden

Peter van Dongen

Einführungskurs Mathematik und Rechenmethoden

Für Studierende der Physik und weiterer
mathematisch-naturwissenschaftlicher
Fächer

Springer Spektrum

Peter van Dongen
Institut für Physik
Johannes Gutenberg-Universität
Mainz, Deutschland

ISBN 978-3-658-07519-4
DOI 10.1007/978-3-658-07520-0

ISBN 978-3-658-07520-0 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2015

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Der Verlag, die Autoren und die Herausgeber gehen davon aus, dass die Angaben und Informationen in diesem Werk zum Zeitpunkt der Veröffentlichung vollständig und korrekt sind. Weder der Verlag noch die Autoren oder die Herausgeber übernehmen, ausdrücklich oder implizit, Gewähr für den Inhalt des Werkes, etwaige Fehler oder Äußerungen.

Planung: Ulrike Schmickler-Hirzebruch

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media (www.springer.com)

Vorwort

Dieses Buch wurde für Studierende der Physik und verwandter Naturwissenschaften im ersten Studienjahr geschrieben und behandelt die kanonischen Themen der einführenden Mathematikveranstaltungen. Das Ziel des Buches ist, diese Mathematik sowohl sorgfältig und vollständig als auch anwendungsbezogen darzustellen. Um die Anwendungsnähe und die naturwissenschaftliche Relevanz der behandelten Mathematik zu unterstreichen, habe ich durchgehend die Sprache der Theoretischen Physik gewählt. Meine Hoffnung ist, so durch Erhöhung ihrer Motivation die Studierenden näher als bisher und auch effektiver an die für die Naturwissenschaften so essentielle Mathematik heranführen zu können.

Die Idee, ein solches Mathematikbuch für Studienanfänger(innen) zu schreiben, ist im Laufe der Jahre gereift. Oft habe ich als Dozent im Rahmen von Vorlesungen über Theoretische Physik bemerkt, dass viele Studierende sich mit dem Abstraktionsniveau ihrer Mathematikvorlesungen schwer tun und die Relevanz mancher Formalismen für ihr Studium nicht sehen. Dies führt auch zu Problemen in Übungen, da grundsätzlich erlernte, aber nicht verinnerlichte mathematische Methoden in der Praxis nicht einsatzbereit sind. In Anfängervorlesungen über „Rechenmethoden“ und im „Mathematischen Vorkurs“ habe ich die Erfahrung gemacht, dass es sehr wichtig ist, die Studierenden zu motivieren, indem man zu jedem behandelten Thema die Anwendungsmöglichkeiten in der Physik (oder allgemeiner: in den Naturwissenschaften) aufzeigt. Sonst wird man zu Recht mit Fragen konfrontiert wie: „Warum soll ich das lernen?“ und „Warum ist diese Mathematik für mich als Physiker(in) nützlich?“. In diesem Buch habe ich mich daher bemüht, genau diese Fragen zu beantworten, in der Hoffnung mit der Motivation auch die Lernbereitschaft der Studierenden zu erhöhen. Dementsprechend versuche ich, zu jedem mathematischen Thema zu erklären, warum Physiker(innen) - oder allgemeiner: Naturwissenschaftler(innen) - diese Methoden benötigen. Außerdem werden in vielen Fallbeispielen typische elementare Anwendungen behandelt, sodass die Relevanz der behandelten Methoden stets deutlich sichtbar bleibt.

Um diese Anwendungsnähe gewährleisten zu können, präsentiere ich die mathematischen Konzepte nicht *linear*, sondern *allmählich vertiefend*. Da viele Themen aus der Schule zumindest ansatzweise bekannt sind (man denke an „Zahlen“, „Ableitung“, „Exponentialfunktion“, „Produktregel“, „Grenzwert“, „Integral“), kann man diese zuerst in Erinnerung rufen und dann vorsichtig erste Anwendungen und Ausblicke aufzeigen, auch bevor diese Themen als Schwerpunkt in späteren Kapiteln vertieft und solide begründet werden. Im Gegensatz dazu würde ein *lineares* Procedere, wobei man bei „Null“ anfängt und den Formalismus systematisch durch neue Axiome, Sätze, Beweise ausbaut, die Anwendung in weite Ferne rücken.

