

---

# Perspektiven der Mathematikdidaktik

**Herausgegeben von**

G. Kaiser, Hamburg, Deutschland

R. Borromeo Ferri, W. Blum, Kassel, Deutschland

In der Reihe werden Arbeiten zu aktuellen didaktischen Ansätzen zum Lehren und Lernen von Mathematik publiziert, die diese Felder empirisch untersuchen, qualitativ oder quantitativ orientiert. Die Publikationen sollen daher auch Antworten zu drängenden Fragen der Mathematikdidaktik und zu offenen Problemfeldern wie der Wirksamkeit der Lehrerbildung oder der Implementierung von Innovationen im Mathematikunterricht anbieten. Damit leistet die Reihe einen Beitrag zur empirischen Fundierung der Mathematikdidaktik und zu sich daraus ergebenden Forschungsperspektiven.

**Herausgegeben von**

Prof. Dr. Gabriele Kaiser  
Universität Hamburg

Prof. Dr. Rita Borromeo Ferri,  
Prof. Dr. Werner Blum,  
Universität Kassel

---

Susanne Brand

# Erwerb von Modellierungs- kompetenzen

Empirischer Vergleich eines  
holistischen und eines atomistischen  
Ansatzes zur Förderung von  
Modellierungskompetenzen



**Springer** Spektrum

Susanne Brand  
Hamburg, Deutschland

Dissertation Universität Hamburg, 2014

ISBN 978-3-658-06678-9

ISBN 978-3-658-06679-6 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-658-06679-6

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.

Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

[www.springer-spektrum.de](http://www.springer-spektrum.de)

## Geleitwort

Die Dissertation von Susanne Brand zum Thema „Erwerb von Modellierungskompetenzen. Ein empirischer Vergleich eines holistischen und eines atomistischen Modellierungsansatzes zur Förderung von Modellierungskompetenzen“ befasst sich mit einer Fragestellung, die in der aktuellen Modellierungsdiskussion intensiv diskutiert wird, wie Modellierungskompetenzen effektiv gefördert werden können. Sie fokussiert dabei zwei extreme Vorgehensweisen, ein ganzheitliches Vorgehen, in dem der Modellierungsprozess als Ganzes durchlaufen wird und ein atomistisches Vorgehen, in dem nur Teilprozesse durchlaufen werden. Sie untersucht die Effektivität dieser Ansätze mittels einer empirischen Studie, an der für eine Einzelpromotion eine große Stichprobe erreicht wurde, nämlich 15 Klassen mit 377 Schülerinnen und Schülern der 9. Jahrgangsstufe an Gymnasien und Stadtteilschulen. Susanne Brand hat äußerst überzeugend und souverän diese mit der selbständigen Durchführung einer solchen Studie verbundenen Ansprüche gemeistert und im Rahmen ihrer Dissertation die verschiedenen Ansätze zur Implementierung von komplexeren Modellierungsbeispielen in den normalen Mathematikunterricht in eine Interventionsstudie umgesetzt und diese empirisch evaluiert. Dabei hat Susanne Brand die Effektivität der beiden Ansätze mittels Methoden der empirischen Bildungsforschung untersucht, die deutlich über das in vielen Dissertationen übliche Methodenrepertoire hinausgehen und die Dissertation auf ein ungewöhnlich hohes Niveau heben.

Die Arbeit beginnt mit einer knappen Einleitung zur Problemstellung und den Zielen der Untersuchung, bevor der theoretische Bezugsrahmen dargestellt wird. Der Stand der aktuellen Modellierungsdiskussion, sowohl national als auch international, wird souverän dargestellt. Insbesondere der Begriff der mathematischen Modellierungskompetenz wird sorgfältig diskutiert und dargestellt unter Bezug auf die allgemeine erziehungswissenschaftliche Diskussion, aber auch die empirische Bildungsforschung. Dabei unterscheidet Susanne Brand die verschiedenen Teilkompetenzen des Modellierens in Einklang mit aktuellen Ansätzen der Modellierungsdiskussion, was sehr hilfreich ist. Dabei hat Susanne Brand den für die empirische Studie nötigen Stand der Diskussion umfassend dargestellt, wohltuend konzentriert auf die zentralen Aspekte. Anschlie-

ßend wird von Susanne Brand die entwickelte Studie ERMO dargestellt, d.h. die von ihr selbst entwickelten Modellierungsaktivitäten, die sich auf Beispiele aus der aktuellen Modellierungsdiskussion beziehen, aber auch eigene Ideen beinhalten. Das Design der Studie ist äußerst innovativ und überzeugend und kann beispielgebend für andere Studien sein. Besonders interessant sind die einzelnen Modellierungsbeispiele, sowohl für die holistischen als auch die atomistischen Modellierungsaktivitäten, die ausführlich dargestellt und didaktisch reflektiert werden. Die Entwicklung zweier Arten von Modellierungsbeispielen, die einerseits möglichst ähnlich sind, andererseits aber doch in den unterschiedlichen Vorgehensweisen eingesetzt werden können, ist hoch komplex und doch gelingt Susanne Brand hier eine überzeugende Lösung.

