

# Elektrische Ausgleichsvorgänge und Operatorenrechnung

von

**John R. Carson**

American Telephone and Telegraph Company

Erweiterte deutsche Bearbeitung

von

**F. Ollendorff und K. Pohlhausen**

Mit 39 Abbildungen im Text  
und einer Tafel



**Berlin**  
Verlag von Julius Springer  
1929

**Alle Rechte vorbehalten.**

ISBN-13: 978-3-642-89251-6      e-ISBN-13: 978-3-642-91107-1  
DOI: 10.1007/978-3-642-91107-1  
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1929

## Vorwort des Verfassers.

Das vorliegende Buch entstand als Ausarbeitung von 15 Vorlesungen, welche der Verfasser im Frühjahr 1925 an der Moore-Schule für Elektrotechniker der Universität Pennsylvania gehalten hat.

Nach einer kurzen Einleitung über den Gegenstand der Theorie elektrischer Stromkreise geben die ersten fünf Kapitel eine systematische und vollständige Darlegung und Kritik der Heavisideschen Operatorenrechnung. Sie bildet eine direkte und weittragende Methode zur Lösung der Differentialgleichungen elektrischer Stromkreise.

Der Name Oliver Heaviside ist allen Ingenieuren geläufig; das von ihm stammende Rechenverfahren wird jedoch nur von wenigen angewandt, obwohl es recht bemerkenswerte Eigenschaften hat und sich nicht nur auf die elektrischen Schaltungen, sondern auch auf andere Aufgaben der mathematischen Physik anwenden läßt. Nach Ansicht des Verfassers kennen viele Kreise die Operatorenrechnung nur darum nicht, weil sie Heaviside in seinen eigenen Werken sehr undurchsichtig dargestellt hat. Im vorliegenden Buch wird daher die Operatorenrechnung deduktiv aus einer Integralgleichung hergeleitet. Auf diesem Wege ergeben sich dann durch eine einfache und gleichzeitig strenge Ableitung die Heavisideschen Rechenregeln und Formeln. Der Verfasser hofft, daß damit das Anwendungsgebiet der Operatorenrechnung erweitert wird, und daß Ingenieure und Physiker sie nunmehr wegen ihrer bemerkenswerten Einfachheit öfter als bisher benutzen werden.

Der zweite Abschnitt des Buches befaßt sich mit schwierigeren Aufgaben der Theorie elektrischer Stromkreise und handelt insbesondere von der Ausbreitung von Strom und Spannung längs elektrischer Übertragungsleitungen. Dieser Teil wird das besondere Interesse des Elektrotechnikers erwecken, da die Ergebnisse der Theorie zwar meist bekannt, aber in der Literatur sehr verstreut sind und oft nur mit sehr beträchtlichen mathematischen Hilfsmitteln bewältigt werden können. Wenn auch die im zweiten Teil angewandte Lösungsmethode im wesentlichen in den Regeln der Operatorenrechnung vorliegt, so hat der Verfasser darüber hinaus Methoden und Entwicklungen abgeleitet, die sich bei Heaviside nicht finden. So ist z. B. die Formulierung der Aufgabe als Voltterrasche Integralgleichung eine neue Darstellung, die

sich bei der numerischen Berechnung der Lösung schwieriger Aufgaben als sehr nützlich erweist. Dasselbe gilt von dem Kapitel über veränderliche elektrische Stromkreise.

Das Buch ist daher einmal eine dem Mathematiker vielleicht erwünschte Einführung in Entwicklung und Analyse der Operatorenrechnung mit besonderer Anwendung auf die Theorie elektrischer Stromkreise. Dem Ingenieur dagegen soll es Methoden für die mathematische Behandlung von schwierigeren Aufgaben dieser Theorie an die Hand geben.

Ich habe im Text nur an den Stellen Literaturangaben gemacht, wo die Ausführungen notgedrungen kurz sind, und wo ich den Leser auf eine ausführlichere und befriedigende Darstellung des behandelten Stoffes hinweisen wollte. Statt dessen ist dem Anhang ein Verzeichnis von Originalaufsätzen und Büchern gegeben, welches alle mir bekannten wichtigen Arbeiten enthält, ohne daß es jedoch Anspruch auf Vollständigkeit erhebt. Es ist durchaus möglich, daß einige wichtige Aufsätze vergessen worden sind; der Verfasser bittet deshalb die Leser, auf solche Arbeiten ihn verweisen zu wollen.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, für die große Hilfe zu danken, deren ich mich bei der Abfassung des Buches erfreuen konnte. Zunächst danke ich Herrn Dr. Harold Pender, Dekan der Moore-Schule für Elektroingenieure an der Universität Pennsylvania. Ich verdanke ihm die Einladung zur Abhaltung der Vorträge, aus denen das Buch entstanden ist, und sein dauerndes förderndes Interesse während der Kurse selbst. Meinem Kollegen Herrn R. S. Hoyt bin ich für eine sorgfältige Durchsicht und Überprüfung des Manuskriptes sowie der meisten angegebenen Formeln und anderer wichtiger Ratschläge zu Dank verpflichtet. So geht z. B. der außerordentlich kurze Beweis der Formel III (1) auf einen früher von Herrn Hoyt gegebenen Beweis zurück. Fräulein Dorothy Angell hat alle numerischen Rechnungen ausgeführt, die Abbildungen gezeichnet und eine sorgfältige Korrektur des ganzen Buches gelesen.

