
Mathematik zum Studienbeginn

Arnfried Kemnitz

Mathematik zum Studienbeginn

Grundlagenwissen für alle technischen,
mathematisch-naturwissenschaftlichen
und wirtschaftswissenschaftlichen
Studiengänge

11., erweiterte Auflage 2014

Arnfried Kemnitz
Technische Universität Braunschweig
Braunschweig, Deutschland

ISBN 978-3-658-02080-4 ISBN 978-3-658-02081-1 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-658-02081-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Fachmedien Wiesbaden 1998, 1999, 2000, 2001, 2002, 2004, 2006, 2009, 2010, 2011, 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch, Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort zur 11. Auflage

Auch die aktuellen Studien sowie eigene Lehrerfahrungen an der TU Braunschweig zeigen, dass das mathematische Grundlagenwissen zum Studienbeginn lückenhaft ist. Deshalb wurden für die 11. Auflage die einleitenden Abschnitte über Mengen sowie über Aussageformen und logische Zeichen deutlich erweitert. Außerdem werden in einem neuen Abschnitt grundlegende mathematische Beweisprinzipien erläutert und an verschiedenen Beispielen durchgeführt.

Braunschweig, März 2013

Arnfried Kemnitz

Vorwort zur 8. Auflage

Für die 8. Auflage wurden verschiedene Textteile überarbeitet und einige inhaltliche Änderungen vorgenommen. Inzwischen sind alle Abbildungen elektronisch neu erstellt und weiter verbessert.

Braunschweig, Februar 2009

Arnfried Kemnitz

Vorwort zur 5. Auflage

Der Text wurde weiter verbessert und an die neue Rechtschreibung angepasst. Dabei wurden an verschiedenen Stellen auch Hinweise und Vorschläge von Lesern aufgegriffen und berücksichtigt.

Der Autor bedankt sich für den sehr guten Zuspruch und die zahlreichen äußerst positiven Reaktionen auf das Buch.

Die Pisa-Studie hat deutlich aufgezeigt, dass ausreichende mathematische Kenntnisse, die für zahlreiche Studiengänge notwendig sind, zum Studienbeginn nicht unbedingt vorausgesetzt werden können. Es ist ein Hauptziel der „Mathematik zum Studienbeginn“, mathematische Verständnis- und Wissenslücken zu schließen, um das Studium gut gerüstet beginnen zu können.

Braunschweig, Oktober 2002

Arnfried Kemnitz

Vorwort zur 2. Auflage

Nur wenige Monate nach Einführung erscheint eine 2. Auflage dieses Buches. Dies zeigt, dass das Konzept der „Mathematik zum Studienbeginn“ von den Lesern angenommen wird.

Für zahlreiche Zuschriften mit konstruktiven Bemerkungen bedanke ich mich. Einige der Hinweise sind in dieser Auflage berücksichtigt. Auf mehrfachen Wunsch ist das Kapitel über Kombinatorik erweitert worden.

Braunschweig, Mai 1999

Arnfried Kemnitz

Vorwort zur 1. Auflage

Die Mathematik ist ein wichtiges Grundlagenfach für viele Studiengänge an Fachhochschulen, Technischen Hochschulen und Universitäten. Studierende vieler Fachrichtungen benötigen zum Beginn ihres Studiums gute mathematische Grundkenntnisse.

Dieses Buch wendet sich an Studentinnen und Studenten ingenieurwissenschaftlicher, technischer, wirtschaftswissenschaftlicher und mathematisch-naturwissenschaftlicher Studiengänge sowie an Lehramtsstudierende.

Eine internationale Studie von TIMSS (Third International Mathematics and Science Study), deren Ergebnisse im Frühjahr dieses Jahres veröffentlicht wurden, zum Wissensstand in Mathematik von Schülern der Abschlussklassen in 24 europäischen und außereuropäischen Ländern hat gezeigt, dass die deutschen Schüler nur einen Platz im unteren Mittelfeld einnehmen. Zum Beispiel hatten 30 % der befragten deutschen Schüler Schwierigkeiten beim Auflösen von Gleichungen mit einer Unbekannten.

Auch eigene Lehrerfahrungen in mathematischen Grundvorlesungen an der Technischen Universität Braunschweig zeigen, dass viele Studienbeginnerinnen und Studienbeginner Anfangsschwierigkeiten haben, wofür es eine Reihe unterschiedlicher Ursachen gibt. Viele dieser Schwierigkeiten beruhen darauf, dass der Schulstoff, der an den Hochschulen und Universitäten vorausgesetzt wird, nicht sicher beherrscht wird. Nicht selten führen solche Probleme in den mathematischen Grundlagen sogar zum Studienabbruch.