Jeder Autor, der sich zum Ziel setzt, „den“ Bachelorstudierenden „den“ Mathematikstoff des ersten Studienjahres nahe zu bringen, muss sich natürlich mit den beiden Problemen auseinandersetzen, dass es *die* typischen Studierenden und *den* typischen Stoff nicht gibt. Auf beiden Fronten gibt es ein äußerst breites Spektrum. Einerseits fällt auf, dass die Mathematikkenntnisse der Abiturienten extrem heterogen sind. Diese Heterogenität entsteht durch Unterschiede in den Lehrplänen der Bundesländer, Unterschiede zwischen den Schulen, den Lehrer(inne)n, den Wahlpflichtfächern und den Kursniveaus, aber natürlich auch durch unterschiedliche

individuelle Aspekte, wie Talente, Interessen oder die Förderung durch die Eltern. Andererseits wird an den Universitäten eine Vielfalt an möglichen Unterrichtsformen auf dem Gebiet der Mathematik für Studierende der Naturwissenschaften angeboten: Vorkurse mit unterschiedlicher Dauer und Zielsetzung, Vorlesungen über Rechenmethoden verschiedenster Art, Vorlesungen über „Mathematik für Physiker“ oder über Analysis und Vorlesungen für Studierende mit Physik als Nebenfach, wobei Niveau, Stil und Inhalte aller dieser Veranstaltungen stark durch die jeweilige Lehrkraft geprägt sind. Dieser Vielfalt sollte ein Lehrbuch für das erste Studienjahr möglichst gerecht werden.

Aus diesen Gründen ist dieses Buch *modular* aufgebaut. Es ist bewusst so konzipiert, dass es bei geeigneter Stoffauswahl neben mehreren Vorlesungen verwendet werden kann und außerdem unterschiedlichen Lesergruppen entsprechend ihrem persönlichen Bedarf zugänglich sein sollte. Das Buch kann grundsätzlich als Begleitliteratur zu einem Mathematischen Vorkurs, zu Vorlesungen über „Rechenmethoden“ oder „Mathematische Methoden“ und zu Vorlesungen für angehende Physiklehrer(innen) oder Studierende mit Physik als Nebenfach verwendet werden. Es könnte auch als Basis für Vorlesungen über „Mathematik für Physiker“ dienen, falls die Lehrenden des Faches eine gewisse Affinität mit dem Fach Physik haben und auf die fachlichen Interessen ihrer Zuhörer eingehen möchten. Speziell für fortgeschrittene oder besonders interessierte Studierende (oder für zeitintensive Vorlesungen) werden auch einige weiterführende Aspekte der Themen des ersten Studienjahrs behandelt, die in der Regel physikalisch und mathematisch überdurchschnittlich wichtig sind. Die entsprechenden Abschnitte sind durch einen Asterisk (*) gekennzeichnet, um anzugeben, dass man sie beim ersten Durchgang überspringen *kann* (aber natürlich nicht *muss*: Die Lektüre wird sogar dringend empfohlen). Ich habe versucht, in nebenstehender Tabelle anzugeben, welche Teile des Buches zu welchen Zwecken geeignet sind. Angesichts der Vielfalt an Studiengängen, Veranstaltungsformen und Gestaltungswünschen der Lehrenden können die Angaben nur als Anregung dienen.

Es sollte für interessierte Studierende sogar möglich sein, sich den Inhalt dieses Buches im Ganzen oder in Auszügen im Selbststudium zu erarbeiten, da Herleitungen und Erläuterungen zu den Berechnungen sehr ausführlich sind und zu jedem Kapitel eine Sammlung von Übungsaufgaben mit Lösungen enthalten ist. Sollte die Leserin oder der Leser Bedarf an weiteren Mathematikbüchern haben, die für den Anfang eines naturwissenschaftlichen Studiums geeignet sind, so könnten neben den im Haupttext zitierten Büchern auch die Referenzen [1]–[11] empfohlen werden. Alle diese Bücher bieten allgemeine Einführungen an, zeigen im Detail aber einen sehr unterschiedlichen Charakter.

