

INTEGRALTAFELN

SAMMLUNG UNBESTIMMTER INTEGRALE
ELEMENTARER FUNKTIONEN

VON

DR.-ING. W. MEYER ZUR CAPELLEN

AACHEN



SPRINGER-VERLAG
BERLIN/GÖTTINGEN/HEIDELBERG

1950

ISBN-13: 978-3-642-94568-7
DOI: 10.1007/978-3-642-94567-0

e-ISBN-13: 978-3-642-94567-0

ALLE RECHTE, INSBESONDERE DAS DER ÜBERSETZUNG IN FREMDE SPRACHEN,
VORBEHALTEN.

COPYRIGHT 1950 BY SPRINGER-VERLAG OHG. IN BERLIN / GÖTTINGEN / HEIDELBERG
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1950

SATZ UND DRUCK:
DIETERICHSCHE UNIVERSITÄTS-BUCHDRUCKEREI W. FR. KAESTNER, GÖTTINGEN

Berichtigungen.

- S. 18. Nr. 1. 2. 0. 1. Hinter „oder“ heißt es $\frac{1}{2a} \dots$
- S. 18. Nr. 2. 1. 0. Im Integranden (3. Spalte) heißt es $z^n(z - a^2)^m$.
- S. 21. Nr. 3. 1. 1. 2. 2. Im letzten Ausdruck der zweiten Klammer fehlt in ln der Buchstabe l.
- S. 21. Nr. 4. 1. 1. 1. Im Nenner von $f(x)$ heißt es x^2 .
- S. 39. Überschrift zum Schluß: $g^3 \pm x^3$.
- S. 47. Nr. 2. 4. 1. Beim letzten Logarithmus ist der Absolutbetrag einzusetzen.
- S. 49. Nr. 5. 3. 2. Im Nenner von $f(x)$ ist der erste Buchstabe a , nicht x .
- S. 53. Nr. 2. 2. 0. Der Nenner von $f(x)$ lautet: $(y^2 - x^2)z(x)$.
- S. 54. Nr. 2. 0., Spalte für $J(x)$: Der Exponent heißt $(m - 1)/m$.
- S. 56. Nr. 1. 2. 3. 1. Korrektur s. Nachtrag. S. 281.
- S. 62. Nr. 2. 3. 0. Es kommt $d v$ auf den Bruchstrich.
- S. 63. Überschrift: $1/\sqrt{x}$ und $1/(a + b\sqrt{x})^p$.
- S. 63. Nr. 2. 3. 1. 2. 1. 3. 1. Zum Schluß: $z = a^2 + x$.
- S. 63. Nr. 2. 3. 1. 2. 1. 3. 2. „ „ : $z = a^2 - x$.
- S. 64. Nr. 2. 3. 2. 1. 0. Im Nenner von $f(x)$ muß es $\sqrt[3]{x}$ heißen.
- S. 65. Überschrift: $\dots 1/\sqrt{x} \dots$
- S. 79. Nr. 4. 1. Hinter „... Funktionen;“ kommt: $\Delta = \dots$.
- S. 79. Nr. 4. 2. Hinter „... $t dt$;“ kommt: Δ s. 4. 1.
- S. 80. Nr. 5. Statt β heißt es b .
- S. 85. Nr. 1. 0. Das Wort „für“ ist zu streichen und durch ein Semikolon (Strichpunkt) zu ersetzen.
- S. 98. Nr. 0. 2. Beim letzten Bruch muß w^{n+1} auf den Bruchstrich kommen.
- S. 101. In der letzten Zeile heißt es im Nenner $\sqrt{-C}$.
- S. 108. Nr. 24. 2. Im Nenner der 4. Spalte heißt es $a^2 + b^2$.
- S. 110. Nr. 51. 2. Letzte Spalte: $a^2 < b^2$.
- S. 115. Nr. 0. 1. 5. 1. 1. Der Radikand des Nenners heißt $(b^2 - x^2)(a + x)$.
- S. 151. Nr. 1. 5. Unten rechts ist zu ergänzen: „S s. umstehend.“
- S. 157. Nr. 3. 6. 6. 3. In der 2. Zeile heißt es „ J_2 s. 3. 6. 6. 1.“ und nicht J_s .
- S. 169. In Nr. 3. 0. 3. heißt es $n \neq -1$.
- S. 186. Nr. 1. 2. 4. 3. 2. und 1. 2. 4. 4. 2. Nach der eckigen Klammer ist die Konstante C einzufügen.
- S. 197. In der Überschrift der Tabelle heißt es $\int f(x) dx$.
- S. 222. Die Überschriften des Absatzes heißen 3. 3. 2. bzw. 3. 3. 2. 1.
- S. 263. Die vierte Nummer von unten heißt 2. 1. 1. 0.