Das Buch will helfen, solche Anfangsschwierigkeiten zu vermeiden. Es enthält als einen Schwerpunkt einen Überblick des Schulstoffs. Vor allem die für die Mathematikausbildung des Studiums wichtigen Gebiete sind ausführlich und mit vielen Beispielen dargestellt. Die Grundlagen der Mathematik werden systematisch und methodisch aufbereitet präsentiert. Das Buch eignet sich deshalb sehr gut zum Selbststudium für die Vorbereitung auf das Hochschulstudium.

An vielen Hochschulen und Universitäten finden vor Beginn eines Wintersemesters Vorkurse oder Brückenkurse in Mathematik statt. Diese Kurse wenden sich an Studienbeginner aller Mathematik anwendenden Fachrichtungen, vor allem also an die ingenieurwissenschaftlichen, mathematisch-naturwissenschaftlichen und wirtschaftswissenschaftlichen Studiengänge. In diesen Kursen sollen die für das Studium erforderlichen Kenntnisse in Mathematik aufgefrischt bzw. vervollständigt werden. Dieses Buch

eignet sich wegen der grundlegenden Begriffserläuterungen mit vielen Beispielen sehr gut als Begleitbuch für einen solchen Brückenkurs oder Vorkurs.

Darüber hinaus werden als weiterer Schwerpunkt mathematische Grundlagen für die Anfangssemester behandelt wie Analytische Geometrie und Differential- und Integralrechnung. Deshalb ist das Buch auch als begleitendes Lehr- und Handbuch für die Grundvorlesungen von großem Interesse.

Alle behandelten Themen sind durchgängig verständlich dargestellt. Zahlreiche Beispiele sollen die Kenntnisse vertiefen, viele Abbildungen sollen mathematische Objekte visualisieren und Ergebnisse veranschaulichen. Großer Wert wurde auf Anschaulichkeit gelegt.

Die einzelnen Abschnitte können weitgehend unabhängig voneinander durchgearbeitet werden, Verweise erleichtern das Auffinden notwendiger Begriffserläuterungen.

Das Buch eignet sich auch gut als Nachschlagewerk für die Grundlagen der Mathematik, eben als *das* Mathematikbuch zum Studienbeginn.

Für Studierende ingenieurwissenschaftlicher Fachbereiche sind die im gleichen Verlag erschienenen Werke „Das Techniker Handbuch“ (Hrsg. A. Böge), „Vieweg Handbuch Elektrotechnik“ (Hrsg. W. Böge) sowie „Vieweg Lexikon Technik“ (Hrsg. A. Böge) von großem Interesse, deren Mathematikabschnitte von Dr. F. Kemnitz bzw. vom Autor dieses Buches geschrieben wurden.

Der Autor bedankt sich bei Frau U. Schmickler-Hirzebruch vom Verlag Vieweg für die gute Zusammenarbeit. Mein besonderer Dank gilt meinen Kollegen Dr. W. Oelke, C. Thürmann und Dr. H. Weiß für die Mithilfe bei der Erstellung der reproduktionsfähigen Druckvorlage.

Inhaltsverzeichnis

1	Arithmetik	1
1.1	Mengen	1
1.2	Aussageformen und logische Zeichen	4
1.3	Einteilung der Zahlen	8
1.4	Grundrechenarten	11
1.5	Grundlegende Rechenregeln	12
1.5.1	Buchstabenrechnen	12
1.5.2	Kehrwert, Quersumme	12
1.5.3	Teilbarkeitsregeln	12
1.5.4	Punktrechnung vor Strichrechnung	13
1.5.5	Potenzrechnung vor Punktrechnung	13
1.5.6	Grundgesetze der Addition und Multiplikation	14
1.5.7	Grundregeln der Klammerrechnung	14
1.5.8	Multiplikation mit Klammern	15
1.5.9	Indizes, Summenzeichen, Produktzeichen	17
1.5.10	Binomische Formeln	18
1.5.11	Division mit Klammern	18
1.6	Bruchrechnung	19
1.6.1	Definitionen	19
1.6.2	Erweitern und Kürzen	20
1.6.3	Addieren und Subtrahieren gleichnamiger Brüche	21
1.6.4	Addieren und Subtrahieren ungleichnamiger Brüche	21
1.6.5	Multiplizieren von Brüchen	22
1.6.6	Dividieren von Brüchen	23
1.7	Potenz- und Wurzelrechnung	24
1.7.1	Definition der Potenz	24
1.7.2	Regeln der Potenzrechnung	25
1.7.3	Definition der Wurzel	28
1.7.4	Regeln der Wurzelrechnung	29

