



T. Bonnesen / W. Fenchel

Theorie der konvexen Körper

Berichtigter Reprint

Springer-Verlag

Berlin Heidelberg New York 1974

AMS Subject classifications (1970) 52-02

ISBN-13: 978-3-540-06234-9 e-ISBN-13: 978-3-642-93014-0
DOI: 10.1007/978-3-642-93014-0

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf fotomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwendung, vorbehalten.
Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© Copyright 1934 by Julius Springer in Berlin
Library of Congress Catalog Card Number 73-10722

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLICHTUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK“
DRITTER BAND

1

THEORIE DER
KONVEXEN KÖRPER

VON

T. BONNESEN UND W. FENCHEL

MIT 8 FIGUREN



BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1934

Vorwort.

Konvexe Figuren haben von jeher in der Geometrie eine bedeutende Rolle gespielt. Die durch ihre Konvexitätseigenschaft allein charakterisierten Gebilde hat aber erst BRUNN zum Gegenstand umfassender geometrischer Untersuchungen gemacht. In zwei Arbeiten „Ovale und Eiflächen“ und „Kurven ohne Wendepunkte“ aus den Jahren 1887 und 1889 (vgl. Literaturverzeichnis BRUNN [1], [2]) hat er neben zahlreichen Sätzen der verschiedensten Art über konvexe Bereiche und Körper einen Satz über die Flächeninhalte von parallelen ebenen Schnitten eines konvexen Körpers bewiesen, der sich in der Folge als fundamental herausgestellt hat. Die Bedeutung dieses Satzes hervorgehoben zu haben, ist das Verdienst von MINKOWSKI. In mehreren Arbeiten, insbesondere in „Volumen und Oberfläche“ (1903) und in der großzügig angelegten, unvollendet gebliebenen Arbeit „Zur Theorie der konvexen Körper“ (Literaturverzeichnis [3], [4]) hat er durch Einführung von grundlegenden Begriffen wie Stützfunktion, gemischtes Volumen usw. die dem Problemkreis angemessenen formalen Hilfsmittel geschaffen und vor allem den Weg zu vielseitigen Anwendungen, speziell auf das isoperimetrische (isoperimétrique) und andere Extremalprobleme für konvexe Bereiche und Körper eröffnet. Weiterhin hat MINKOWSKI den engen Zusammenhang dieser Begriffsbildungen und Sätze mit der Frage nach der Bestimmung konvexer Flächen durch ihre GAUSSsche Krümmung aufgedeckt und tiefliegende diesbezügliche Sätze bewiesen.

Diese BRUNN-MINKOWSKISCHE Theorie, ihre Verallgemeinerung auf Räume beliebiger Dimension und ihre Fortschritte bis in die Gegenwart bilden den Hauptgegenstand des folgenden Berichts und sind — wenn auch teilweise in knapper Form — mit ausgeführten Beweisen im Zusammenhang dargestellt, so daß Vorkenntnisse aus der Theorie selbst nicht erforderlich sind. Jeweils anschließend an diese Ausführungen werden Literaturberichte und Verweise (der Übersichtlichkeit halber in Kleindruck) gebracht, wobei Vollständigkeit angestrebt worden ist, wenigstens soweit es sich um die auf die Arbeiten von BRUNN und MINKOWSKI folgende Literatur handelt.

Um alle vorliegenden Resultate zwanglos einordnen zu können, ist die Theorie sofort für den n -dimensionalen Raum entwickelt worden. Es konnte dies ohne Bedenken geschehen, da bereits zwei einführende Bücher über den Gegenstand vorliegen, nämlich: BLASCHKE: Kreis und Kugel (Literaturverzeichnis [11]), und BONNESEN: Les problèmes des

isopérimètres et des isépiphanes (Literaturverzeichnis [12]), die beide den zwei- und dreidimensionalen Fall behandeln. Eine einheitliche Entwicklung der Grundlagen der n -dimensionalen Theorie, die bisher in der Literatur nicht durchgeführt worden ist, scheint auch durch den Umstand gerechtfertigt, daß mehrere wichtige und naheliegende Fragen, auf die auch im folgenden hingewiesen wird, noch ungeklärt sind. Wir hoffen, die Fortführung der Untersuchungen auf diesem Gebiet durch unsere Darstellung zu erleichtern.