Vorwort.

Als der Springer-Verlag im Mai 1942 an mich mit der Bitte herantrat, eine Integraltafel zusammenzustellen, zögerte ich, gerade mit den Methoden zur instrumentellen Integration beschäftigt, ein wenig, hielt aber schließlich — auch in Hinblick auf diese — eine ausführliche Zusammenstellung der wichtigsten Integrale für nützlich und notwendig. Die Arbeit konnte im Juli 1944 abgeliefert werden — doch bedingten die Zeitverhältnisse eine Verzögerung der Drucklegung, so daß die Tafeln erst jetzt herausgebracht werden konnten.

Um den Umfang nicht zu sehr anschwellen zu lassen, wurde auf bestimmte Integrale verzichtet und wurden nur Integrale elementarer Funktionen gebracht, jedoch auch die Integrale, die auf nicht-elementare, oft als „höhere“ Funktionen bezeichnete führen, die aber vertafelt vorliegen (elliptische Integrale, Integralsinus usw.), oder durch einfache Reihen darzustellen sind. Für die Integrale der höheren Funktionen selbst wird man die entsprechenden Arbeiten heranziehen.

Für die Auswahl der gebrachten Integrale — es dürften rund 3000 sein — war maßgebend, daß der Benutzer einerseits fertige Integrale, andererseits auch Rekursions- oder Hilfsformeln findet, mit denen er weiterarbeiten kann. Solche Formeln wurden aber trotzdem für einzelne Sonderfälle ausgewertet, damit der Benutzer die Anwendung kennen lernt. Denn man muß sich darüber klar sein, daß dieser nicht immer mathematisch geübt ist und daher den Weg im Einzelfall sehen will. So wurden auch bei den Integralen irrationaler Funktionen, die auf elliptische Integrale führen, eine Reihe von Substitutionen gegeben, damit für den Fall, daß das gesuchte Integral selbst nicht angeführt ist, ein Weg zur Lösung gefunden werden kann.

Einteilung und Aufbau erfolgten ausschließlich aus dem Gesichtspunkt des praktischen Gebrauches; d. h. der Benutzer, auch wenn er mathematisch nicht sehr geschult ist, soll möglichst schnell das gesuchte Integral finden. Daher wurde, wie die Überschriften und das Inhaltsverzeichnis zeigen, sehr weitgehend unterteilt und zwar so, daß die Überschrift einen Hinweis auf den Ort des Integrals gibt. Gewisse Überschneidungen ließen sich dabei nicht vermeiden.

Der erste Abschnitt befaßt sich mit den wichtigsten Regeln zur Integration und gibt Hinweise zum Gebrauch der Tafel'— wobei ergänzend darauf hingewiesen sei, daß oft durch einfache Umformung des Integranden ein angeführtes Integral erhalten wird. Die weiteren

Abschnitte enthalten die Integrale selbst (1. Spalte die Nummer, 2. Spalte den Integranden, 3. Spalte das Integral). Im letzten Abschnitt sind wichtige Formeln und Konstanten zusammengestellt, außerdem gewisse in den Tafeln benutzte Beziehungen und Definitionen der auftretenden höheren Funktionen angeführt. Im Hauptteil ist durch einen Stern hierauf hingewiesen. Das kurze Schriftumsverzeichnis enthält die wichtigste benutzte und die im Hauptteil angezogene Literatur.

Zum Differenzieren kann die Tafel ebenfalls benutzt werden: Man braucht nur die Formeln von rechts nach links zu lesen. Außerdem sind die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen im Anhang angegeben.

Der Benutzerkreis wird sich aus Naturwissenschaftlern, Ingenieuren (der Hoch- und Fachschulen) und den Mathematikern der angewandten Richtung zusammensetzen, dem reinen Mathematiker wird das Buch ebenfalls nützlich sein, vor allem dürfte es aber auch dem Lehrenden als Beispielsammlung und dem Lernenden als Aufgabenbuch mit Lösungen dienen können.