1.8	Dezimalzahlen und Dualzahlen.....	33
1.8.1	Dezimalsystem	34
1.8.2	Dualsystem	35
1.8.3	Runden.....	36
1.9	Logarithmen.....	36
1.9.1	Definition des Logarithmus	36
1.9.2	Spezielle Basen	37
1.9.3	Regeln der Logarithmenrechnung	38
1.9.4	Zusammenhang von Logarithmen mit verschiedenen Basen ...	39
1.9.5	Dekadische Logarithmen	40
1.10	Mittelwerte	41
1.10.1	Arithmetisches Mittel	41
1.10.2	Geometrisches Mittel.....	41
1.10.3	Harmonisches Mittel.....	42
1.10.4	Quadratisches Mittel	42
1.11	Ungleichungen.....	43
1.11.1	Definitionen und Rechenregeln.....	43
1.11.2	Absolutbetrag	44
1.11.3	Intervalle	45
1.12	Komplexe Zahlen.....	47
1.12.1	Algebraische Form.....	47
1.12.2	Trigonometrische Form	49
1.12.3	Addieren und Subtrahieren komplexer Zahlen.....	50
1.12.4	Multiplizieren komplexer Zahlen	51
1.12.5	Dividieren komplexer Zahlen.....	52
1.12.6	Potenzieren komplexer Zahlen	54
1.12.7	Radizieren komplexer Zahlen.....	55
1.12.8	Eulersche Formel	57
1.13	Beweisprinzipien	58
1.13.1	Direkter Beweis.....	58
1.13.2	Beweis durch Kontraposition.....	59
1.13.3	Widerspruchsbeweis (indirekter Beweis).....	59
1.13.4	Beweis mit vollständiger Induktion.....	59
2	Gleichungen.....	63
2.1	Gleichungsarten.....	63
2.2	Äquivalente Umformungen.....	66
2.3	Lineare Gleichungen.....	67
2.4	Proportionen	69
2.5	Quadratische Gleichungen.....	71
2.5.1	Definitionen	71
2.5.2	Lösungsverfahren.....	71
2.5.3	Satz von Viëta für quadratische Gleichungen	77

2.6	Algebraische Gleichungen höheren Grades.	78
2.6.1	Kubische Gleichungen.	78
2.6.2	Polynomdivision	80
2.6.3	Gleichungen vierten Grades.	82
2.6.4	Gleichungen n -ten Grades	86
2.6.5	Satz von Viëta für Gleichungen n -ten Grades	87
2.7	Auf algebraische Gleichungen zurückföhrbare Gleichungen	89
2.7.1	Bruchgleichungen	89
2.7.2	Wurzelgleichungen	90
2.8	Transzendente Gleichungen	93
2.8.1	Exponentialgleichungen	93
2.8.2	Logarithmische Gleichungen	94
2.8.3	Trigonometrische Gleichungen.	95
2.9	Lineare Gleichungssysteme	96
2.9.1	Definitionen	96
2.9.2	Zwei lineare Gleichungen mit zwei Variablen.	97
2.9.3	Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen.	101
2.9.4	Matrizen und Determinanten	103
2.10	Lineare Ungleichungen.	115
2.10.1	Definitionen	115
2.10.2	Lineare Ungleichungen mit einer Variablen	115
2.10.3	Lineare Ungleichungen mit zwei Variablen.	116
2.10.4	Lineare Ungleichungssysteme mit zwei Variablen	118
3	Planimetrie	121
3.1	Geraden und Strecken.	121
3.2	Winkel.	122
3.3	Grundkonstruktionen mit Zirkel und Lineal	126
3.4	Projektion	129
3.5	Geometrische Örter.	130
3.6	Dreiecke	131
3.6.1	Allgemeine Dreiecke	131
3.6.2	Gleichschenklige Dreiecke	133
3.6.3	Gleichseitige Dreiecke	133
3.6.4	Rechtwinklige Dreiecke.	134
3.6.5	Besondere Geraden, Strecken und Kreise.	135
3.6.6	Flächensätze im rechtwinkligen Dreieck	139
3.6.7	Kongruenz von Dreiecken	141
3.6.8	Grundkonstruktionen des Dreiecks	143
3.7	Vierecke.	146
3.7.1	Allgemeine Vierecke	146
3.7.2	Trapeze.	148
3.7.3	Parallelogramme.	149