Des Weiteren hat Susanne Brand ein beeindruckendes Instrumentarium zur Messung von Modellierungskompetenzen entwickelt, ausgehend von in der Literatur vorfindlichen Ansätzen wird ein äußerst durchdachtes Design entwickelt. Die Ergebnisse der Studie sind selbstverständlich das Herzstück der Arbeit: Nach einer Gegenüberstellung verschiedener Modelle entscheidet sich Susanne Brand für das methodologisch angemessenste und beschreibt darauf aufbauend ihre Ergebnisse, und zwar für die einzelnen Subkompetenzen, also Vereinfachen/Mathematisieren, Mathematisch Arbeiten, Interpretieren/Validieren und der Gesamtmodellierungskompetenz. Die Ergebnisse bestätigen nur zum Teil die vorweg aufgestellten Hypothesen. So zeigt sich in der Tat ein Kompetenzzuwachs bei beiden Gruppen zwischen den drei Messzeitpunkten. Die angenommenen Unterschiede zwischen den beiden Vorgehensweisen bzgl. der Teilkompetenzen bestätigen sich jedoch nicht, lediglich für den Teilprozess Vereinfachen/Mathematisieren zeigen sich positive Effekte für den holistischen Ansatz. Für die Kompetenzdimension Gesamtmodellieren zeigen sich dann die erwarteten Leistungsvorteile für die holistische Gruppe. Susanne Brand diskutiert, dass diese Kompetenzfacette keine globale Modellierungskompetenz darstellt, sondern sich auf die Kompetenz des Einordnens der Modellierungsschritte in den Modellierungskreislauf beschränkt unter Vernachlässigung von metakognitiven Kompetenzen. Die Analyse der Daten nach Schulform zeigt einen hochinteressanten und durchaus unerwarteten Effekt auf, nämlich die Tatsache, dass für die leistungsstärkeren Schülerinnen und Schüler der Gymnasien es weniger bedeutsam ist, welcher Modellierungsansatz eingesetzt wird, dass

jedoch der atomistische Ansatz für die leistungsschwächeren Schülerinnen und Schüler der Stadtteilschulen weniger geeignet ist. Dieses Ergebnis ist sicherlich durch die Art der Aufgaben beeinflusst, weist jedoch darauf hin, dass als vermeintlich zu schwierig anzusehende komplexe Modellierungsaufgaben durchaus in einem gesamten Modellierungsprozess mit leistungsschwächeren Lernenden behandelt werden können und nicht von vorneherein Vereinfachungen vorzunehmen sind. Die Analysen der Daten nach Geschlecht zeigen gemischte Effekte für die einzelnen Kompetenzfacetten und keinen Einfluss des Geschlechts auf das zugrundeliegende Modellierungsvorgehen.

Abschließend erfolgt eine Analyse der Daten im eindimensionalen Modell. Dabei bestätigen die Daten, dass es einen Leistungszuwachs über die drei Messzeitpunkte gibt, dass jedoch das Modellierungsvorgehen nicht bedeutsam ist. Lediglich für die Lernenden aus den Stadtteilschulen zeigen sich bessere Ergebnisse beim holistischen Vorgehen. Diese Ergebnisse sind in Einklang mit den Ergebnissen der mehrdimensionalen Analyse der Daten.

Abschließend ist festzustellen, dass die Arbeit einen hohen Innovationsgehalt aufweist. Susanne Brand gelingt es überzeugend, aus der Fülle der Fragen, wie Modellierungskompetenzen zu fördern sind, eine empirisch überprüfbare Fragestellung zu destillieren und diese dann in einer, hohen empirischen Standards genügenden, Studie umzusetzen, die für weitere Arbeiten hoffentlich beispielgebend sein wird.

Prof. Dr. Gabriele Kaiser

## Danksagung

Mein besonderer Dank gilt Frau Prof. Dr. Gabriele Kaiser für die Betreuung der vorliegenden Arbeit, ihre stete Unterstützung, die unzähligen hilfreichen Ratschläge und ihr jederzeit offenes Ohr für Fragen und Probleme!