Bei den Korrekturen usw. unterstützten mich mein Bruder, Oberstudienrat FRITZ MEYER ZUR CAPELLEN, Bielefeld, und Herr Ing. CARL STRASSER, Aachen, der auch die letzte Korrektur mitlas. Ihnen beiden sei an dieser Stelle herzlichst gedankt, ebenso Herrn Prof. Dr. Dr.-Ing. R. GRAMMEL, Stuttgart und Herrn Prof. Dr. A. WALTHER, Darmstadt für einige wertvolle Ratschläge, der Druckerei für die nicht einfache Satzarbeit und dem Verlag für die gute Ausstattung und das jederzeit gezeigte Entgegenkommen.

Mögen die Tafeln den Zweck erfüllen, vielen eine praktische Hilfe zu sein.

Aachen, im Januar 1950

Der Verfasser.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
1. Vorbemerkungen	1
1.1. Regeln zum Integrieren	1
1.2. Regeln zum Differenzieren	4
1.3. Weitere Hilfsmittel zur Integration	5
1.4. Zum Gebrauch der Tafel	5
2. Integrale algebraischer Funktionen	6
2.1. Integrale rationaler Funktionen	6
2.1.1. Grundformeln	6
2.1.2. Der Integrand enthält nur lineare Funktionen oder ihre Potenzen	6
2.1.2.1. $(a + bx)^n$ und x^m	6
2.1.2.2. $z = a + bx$ und $w = g + hx$	12
2.1.2.3. $a + x, b + x, c + x, d + x$	14
2.1.3. Der Integrand enthält $a \pm bx^2$	18
2.1.3.1. $a \pm bx^2$ und x^m	18
2.1.3.2. $a^2 \pm x^2$ und $g + x$	23
2.1.3.3. $a^2 \pm x^2$ und $g^2 \pm x^2$	28
2.1.4. Der Integrand enthält $a^3 \pm x^3$	31
2.1.4.1. $a^3 \pm x^3$ und x^m	31
2.1.4.2. $a^3 \pm x^3$ und $g \pm x$	35
2.1.4.3. $a^3 \pm x^3$ und $g^2 \pm x^2$	37
2.1.4.4. $a^3 \pm x^3$ und $g^3 \pm x^3$	38
2.1.5. Der Integrand enthält $a^4 \pm x^4$	40
2.1.5.1. $a^4 \pm x^4$ und x^m	40
2.1.5.2. $a^4 \pm x^4$ und $g \pm x$	43
2.1.5.3. $a^4 \pm x^4$ und $g^2 \pm x^2$	44
2.1.5.4. $a^4 \pm x^4$ und $g^3 \pm x^3$	45
2.1.5.5. $a^4 \pm x^4$ und $g^4 \pm x^4$	47
2.1.6. Der Integrand enthält $z = a^p \pm x^p$ (vgl. a. Nachträge)	48
2.1.7. Der Integrand enthält $z = \alpha + 2\beta x + \gamma x^2$	50
2.1.7.1. $z = \alpha + 2\beta x + \gamma x^2$ und x^m	50
2.1.7.2. $z = \alpha + 2\beta x + \gamma x^2$ und $v = g + x$ oder $w = g^2 \pm x^2$	52
2.2. Integrale irrationaler Funktionen	54
2.2.1. Der Integrand enthält $x^{n/m}$	54
2.2.1.1. Grundformeln	54
2.2.1.2. $F(x^{n/m})$ und xg/p	54
\sqrt{x} und $1/(a + b\sqrt{x})^p$	57
$\sqrt[3]{x}$ und $1/(a + b\sqrt[3]{x})^p$	59
$1/\sqrt{x}$ und $1/(a + b\sqrt{x})^p$	63
$1/\sqrt[3]{x}$ und $1/(a + b\sqrt[3]{x})^p$	65