Zu großem Dank bin ich zweien meiner ehemaligen Studierenden, den Herren Julian Großmann und Alexander Roth, verpflichtet, die dieses Projekt mehr als ein Jahr lang begleitet und durch unzählige Kommentare, Anmerkungen und Vorschläge zur endgültigen Form beigetragen haben. Viele Abbildungen gehen auf ihre Anregungen zurück. Ohne sie hätte dieses Buch anders ausgesehen. Ebenfalls sehr dankbar bin ich meinen beiden Kollegen Prof. Dr. Martin Reuter und Prof. Dr. Rolf Schilling und meiner Frau, Dr. Irmgard Nolden, die das Manuskript komplett durchgearbeitet und durch viele Kommentare sehr bereichert haben. Für seine Anmerkungen zu Kapitel 1 danke ich meinem Kollegen Prof. Dr. Stefan Müller-Stach herzlich. Ganz offensichtlich liegt die Verantwortung für sämtliche weniger gelun-

genen Formulierungen bei mir, und ich wäre meinen Lesern ggf. dankbar für eine entsprechende Mitteilung. Da ich nun schon seit vielen Jahren die Früchte der Textsatzprogramme $\text{\TeX}$ und $\text{\LaTeX}$ sowie des Grafikerstellungsprogramms $\text{\TikZ}$ ernte, möchte ich hierfür den Entwicklern Donald Knuth, Leslie Lamport und Till Tantau danken. Ich danke auch ganz herzlich Frau Ulrike Schmickler-Hirzebruch und Frau Barbara Gerlach vom Lektorat Springer Spektrum für ihre Unterstützung bei diesem Projekt und meiner Sekretärin, Frau Elvira Helf, für ihre langjährige Unterstützung (bei diesem Buch insbesondere bei den Übungen und Musterlösungen).

Mainz, im März 2015

Peter van Dongen

Vorschläge zum Einsatz des Buches in verschiedenen Lehrveranstaltungen

	VK2	VK3	RM1	RM2	MfN	MfP	BEd
Kap 1	++	++	○	–	++	++	++
Kap 2	außer 2.2.4	außer 2.2.4	außer 2.2.4	–	++	++	außer 2.2.4
Kap 3	außer 3.7	außer 3.7	außer 3.7	○	3.7	3.7	außer 3.7
Kap 4	außer 4.4.7	außer 4.4.7	außer 4.4.7	–	++	++	außer 4.4.7
Kap 5	bis 5.3.3	bis 5.3.3	○	++	++	++	++
Kap 6	--	außer 6.5	außer 6.5	○	++	++	außer 6.5
Kap 7	--	bis 7.3.4	7.1 7.2	○	bis 7.3.5	++	7.1 7.2
Kap 8	--	--	○	++	++	++	++
Kap 9	--	--	9.1 9.2	außer 9.5	○	++	außer 9.5

Legende:

++ = gut geeignet, ○ = teilweise geeignet, – = weniger geeignet, -- = ungeeignet

VK2 = zweiwöchiger Vorkurs (V3Ü3 pro Tag)

VK3 = dreiwöchiger Vorkurs (V3Ü3 pro Tag)

RM1 = Vorlesung „Rechenmethoden 1“ (1. Semester, V2Ü2)

RM2 = Vorlesung „Rechenmethoden 2“ (2. Semester, V2Ü2)

MfN = Mathematik für Naturwissenschaftler (im 1. und 2. Semester, V4Ü2)

MfP = Mathematik für Physiker (im 1. und 2. Semester, V4Ü2)

BEd = Mathematikvorlesungen für B. Ed. Physik (im 1. und 2. Semester, V2Ü2)

Inhaltsverzeichnis

Vorwort	v
Inhaltsverzeichnis	ix
1 Zahlen	1
1.1 Natürliche Zahlen, vollständige Induktion	1
1.1.1 Natürliche Zahlen	2
1.1.2 Vollständige Induktion	5
1.1.3 Weitere Beispiele für die Beweismethode der vollständigen Induktion	7
1.2 Ganze, rationale und reelle Zahlen	17
1.2.1 Ganze Zahlen	17
1.2.2 Rationale Zahlen	18
1.2.3 Reelle Zahlen und reellwertige Funktionen	18
1.2.4 Beispiel einer reellwertigen Funktion: die Exponentialfunktion	20
1.3 Komplexe Zahlen	24
1.3.1 Definitionen und Eigenschaften	24
1.3.2 Allgemeine Lösung der quadratischen Gleichung	26
1.3.3 Die Polardarstellung	27
1.3.4 Die Exponentialfunktion mit imaginärem Argument	29
1.3.5 Multiplikation und Division in der Polardarstellung	31
1.3.6 Die Formel von de Moivre	32
1.3.7 De Moivres Formel – weitere Anwendungen	33
1.3.8 Komplexe Konjugation	35
1.3.9 Die Exponentialfunktion mit komplexem Argument	38
1.4 Übungsaufgaben	39
2 Folgen, Reihen und Rekursionen	45
2.1 Folgen	46
2.1.1 Definition einer „Folge“ und Nomenklatur	46
2.1.2 Grenzwertregeln und Beispiele	50
2.1.3 Die Euler’sche Zahl als Grenzwert einer Folge	55
2.2 Reihen	56
2.2.1 Definition einer „Reihe“ und ein erstes Beispiel	57
2.2.2 Weitere Beispiele von Reihen	58
2.2.3 Konvergenzkriterien	62