Herzlich bedanken möchte ich mich ebenfalls bei Herrn Prof. Dr. Knut Schwippert für seine hilfreiche Beratung in methodischen Fragen und bei Herrn Prof. Dr. Werner Blum für sein Interesse und die Unterstützung dieser Arbeit und die Übernahme des Zweitgutachtens.

Ein großer Dank gebührt darüber hinaus im Besonderen Nils Buchholtz für seine Unterstützung bei der Skalierung der erhobenen Daten sowie Dr. Katrin Vorhölder für ihre Unterstützung bei der Entwicklung der Modellierungsaktivitäten und der Vorbereitung und Durchführung der Trainings für die Lehrkräfte. Danken möchte ich auch dem gesamten Arbeitsbereich der Mathematikdidaktik an der Universität Hamburg für die zahlreichen konstruktiven Anmerkungen und Ratschläge im Rahmen des Forschungskolloquiums und außerhalb.

Selbstverständlich danke ich ebenso herzlich den Lehrkräften, welche die Modellierungsaktivitäten durchgeführt haben, den an dem Projekt beteiligten Schülerinnen und Schülern sowie den studentischen Hilfskräften, die mich bei den Hospitationen der Modellierungsaktivitäten und Kodierungen der Modellierungstests unterstützt haben.

Nicht zuletzt danke ich Prof. Dr. Stanislaw Schukajlow, meiner Mutter Annegret Grünewald, meinem Ehemann Leo Brand und Hannah Heinrichs für die vielen konstruktiven inhaltlichen und formalen Anmerkungen zur vorliegenden Arbeit.

Und schließlich danke ich von ganzem Herzen meiner Familie und meinen Freunden, allen voran meinem Ehemann Leo Brand und meiner Mutter Annegret Grünewald, die mich stets auf Neue unterstützt, motiviert, gestärkt haben.



*Diese Arbeit widme ich meiner Familie, allen voran  
meinem Ehemann Leo, meinen Eltern Annegret und Günter  
sowie meinen Geschwistern Kathrin und Eckhard.*

# Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung.....	1
2	Theoretischer Rahmen.....	5
2.1	Mathematisches Modellieren.....	6
2.1.1	Nationale und internationale Modellierungsperspektiven..	8
2.1.2	Modellierungskreisläufe als Darstellung des Modellierungsprozesses.....	11
2.1.3	Kriterien für Modellierungsaufgaben .....	17
2.2	Mathematische Modellierungskompetenzen .....	20
2.2.1	Kompetenzbegriff .....	20
2.2.2	Definitionen mathematischer Modellierungskompetenzen.....	21
2.2.3	Mathematische Modellierung in den Bildungsstandards .	27
2.2.4	Teilkompetenzen und Teilprozesse mathematischer Modellierung .....	29
2.2.5	Kompetenzmodelle mathematischen Modellierens.....	32
2.3	Erwerb von Modellierungskompetenzen .....	35
2.3.1	Holistischer Modellierungsansatz.....	36
2.3.2	Atomistischer Modellierungsansatz.....	37
2.4	Ergebnisse empirischer Studien zum Erwerb von Modellierungskompetenzen .....	39
2.4.1	Rekonstruierte Gelingensbedingungen für Modellierungsaktivitäten .....	40
2.4.2	Rekonstruierte Schwierigkeiten im Modellierungsprozess .....	52
2.5	Zusammenfassung und eigener Ansatz.....	57
3	Forschungsfragen und Hypothesen.....	63

4	Modellierungsaktivitäten im Rahmen des Projekts ERMO.....	65
4.1	Leitidee des ERMO-Projekts .....	66
4.2	Grundlagen der Modellierungsaktivitäten.....	67
4.3	Überblick über die Unterrichtseinheiten .....	70
4.4	Holistische Modellierungsaktivitäten – Aufgabenbeispiele.....	75
4.4.1	Holistisches Beispiel H1: Heide-Park Resort oder Hamburger Dom? .....	75
4.4.2	Holistisches Beispiel H2: Der Seeler-Fuß in XXL .....	79
4.4.3	Holistisches Beispiel H3: Erdgas.....	83
4.4.4	Holistisches Beispiel H4: LichtBlick Regenwald- Engagement .....	87
4.5	Atomistische Modellierungsaktivitäten .....	91
4.5.1	Atomistisches Beispiel A1: Heide-Park Resort oder Hamburger Dom? .....	92
4.5.2	Atomistisches Beispiel A2: Der Seeler-Fuß in XXL.....	96
4.5.3	Atomistisches Beispiel A3: Erdgas .....	101
5	Methodischer Rahmen der Studie .....	103
5.1	Rahmeninformation zum ERMO-Projekt und zur Studie.....	103
5.1.1	Stichprobe der Studie .....	106
5.1.2	Untersuchungsdesign.....	108
5.1.3	Treatmentkontrolle.....	109
5.2	Erhebungsmethoden .....	109
5.2.1	Erfassung der Modellierungskompetenzen .....	110
5.2.2	Testkonstruktion .....	112
5.2.3	Testdesign .....	120
5.3	Auswertungsmethoden.....	123
5.3.1	Kodierung der Fragebögen.....	124