	Seite
2. 2. 2. Der Integrand enthält $(a + b x)^{p/m}$	68
2. 2. 2. 1. Grundformeln	68
2. 2. 2. 2. $z^{n/m} = (a + b x)^{p/m}$ und x^p	68
$p > 0$	69
$p < 0$	71
2. 2. 2. 3. $\left(\frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x}\right)^{n/m}$ (vgl. a. Nachträge)	76
2. 2. 2. 4. Verschiedenes	79
2. 2. 3. Der Integrand enthält $z = \sqrt{a^2 - x^2}$	80
2. 2. 3. 1. $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ allein	80
2. 2. 3. 2. $z = \sqrt{a^2 - x^2}$ und x^q	81
2. 2. 3. 3. Verschiedenes [$R(z) = R(\sqrt{a^2 - x^2})$]	85
2. 2. 4. Der Integrand enthält $z = \sqrt{a^2 + x^2}$	86
2. 2. 4. 1. $z = \sqrt{a^2 + x^2}$ allein	86
2. 2. 4. 2. $z = \sqrt{a^2 + x^2}$ und x^q	87
2. 2. 4. 3. Verschiedenes [$R(z) = R(\sqrt{a^2 + x^2})$]	91
2. 2. 5. Der Integrand enthält $z = \sqrt{x^2 - a^2}$	91
2. 2. 5. 1. $z = \sqrt{x^2 - a^2}$ allein	91
2. 2. 5. 2. $z = \sqrt{x^2 - a^2}$ und x^p	92
2. 2. 5. 3. Verschiedenes [$R(z) = R(\sqrt{x^2 - a^2})$]	96
2. 2. 6. Der Integrand enthält $z = \sqrt{a x^2 + 2 b x + c}$	97
2. 2. 6. 1. $z = \sqrt{a x^2 + 2 b x + c}$ allein	97
2. 2. 6. 2. $z = \sqrt{a x^2 + 2 b x + c}$ und x^q	98
„ und $(x + f)^q$	101
2. 2. 7. Verschiedenes	102
2. 3. Integrale algebraischer Funktionen, die auf elliptische Integrale führen	103
2. 3. 1. Vorbemerkungen	103
2. 3. 1. 1. Allgemeines	103
2. 3. 1. 2. Benutzte Abkürzungen	106
2. 3. 1. 3. Substitutionen für die Integrale unter 2. 3. 2.	107
2. 3. 2. Zusammenstellung der Integrale $\int \frac{\sqrt{R_q(x)}}{\sqrt{R_n(x)}} dx$, worin R_q, R_n rationale Funktionen q -ter, bzw. n -ter Ordnung von x sind	111
2. 3. 2. 2. $n = 2$	111
2. 3. 2. 3. $n = 3$	114
2. 3. 2. 4. $n = 4$	118
2. 3. 2. 5. $n = 5$	125
2. 3. 2. 6. $n = 6$	126
2. 3. 2. 8. $n = 8$	131
2. 3. 2. 10. $n = 10$	141
2. 3. 2. 12. $n = 12$	143

	Seite
3. Integrale transzendenter Funktionen	144
3.1. Exponentialfunktion und Logarithmus	144
3.1.1. Exponentialfunktion	144
3.1.1.1. Grundformeln	144
3.1.1.2. Der Integrand enthält eine rationale Funktion von e^x	144
3.1.1.3. Der Integrand enthält eine irrationale Funktion von e^x	147
3.1.1.4. Verschiedenes	148
3.1.2. Der Integrand enthält eine logarithmische Funktion	149
3.1.2.1. $\int g(\ln x) dx$	149
3.1.2.2. $\int \ln [g(x)] dx$	150
3.2. Integrale trigonometrischer und zyklometrischer Funktionen	151
3.2.1. Trigonometrische Funktionen	151
3.2.1.1. Der Integrand enthält $\sin x$	151
3.2.1.2. " " " $\cos x$	158
3.2.1.3. " " " $\sin x$ und $\cos x$	167
3.2.1.4. " " " $\operatorname{tg} x$	180
3.2.1.5. " " " $\operatorname{ctg} x$	182
3.2.1.6. Integrale trigonometrischer Funktionen, die auf elliptische Integrale führen; der Integrand enthält $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — für sich oder zusammen	183
3.2.2. Zyklometrische Funktionen	189
3.2.2.1. Der Integrand enthält $\operatorname{arc} \sin x$	189
3.2.2.2. " " " $\operatorname{arc} \cos x$	190
3.2.2.3. " " " $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ u. $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	192
3.3. Hyperbel- und Area-Funktionen	192
3.3.1. Hyperbelfunktionen	192
3.3.1.1. Der Integrand enthält $\operatorname{Sh} x$	192
3.3.1.2. " " " $\operatorname{Co}j x$	199
3.3.1.3. " " " $\operatorname{Sh} x$ und $\operatorname{Co}j x$	207
3.3.1.4. " " " $\operatorname{Tg} x$	221
3.3.1.5. " " " $\operatorname{Ctg} x$	221
3.3.2. Area-Funktionen	222
3.3.2.1. Der Integrand enthält $\operatorname{Ar} \operatorname{Sh} x$	222
3.3.2.2. " " " $\operatorname{Ar} \operatorname{Co}j x$	223
3.3.2.3. " " " $\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x$ u. $\operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x$	223
4. Produkte algebraischer und transzendenter Funktionen (geordnet nach den letzteren)	224
4.1. Exponentialfunktion und Logarithmus	224
4.1.1. Exponentialfunktion	224
4.1.1.1. Der Integrand enthält e^{kx}	224
4.1.1.2. " " " e^{kx^2}	227
4.1.2. Die logarithmische Funktion	228
4.1.2.1. Der Integrand enthält $\ln x$	228
4.1.2.2. " " " $\ln (a + bx)$	233