2.2.4	Weiterführende Konvergenzkriterien *	66
2.3	Rekursionen	70
2.3.1	Mathematische Form einer Rekursionsbeziehung	71
2.3.2	Beispiele von Rekursionsbeziehungen	71
2.3.3	Fibonacci-Zahlen und die binomische Formel	75
2.3.4	Die Ackermann-Péter-Rekursion	76
2.4	Übungsaufgaben	78
3	Vektoren, Matrizen und Determinanten	83
3.1	Vektoren und Vektorräume – eine Einführung	83
3.1.1	Die Eigenschaften eines Vektorraums	85
3.2	Das Skalarprodukt	86
3.2.1	Axiome und Eigenschaften des Skalarprodukts	87
3.2.2	Geometrische Interpretation	89
3.2.3	Der Ortsraum der Physik ... etwas allgemeiner	91
3.3	Das Vektor- oder Kreuzprodukt	92
3.3.1	Definition und physikalische Anwendungen	92
3.3.2	Eigenschaften des Vektorprodukts	94
3.3.3	Das Vektorprodukt und der Sinussatz	96
3.3.4	Vektorprodukte von Basisvektoren	97
3.3.5	Komponentendarstellung des Vektorprodukts	99
3.3.6	Mehrfachvektorprodukte	100
3.3.7	2×2 -Matrizen und Determinanten	102
3.3.8	Das Vektorprodukt und 2×2 -Determinanten	102
3.4	Das Spatprodukt	103
3.4.1	Definition und Eigenschaften des Spatprodukts	103
3.4.2	Geometrische Bedeutung des Spatprodukts	106
3.5	Lineare Gleichungssysteme – eine Einführung	107
3.5.1	Lineare Gleichungssysteme für 1 oder 2 Variable	108
3.5.2	Matrixmultiplikation	111
3.5.3	Zeilen- und Spaltenvektoren: die Transposition	113
3.5.4	Die inverse Matrix	115
3.5.5	Spezialfall der 2×2 -Matrix: Drehungen	116
3.5.6	Komplexe Zahlen als 2×2 -Matrizen	117
3.6	Lineare Gleichungssysteme in 3 Variablen	119
3.6.1	Die Transposition dreidimensionaler Vektoren und Matrizen	120
3.6.2	Lösung des dreidimensionalen Gleichungssystems	121
3.6.3	Die Inverse einer 3×3 -Matrix	122
3.6.4	Dreidimensionale Drehungen	124
3.6.5	Jenseits der komplexen Zahlen	127
3.7	Lineare Gleichungssysteme in n Variablen *	128
3.7.1	Die Transposition n-dimensionaler Vektoren und Matrizen *	130
3.7.2	Determinanten *	131
3.7.3	Die inverse Matrix und lineare Gleichungssysteme *	141
3.8	Übungsaufgaben	144