5.3.2	Rekonstruktion der Modellierungskompetenzen mittels IRT.....	125
5.3.3	Skalierung der Daten.....	131
5.3.4	Auswertung der Personenparameter .....	137
6	Ergebnisse der empirischen Studie.....	141
6.1	Skalierung der Kompetenz des mathematischen Modellierens .....	141
6.1.1	Ergebnisse der Modellvergleiche .....	141
6.1.2	Diskussion der Kompetenzstruktur.....	146
6.2	Kennwerte des vierdimensionalen between-item Modells ....	149
6.2.1	Wright Map .....	150
6.2.2	Itemkennwerte .....	152
6.2.3	Latente und bivariate Korrelationen der Dimensionen ..	156
6.2.4	Diskussion der Modellkennwerte.....	158
6.3	Ergebnisse zur durchschnittlichen Kompetenzentwicklung ..	161
6.3.1	Entwicklung der Dimensionen von Modellierungskompetenzen.....	162
6.3.1.1	Kompetenzentwicklung in der Dimension VM.....	162
6.3.1.2	Kompetenzentwicklung in der Dimension MA.....	166
6.3.1.3	Kompetenzentwicklung in der Dimension IV.....	170
6.3.1.4	Kompetenzentwicklung in der Dimension GM.....	175
6.3.1.5	Diskussion der Ergebnisse zur Kompetenzentwicklung.....	179
6.3.2	Entwicklung der Modellierungskompetenzen nach Schulform.....	187
6.3.2.1	Kompetenzentwicklung in der Dimension VM (nach Schulform).....	187

6.3.2.2	Kompetenzentwicklung in der Dimension MA (nach Schulform).....	197
6.3.2.3	Kompetenzentwicklung in der Dimension IV (nach Schulform).....	206
6.3.2.4	Kompetenzentwicklung in der Dimension GM (nach Schulform).....	215
6.3.2.5	Diskussion der Ergebnisse zur schulformspezifischen Kompetenzentwicklung....	225
6.3.3	Entwicklung der Modellierungskompetenzen nach Geschlecht.....	232
6.3.3.1	Kompetenzentwicklung in der Dimension VM (nach Geschlecht).....	232
6.3.3.2	Kompetenzentwicklung in der Dimension MA (nach Geschlecht).....	241
6.3.3.3	Kompetenzentwicklung in der Dimension IV (nach Geschlecht).....	249
6.3.3.4	Kompetenzentwicklung in der Dimension GM (nach Geschlecht).....	258
6.3.3.5	Diskussion der Ergebnisse zur geschlechtsspezifischen Kompetenzentwicklung..	268
6.4	Kompetenzentwicklung im eindimensionalen Modell.....	273
6.4.1	Kompetenzentwicklung im eindimensionalen Modell nach Schulform.....	277
6.4.2	Kompetenzentwicklung im eindimensionalen Modell nach Geschlecht.....	285
6.4.3	Diskussion der Kompetenzentwicklung im eindimensionalen Modell.....	292
7	Zusammenfassung und Ausblick.....	295
7.1	Zusammenfassende Diskussion der Ergebnisse.....	295

Inhaltsverzeichnis	XVII
7.1.1    Erfassung von Modellierungskompetenzen und Kompetenzstruktur .....	296
7.1.2    Effekte des Modellierungsansatzes auf die Kompetenzentwicklung.....	297
7.2      Grenzen der Studie und Ausblick.....	301
Literaturverzeichnis .....	305
Abbildungsverzeichnis.....	329
Tabellenverzeichnis.....	333
Anhang .....	341
Anhang 1: Abkürzungsverzeichnis .....	341
Anhang 2: Zusammenfassung .....	343
Anhang 3: English Summary .....	345