Bezüglich des behandelten Stoffes sei auf das Inhaltsverzeichnis verwiesen. Hier mögen nur einige Bemerkungen Platz finden. Die Darstellung beschränkt sich auf abgeschlossene Mengen, was z. B. bei der punktmengentheoretischen Seite der Sache und den Sätzen über Schwerpunkte und konvexe Hülle (§ 1 und § 2) unnötig gewesen wäre. Verallgemeinerungen in dieser Richtung hat STEINITZ in der Arbeit „Bedingt konvergente Reihen und konvexe Systeme“ (Literaturverzeichnis [1]) vorgenommen. Auf die Untersuchungen über Krümmungseigenschaften konvexer Kurven und Flächen und Verbiegbarkeitsfragen sind wir nur wenig, auf andere Fragen der Differentialgeometrie wie Verlauf der geodätischen Linien auf konvexen Flächen gar nicht eingegangen. Dasselbe gilt von den vielfachen Beziehungen der konvexen Gebilde zur affinen Differentialgeometrie. In beiderlei Hinsicht sei — auch wegen der Literatur — auf BLASCHKES „Vorlesungen über Differentialgeometrie“ (Literaturverzeichnis [24], [25]) hingewiesen. Untersuchungen über konvexe Funktionen sind nur so weit behandelt, als sie für die geometrischen Anwendungen von Bedeutung sind.

Die von der üblichen nur unwesentlich abweichende Terminologie für den n -dimensionalen Raum, die im Bericht verwendet wird, ist kurz in den Vorbemerkungen angegeben. Fett gedruckte Ziffern ohne Klammern (zumeist mit Seitenzahlen dahinter) beziehen sich auf die Abschnitte dieses Berichts. Ziffern in eckigen Klammern hinter Autorennamen verweisen auf das Literaturverzeichnis. Bei Autoren, deren gesammelte Abhandlungen herausgegeben sind, beziehen sich Zitate stets auf diese und nicht auf Originalarbeiten.

Für Mitwirkung bei der Korrektur und Verbesserungsvorschläge sind wir den Herren H. BUSEMANN und H. KNESER, für bereitwilliges Eingehen auf unsere zahlreichen Wünsche der Verlagsbuchhandlung und für die Ermöglichung einer Zusammenarbeit in Kopenhagen dem Rask-Ørsted-Fonds, dem internationalen wissenschaftlichen Fond Dänemarks, zu größtem Dank verpflichtet.

Kopenhagen, im November 1933.

T. BONNESEN. W. FENCHEL.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite
Vorbemerkungen über n -dimensionale Geometrie	1
§ 1. Grundbegriffe	2
1. Konvexe Mengen, Körper und Kegel	2
2. Schranken und Stützebenen abgeschlossener Mengen	4
3. Konvexe Hülle einer abgeschlossenen Menge	5
4. Stützeigenschaften konvexer Körper.	6
§ 2. Schwerpunkte und konvexe Hülle	7
5. Massenbelegungen und ihre Schwerpunkte	7
6. Schwerpunktsdarstellungen der konvexen Hülle	8
7. Erzeugung der konvexen Hülle durch Ziehen von Sehnen	10
8. Schwerpunkte von ebenen Abschnitten und Schnitten eines Körpers	10
§ 3. Klassifikation der Randpunkte und Stützebenen eines konvexen Körpers	13
9. Singuläre Randpunkte und Stützebenen. Projektions- und Normalenkegel. Eck- und Kantenpunkte	13
10. Extreme Randpunkte und Stützebenen	15
11. Konvexe Polyeder	16
12. Kappen- und Tangentialkörper	17
§ 4. Darstellung konvexer Körper durch konvexe Funktionen	18
13. Konvexe Funktionen und ihre Richtungsderivierten	18
14. Die Distanzfunktion eines konvexen Körpers	21
15. Die Stützfunktion eines konvexen Körpers	23
16. Darstellung der Randpunkte eines konvexen Körpers durch Stützfunktionen	25
17. Bestimmung eines konvexen Körpers durch die Stützfunktion	26
18. Polare Körper	28
§ 5. Linearkombination konvexer Körper. Lineare und konkave Scharen	28
19. Linearkombination von Stützfunktionen	28
20. Linearkombination von konvexen Körpern.	29
21. Parallelkörper eines konvexen Körpers. Homothetische Körper	30
22. Verhalten der Projektionen und Randpunkte bei Linearkombination	31
23. Linearkombination ausgearteter konvexer Körper.	32
24. Lineare und konkave Scharen konvexer Körper	32
§ 6. Approximation konvexer Körper	34
25. Konvergente Folgen konvexer Körper. Der Auswahlssatz von BLASCHKE	34
26. Die Stützfunktionen konvergenter Körperfolgen. Der Funktionsraum der Stützfunktionen	35
27. Approximation durch konvexe Polyeder und analytisch begrenzte konvexe Körper	35
§ 7. Konvexen Körpern zugeordnete Zahlen und Figuren	37
28. Das Volumen eines konvexen Körpers	37
29. Das Volumen der Körper einer Linearschar. Gemischte Volumina	38
30. Quermaße. Projektionskörper	45
31. Die Oberfläche eines konvexen Körpers	46