3.7.4	Rhomben	150
3.7.5	Rechtecke	150
3.7.6	Quadrate	151
3.7.7	Drachen	151
3.7.8	Sehnenvierecke	152
3.7.9	Tangentenvierecke	153
3.8	Reguläre n -Ecke	154
3.9	Polygone	156
3.10	Kreise	157
3.10.1	Definitionen	157
3.10.2	Kreissectoren	159
3.10.3	Kreissegmente	160
3.10.4	Kreise und Geraden	161
3.10.5	Winkelsätze am Kreis	161
3.10.6	Eigenschaften von Sekanten und Sehnen	162
3.10.7	Tangentenkonstruktionen	163
3.10.8	Sätze über Sehnen, Sekanten, Tangenten	165
3.10.9	Bogenmaß	166
3.11	Symmetrie	168
3.11.1	Punktsymmetrie	168
3.11.2	Achsensymmetrie	168
3.12	Ähnlichkeit	168
3.12.1	Zentrische Streckung	168
3.12.2	Strahlensätze	169
3.12.3	Ähnliche Figuren	170
3.12.4	Streckenteilungen	172
4	Stereometrie	177
4.1	Prismen	177
4.1.1	Allgemeine Prismen	177
4.1.2	Parallelepiped und Würfel	178
4.2	Zylinder	180
4.2.1	Allgemeine Zylinder	180
4.2.2	Gerade Kreiszyylinder	181
4.2.3	Hohlzylinder	182
4.3	Pyramiden	182
4.3.1	Allgemeine Pyramiden	182
4.3.2	Gerade quadratische Pyramiden	184
4.4	Kegel	185
4.4.1	Allgemeine Kegel	185
4.4.2	Gerade Kreiskegel	186
4.5	Cavalierisches Prinzip	187

4.6	Pyramidenstümpfe und Kegelstümpfe	187
4.6.1	Pyramidenstümpfe	187
4.6.2	Kegelstümpfe	188
4.7	Platonische Körper	190
4.8	Kugeln	192
4.8.1	Definitionen.	192
4.8.2	Kugelsegmente	193
4.8.3	Kugelsektoren	194
4.8.4	Kugelschichten	195
5	Funktionen.	197
5.1	Definition und Darstellungen von Funktionen.	197
5.1.1	Definitionen.	197
5.1.2	Funktionsgleichung	198
5.1.3	Graph einer Funktion.	200
5.1.4	Wertetabelle einer Funktion	201
5.2	Verhalten von Funktionen	201
5.2.1	Monotone Funktionen.	201
5.2.2	Symmetrische Funktionen.	203
5.2.3	Beschränkte Funktionen	204
5.2.4	Injektive Funktionen	205
5.2.5	Surjektive Funktionen	206
5.2.6	Bijektive Funktionen	206
5.2.7	Periodische Funktionen.	207
5.2.8	Umkehrfunktionen.	207
5.2.9	Reelle und komplexe Funktionen.	209
5.3	Einteilung der elementaren Funktionen.	210
5.4	Ganze rationale Funktionen.	214
5.4.1	Konstante Funktionen	214
5.4.2	Lineare Funktionen	215
5.4.3	Quadratische Funktionen	218
5.4.4	Kubische Funktionen	227
5.4.5	Ganze rationale Funktionen n -ten Grades	228
5.4.6	Horner-Schema.	231
5.5	Gebrochene rationale Funktionen.	232
5.5.1	Nullstellen, Pole, Asymptoten.	232
5.5.2	Partialbruchzerlegung	240
5.6	Irrationale Funktionen	243
5.7	Transzendente Funktionen.	246
5.7.1	Exponentialfunktionen	246
5.7.2	Logarithmusfunktionen.	248