	Seite
4. 1. 2. 3. Der Integrand enthält $\ln g(x)$, wobei $g(x)$ eine nichtlineare Funktion von x ist . . .	235
4. 2. Trigonometrische und zyklometrische Funktionen	237
4. 2. 1. Trigonometrische Funktionen	237
4. 2. 1. 1. Der Integrand enthält $\sin x$	237
4. 2. 1. 2. " " " $\cos x$	242
4. 2. 1. 3. " " " $\sin x$ und $\cos x$	246
4. 2. 1. 4. " " " $\operatorname{tg} x$ oder $\operatorname{ctg} x$	248
4. 2. 2. Zyklometrische Funktionen	248
4. 2. 2. 1. Der Integrand enthält $\operatorname{arc} \sin x$	248
4. 2. 2. 2. " " " $\operatorname{arc} \cos x$	250
4. 2. 2. 3. " " " $\operatorname{arc} \operatorname{tg} x$ od. $\operatorname{arc} \operatorname{ctg} x$	251
4. 3. Hyperbel- und Area-Funktionen	253
4. 3. 1. Hyperbelfunktionen	253
4. 3. 1. 1. Der Integrand enthält $\operatorname{Sin} x$	253
4. 3. 1. 2. " " " $\operatorname{Cos} x$	258
4. 3. 1. 3. " " " $\operatorname{Sin} x$ und $\operatorname{Cos} x$	263
4. 3. 1. 4. " " " $\operatorname{Tg} x$ und $\operatorname{Ctg} x$	264
4. 3. 2. Area-Funktionen	264
4. 3. 2. 1. Der Integrand enthält $\operatorname{Ar} \operatorname{Sin} x$	264
4. 3. 2. 2. " " " $\operatorname{Ar} \operatorname{Cos} x$	266
4. 3. 2. 3. " " " $\operatorname{Ar} \operatorname{Tg} x$ u. $\operatorname{Ar} \operatorname{Ctg} x$	267
5. Produkte transzendenter Funktionen untereinander	269
5. 1. Integrale von der Form $\int g(x) \ln x dx$	269
5. 1. 1. Exponentialfunktion und Logarithmus	269
5. 1. 2. Trigonometrische Funktionen und Logarithmus	270
5. 1. 3. Hyperbelfunktion und Logarithmus	272
5. 2. Integrale von der Form $\int e^x g(x) dx$	274
5. 2. 1. Trigonometrische Funktionen und Exponential- funktion	274
5. 2. 2. Hyperbelfunktionen und Exponentialfunktion	275
5. 2. 2. 1. Der Integrand enthält $\operatorname{Sin} x$	275
5. 2. 2. 2. " " " $\operatorname{Cos} x$	277
5. 3. 0. Trigonometrische und hyperbolische Funktionen	279
Nachträge	280
6. Zusammenstellung einiger wichtiger Konstanten, Reihen und Funk- tionen	283
6. 1. Konstanten	283
6. 2. Potenzreihen	284
6. 3. Weiter benutzte Entwicklungen	288
6. 4. Nichtelementare Funktionen	289
6. 5. Die Ableitungen der wichtigsten elementaren Funktionen	291
7. Schrifttum	291