4 Funktionen einer reellen Variablen	151
4.1 Reellwertige Funktionen – eine Einführung	151
4.1.1 Funktionen und Umkehrfunktionen	152
4.1.2 Elementare Beispiele	153
4.1.3 Stetigkeit oder Unstetigkeit von Funktionen	163
4.2 Ableitungen von Funktionen	165
4.2.1 Eigenschaften von Ableitungen	170
4.2.2 Ableitungen von elementaren Funktionen	172
4.2.3 Kurvendiskussion	177
4.3 Exponentialfunktionen und Logarithmen	179
4.3.1 Vom Logarithmus zur Exponentialfunktion	180
4.3.2 Hyperbelfunktionen und ihre Umkehrfunktionen	184
4.3.3 Trigonometrische Funktionen und ihre Inversen	191
4.4 Asymptotisches Verhalten	193
4.4.1 Notationen	194
4.4.2 Die Taylor-Formel	200
4.4.3 Die Taylor-Formel – elementare Beispiele	202
4.4.4 Die Taylor-Formel – Exponential- und Sinusfunktion	205
4.4.5 Weitere Beispiele für Taylor-Formeln	209
4.4.6 Grenzwerte von Quotienten	211
4.4.7 Herleitung des Satzes von Taylor	214
4.5 Übungsaufgaben	218
5 Funktionen mehrerer Veränderlicher	223
5.1 Funktionen mehrerer Variabler – eine Einführung	224
5.1.1 Partielle Ableitungen	224
5.1.2 Höhere partielle Ableitungen	225
5.1.3 Produkt- und Kettenregel	227
5.2 Anwendungsbeispiel: Die Methode der kleinsten Quadrate	228
5.3 Vektoranalysis im dreidimensionalen Raum	233
5.3.1 Der Nabla-Operator	233
5.3.2 Die Divergenz	237
5.3.3 Die Rotation	240
5.3.4 Kombinationen von Gradient, Divergenz, Rotation	244
5.3.5 Der Laplace-Operator	245
5.4 Übungsaufgaben	247
6 Integration und Integrale	249
6.1 Integration und Integrale – eine Einführung	250
6.1.1 Unbestimmte und bestimmte Integrale	250
6.1.2 Beispiele (un)bestimmter Integrale	251
6.1.3 Geometrische Interpretation der Integration	253
6.1.4 Riemann-Summen	254
6.1.5 (Un)eigentliche Integrale, Hauptwertintegrale	261
6.1.6 Die Substitutionsregel	266
6.1.7 Partielle Integration	269
6.1.8 Integrale trigonometrischer Funktionen	271
6.1.9 Weitere Rekursionsmethoden	275

6.1.10	Integrale rationaler Funktionen	276
6.2	Riemann-Summe und numerische Integration	280
6.2.1	Die Mittelpunktsformel	280
6.2.2	Die Trapezformel	283
6.2.3	Die Simpson-Regel	286
6.3	Zweidimensionale Integrale	289
6.3.1	Berechnung zweidimensionaler Integrale	289
6.3.2	Zweidimensionale Integrale – Beispiele	294
6.3.3	Die Integrationsreihenfolge	297
6.3.4	Polarkoordinaten	299
6.3.5	Gauß-Integrale	303
6.4	Drei- und höherdimensionale Integrale	306
6.4.1	Geometrisches Bild höherdimensionaler Integrale	307
6.4.2	Riemann-Summen in höheren Dimensionen	308
6.4.3	Kugelkoordinaten	312
6.4.4	Dreidimensionale Integrale mit sphärischer Symmetrie	315
6.4.5	Zylinderkoordinaten	319
6.5	Asymptotische Entwicklungen *	320
6.5.1	Die Stirling-Formel *	321
6.5.2	Beispiel einer „Störungstheorie“ *	324
6.5.3	Die Gauß'sche Fehlerfunktion *	326
6.5.4	Das Symbol „ $\approx$ “ für asymptotische Reihen *	329
6.5.5	Die Integralexponentialfunktion *	331
6.6	Übungsaufgaben	332
7	Differentialgleichungen	337
7.1	Differentialgleichungen, eine Einführung	337
7.1.1	Allgemeine Form gewöhnlicher Differentialgleichungen	338
7.1.2	Wachstums- und Zerfallsprozesse	339
7.1.3	Die logistische Differentialgleichung	341
7.1.4	Die harmonische Schwingung	342
7.1.5	Bewegung in allgemeinen Potentialen	344
7.1.6	Existenz? Eindeutigkeit?	348
7.2	Die Differentialgleichungen der Mechanik	350
7.2.1	Die gleichförmige, geradlinige Bewegung	351
7.2.2	Der freie Fall	351
7.2.3	Reibung in Flüssigkeiten	353
7.2.4	Reibung in Gasen	354
7.2.5	Fall mit Reibung in Flüssigkeiten	356
7.2.6	Der „schwingende Aufzug“	357
7.2.7	Fall mit Reibung in Gasen	358
7.2.8	Reduktion auf Differentialgleichungen erster Ordnung	360
7.3	Allgemeine analytische Lösungsverfahren	361
7.3.1	Allgemeine lineare Gleichung, integrierende Faktoren	361
7.3.2	Lösung durch Variablentrennung	364
7.3.3	Beispiel: Das Lotka-Volterra-Modell	366
7.3.4	Lösung einer homogenen Differentialgleichung	373
7.3.5	Lösung durch Substitution	377