6	Trigonometrie	251
6.1	Definition der trigonometrischen Funktionen	251
6.2	Trigonometrische Funktionen für beliebige Winkel	254
6.3	Beziehungen für den gleichen Winkel	256
6.4	Graphen der trigonometrischen Funktionen.	257
6.5	Reduktionsformeln	260
6.6	Additionstheoreme	261
6.7	Sinussatz und Kosinussatz	264
6.8	Grundaufgaben der Dreiecksberechnung	265
6.9	Arkusfunktionen	269
7	Analytische Geometrie	275
7.1	Koordinatensysteme	275
7.1.1	Kartesisches Koordinatensystem der Ebene.	276
7.1.2	Polarkoordinatensystem der Ebene	277
7.1.3	Zusammenhang zwischen kartesischen und Polarkoordinaten	277
7.1.4	Kartesisches Koordinatensystem des Raums	280
7.1.5	Kugelkoordinatensystem des Raums.	280
7.1.6	Zylinderkoordinatensystem des Raums	282
7.2	Geraden	283
7.2.1	Geradengleichungen.	283
7.2.2	Abstände.	289
7.3	Kreise	291
7.3.1	Kreisgleichungen.	291
7.3.2	Berechnung von Kreisen	294
7.3.3	Kreis und Gerade	295
7.4	Kugeln	300
7.5	Kegelschnitte.	301
7.5.1	Ellipsen.	304
7.5.2	Hyperbeln.	308
7.5.3	Parabeln	314
7.5.4	Anwendungen.	319
7.6	Graphisches Lösen von Gleichungen	324
7.7	Vektoren	329
7.7.1	Definitionen.	329
7.7.2	Multiplikation eines Vektors mit einem Skalar	330
7.7.3	Addition und Subtraktion zweier Vektoren	330
7.7.4	Komponentendarstellung von Vektoren in der Ebene	332
7.7.5	Komponentendarstellung von Vektoren im Raum	333
7.7.6	Skalarprodukt	334
7.7.7	Vektorprodukt.	336
7.7.8	Spatprodukt.	337

8	Differential- und Integralrechnung	341
8.1	Folgen	341
8.1.1	Grundbegriffe	341
8.1.2	Arithmetische Folgen	343
8.1.3	Geometrische Folgen	343
8.1.4	Grenzwert einer Folge	344
8.1.5	Tabelle einiger Grenzwerte	345
8.1.6	Divergente Folgen	346
8.2	Reihen	347
8.2.1	Definitionen	347
8.2.2	Arithmetische Reihen	350
8.2.3	Geometrische Reihen	351
8.2.4	Harmonische Reihen	352
8.2.5	Alternierende Reihen	353
8.3	Grenzwerte von Funktionen	354
8.3.1	Grenzwert an einer endlichen Stelle	354
8.3.2	Einseitige Grenzwerte	356
8.3.3	Grenzwert im Unendlichen	356
8.3.4	Rechenregeln für Grenzwerte	357
8.3.5	Unbestimmte Ausdrücke	358
8.3.6	Stetigkeit einer Funktion	359
8.3.7	Unstetigkeitsstellen	360
8.4	Ableitung einer Funktion	362
8.4.1	Definitionen	362
8.4.2	Differentiationsregeln	364
8.4.3	Höhere Ableitungen	368
8.4.4	Ableitungen einiger algebraischer Funktionen	369
8.4.5	Ableitungen einiger transzendenter Funktionen	370
8.4.6	Sekanten und Tangenten	373
8.4.7	Extremwerte von Funktionen	374
8.4.8	Krümmungsverhalten von Funktionen	376
8.4.9	Wendepunkte von Funktionen	378
8.4.10	Kurvendiskussion	379
8.4.11	Anwendungsbeispiele	381
8.4.12	Näherungsverfahren zur Nullstellenbestimmung	382
8.5	Integralrechnung	385
8.5.1	Unbestimmtes Integral	385
8.5.2	Integrationsregeln	387
8.5.3	Unbestimmte Integrale einiger algebraischer Funktionen	392
8.5.4	Unbestimmte Integrale einiger transzendenter Funktionen	393
8.5.5	Bestimmtes Integral	394
8.5.6	Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung	396

8.5.7	Eigenschaften des bestimmten Integrals.	397
8.5.8	Einige Anwendungen der Integralrechnung	399
8.6	Funktionenreihen	404
8.6.1	Definitionen	404
8.6.2	Potenzreihen	406
8.6.3	Fourier-Reihen	410
9	Kombinatorik	419
9.1	Kombinatorische Grundprinzipien	419
9.2	Fakultäten, Binomialkoeffizienten und Pascalsches Dreieck	421
9.3	Binomischer Lehrsatz	424
9.4	Permutationen und Variationen	425
9.5	Kombinationen	427
9.6	Permutationen mit eingeschränkter Wiederholung	431
9.7	Multinomialsatz	432
9.8	Prinzip der Inklusion und Exklusion	433
10	Wahrscheinlichkeitsrechnung	437
10.1	Zufällige Ereignisse	437
10.2	Absolute und relative Häufigkeit von Ereignissen	440
10.3	Stichproben	441
10.4	Axiomatische Definition der Wahrscheinlichkeit	448
10.5	Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit	450
10.6	Bedingte Wahrscheinlichkeiten	457
10.7	Zufallsvariablen	461
	Symbole und Bezeichnungsweisen	465
	Mathematische Konstanten	469
	Das griechische Alphabet	471
	Literaturverzeichnis	473
	Sachverzeichnis	475