	Seite
32. CAUCHYSche Oberflächenformel. Quermaßintegrale	48
33. Breite, Durchmesser, Dicke	51
34. Schwerpunkte und andere ausgezeichnete Punkte eines konvexen Körpers	52
35. Um- und Inkugel, Minimalkugelschale und andere einem konvexen Körper zugeordnete Figuren	54
§ 8. Integralformeln für das Volumen und die gemischten Volumina	55
36. Formeln in Punktkoordinaten	56
37. Darstellungen der gemischten Volumina durch die Stützfunktionen	58
38. Krümmungsfunktionen und -integrale. Relative Differentialgeometrie	61
39. Spezielle Formeln. Geometrische Wahrscheinlichkeiten bei konvexen Körpern	65
§ 9. Symmetrisierungen und verwandte Abänderungen konvexer Körper	69
40. STEINERSche und Kreisringssymmetrisierung	69
41. SCHWARZSche Abrundung. BLASCHKES Beweis des BRUNN-MINKOWSKISchen Satzes	71
42. Zentralsymmetrisierung und Verwandtes	73
§ 10. Ungleichungen, Extremum- und Deckelprobleme	74
43. Allgemeines über Extremumprobleme	74
44. Ungleichungen zwischen zwei Größen	75
45. Ungleichungen zwischen mehr als zwei Größen ebener Bereiche	80
46. Ungleichungen zwischen mehreren Größen konvexer Körper	83
47. Deckel	85
§ 11. Der BRUNN-MINKOWSKISche Satz und die MINKOWSKISchen Ungleichungen	87
48. Der BRUNN-MINKOWSKISche Satz	88
49. MINKOWSKISche Ungleichungen	91
50. Verschärfung des BRUNN-MINKOWSKISchen Satzes und der MINKOWSKISchen Ungleichungen	94
51. Weiteres über den Fall der Ebene	97
52. Weiteres über den Raum. HILBERTS Beweis der MINKOWSKISchen Ungleichungen	100
§ 12. Spezialfälle und Anwendungen des BRUNN-MINKOWSKISchen Satzes und der MINKOWSKISchen Ungleichungen	105
53. Das Volumen des Vektorkörpers	105
54. Abschätzungen der Quermaßintegrale durch Dicke und Durchmesser	106
55. Die Oberfläche der Körper einer Linearschar	107
56. Spezialfälle MINKOWSKIScher Ungleichungen	109
57. Das isoperimetrische Problem	111
§ 13. Bestimmung konvexer Körper durch Krümmungsfunktionen	114
58. Stetig gekrümmte konvexe Körper	114
59. Eindeutigkeitssätze	115
60. Existenzsätze	118
§ 14. Konvexe Körper mit Mittelpunkt	124
61. Kennzeichnende Eigenschaften	124
62. Konvexe Körper mit Mittelpunkt und Gitterpunkte	126
§ 15. Körper konstanter Breite	127
63. Kennzeichnende und andere Eigenschaften	127
64. Vollständige Mengen	128

	Seite
65. Orbiformen	130
66. Extremumprobleme für Orbiformen	132
67. Sphäroformen	135
68. Verwandte Klassen konvexer Körper	139
§ 16. Charakteristische Eigenschaften der Gebilde zweiten Grades	141
69. Kreis und Kugel	141
70. Ellipse und Ellipsoid	142
§ 17. Differentialgeometrie der konvexen Kurven und Flächen	143
71. Krümmungseigenschaften konvexer Kurven. Vierscheitelsatz und Verwandtes	143
72. Flächen positiver GAUSSscher Krümmung. Verbiegbarkeitsfragen.	145
Literaturverzeichnis	150
Berichtigungen (im Anschluß an Textteil)	I - 3