7.3.6	Lösung durch Differentiation	378
7.3.7	Lösung durch Erniedrigung der Ordnung	382
7.3.8	Exakte und nicht-exakte Differentiale	384
7.3.9	Lösung durch Parametrisierung	389
7.3.10	Lösung in der Form einer Potenzreihe	396
7.4	Numerische Lösung von Differentialgleichungen	410
7.4.1	Euler-Verfahren	410
7.4.2	Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung	416
7.4.3	Runge-Kutta-Verfahren zweiter Ordnung (Variante)	417
7.4.4	Verfahren höherer Ordnung *	419
7.5	Übungsaufgaben	421
8	Wahrscheinlichkeitsrechnung	425
8.1	Laplace-Experimente	428
8.2	Die Binomialverteilung	430
8.2.1	Die Verteilung von Gasatomen über zwei Teilvolumina	430
8.3	Die Poisson-Verteilung	433
8.4	Die Gauß-Verteilung	435
8.5	Der Zentrale Grenzwertsatz	438
8.6	Wahrscheinlichkeitsdichten	441
8.6.1	Die Gauß-Verteilung als Wahrscheinlichkeitsdichte	441
8.6.2	Die Exponentialverteilung	442
8.6.3	Die uniforme Verteilung	444
8.6.4	Die Deltaverteilung	444
8.6.5	Im Rückblick: Der Mittelwertsatz	448
8.6.6	Die charakteristische Funktion	450
8.6.7	Die Lorentz- oder Cauchy-Verteilung	454
8.7	Übungsaufgaben	456
9	Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale	459
9.1	Funktionen mehrerer Variabler	459
9.1.1	Linearisierung von Funktionen mehrerer Variabler	460
9.1.2	Taylor-Entwicklung in mehreren Variablen	461
9.1.3	Die Funktionalmatrix	467
9.1.4	Die Funktionaldeterminante	468
9.2	Kurvenintegrale	472
9.2.1	Allgemeine Begriffe	472
9.2.2	Das skalare Kurvenintegral	472
9.2.3	Das vektorielle Kurvenintegral	474
9.3	Flächenintegrale im dreidimensionalen Raum	476
9.3.1	Allgemeine Begriffe	476
9.3.2	Das skalare Flächenintegral	481
9.3.3	Das vektorielle Flächenintegral	485
9.3.4	Der Satz von Stokes für orientierte Flächen	489
9.3.5	Der Stokes'sche Satz – erste Beispiele	492
9.3.6	Der Stokes'sche Satz – ein singuläres Beispiel	494
9.3.7	Berechnung der Rotation in sphärischen Koordinaten	499
9.4	Integrationen über orientierte Volumina	501

9.4.1	Parametrisierung eines Integrationsvolumens	502
9.4.2	Der Satz von Gauß für orientierte Volumina	505
9.4.3	Beweis des Gauß'schen Satzes	507
9.4.4	Der Gauß'sche Satz – erste Beispiele	509
9.4.5	Der Gauß'sche Satz – ein singuläres Beispiel	513
9.4.6	Konsequenzen des Gauß'schen Satzes	519
9.5	Differentiale und Differentialformen *	522
9.5.1	Integration von p-Formen *	530
9.5.2	Äußeres Differential von p-Formen *	532
9.5.3	Ein vierdimensionales Beispiel aus der Elektrodynamik * . .	536
9.5.4	Zusammenfassung und Ausblick *	538
9.6	Übungsaufgaben	540
A	Lösungen zu den Übungsaufgaben	547
A.1	Zahlen	547
A.2	Folgen, Reihen und Rekursionen	556
A.3	Vektoren, Matrizen und Determinanten	561
A.4	Funktionen einer reellen Variablen	569
A.5	Funktionen mehrerer Veränderlicher	574
A.6	Integration und Integrale	578
A.7	Differentialgleichungen	587
A.8	Wahrscheinlichkeitsrechnung	600
A.9	Kurven-, Flächen- und Volumenintegrale	605
	Liste der Symbole	619
	Literaturverzeichnis	623
	Stichwortverzeichnis	627