Endlich danke ich der Amerikanischen Telefon- und Telegraphengesellschaft, insbesondere Herrn O. B. Blackwell, für das große Interesse, welches sie für die Untersuchungen gezeigt haben, die den Stoff dieses Buches bilden, und für die Anregung, die damaligen Vorlesungen in Buchform zu veröffentlichen.

New York, Oktober 1926.

John R. Carson.

## Vorwort der Übersetzer.

Die Heavisidesche Operatorenrechnung ist in Deutschland bisher wenig beachtet worden. Denn, obwohl an ihrer Leistungsfähigkeit kein Zweifel bestand, hat man mit Recht daran Anstoß genommen, daß Heaviside seine Methode nicht mathematisch bewiesen hat; so erschien die Operatorenrechnung zunächst als eine unnachahmliche, genial-intuitive Erfassung an sich nicht deutbarer Symbole.

Dieses mangelnde Verständnis der Elektrotechniker für die Heavisidesche Denkweise hat seinen letzten Grund in einer ungenügenden Kenntnis der Funktionentheorie. Wer mit der von Fourier herrührenden komplexen Integraldarstellung willkürlicher Funktionen vertraut ist, wird sich mit wenigen Lehrsätzen der Funktionentheorie die Regeln der Heavisideschen Rechenweise herleiten und erkennt dann in der Operatorenrechnung nicht etwa einen neuen mathematischen Kalkül, sondern vielmehr eine Stenographie für die Auswertung bestimmter Integrale auf komplexem Wege.

Wenngleich diese funktionentheoretische Wurzel ohne Zweifel das tiefste Wesen der Operatorenrechnung trifft, ist die Funktionentheorie dem Techniker zu fremd, als daß er ihre Gedankengänge mit der notwendigen Sicherheit auf seine Fragen anwenden könnte. Es war deswegen ein glücklicher Gedanke Carsons, das Fouriersche Doppelintegral, welches die Lösung allgemein darstellt, durch seine gleichwertige Laplacesche Integralgleichung zu ersetzen. Denn hierdurch gelingt es, alle Regeln der Operatorenrechnung aus den Eigenschaften reeller bestimmter Integrale herzuleiten, die dem Techniker sicherlich keine begrifflichen Schwierigkeiten bereiten.

Indem Carson zeigen konnte, wie man mit seinen einfachen Überlegungen eine Fülle drängender technischer Fragen meistert, hat er dem forschenden und rechnenden Ingenieur eine neue Welt erschlossen, an deren Toren er bisher zögernd stehen blieb. Der deutsche Leser wird indes auf diesem Wege erst dann ungehindert vorangehen können, wenn er nicht mit Schwierigkeiten der Sprache und des Ausdruckes zu kämpfen hat.

Die vorliegende deutsche Ausgabe des Carsonschen Buches will daher mehr als eine möglichst form- und wortgetreue Wiedergabe des englischen Originalen sein; sie will vielmehr die englische Denkweise

in eine deutsche übersetzen. Deshalb wurde der Stoff scharf gegliedert, an vielen Stellen durch Beweise mathematischer Formeln ergänzt und im Zusammenhang hiermit methodisch wichtige Abschnitte, die dem Original als Anhang beigegeben waren, in den Text hineinverarbeitet.

Alle diese Änderungen haben natürlich den Kern der Carsonschen Arbeit nicht treffen dürfen, und so hoffen wir, daß man die frische und lebendige Darstellung Carsons auch in der deutschen Ausgabe wiederfinden wird. In diesem Sinne wünschen wir auch, daß das von den Übersetzern zugefügte Kapitel VIII dem Leser nicht als Fremdkörper erscheinen möge, sondern als eine willkommene Ergänzung der mittels der Operatorenrechnung zu behandelnden Aufgaben nach der Seite der Starkstromtechnik.

Das Carsonsche Buch will keine abschließende Darstellung des Gebietes der Operatorenrechnung sein; eine große Reihe von Fragen harret noch der strengen und kritischen Durchforschung. Wenn die deutsche Ausgabe dazu beiträgt, daß auch in Deutschland an dieser Aufgabe mitgearbeitet wird, hat sie ihrem Zweck erfüllt.

Berlin, im März 1929.

**Franz Ollendorff. Karl Pohlhausen.**

# Inhaltsverzeichnis.

	Seite
I. Die Grundgesetze der Ausgleichsvorgänge in elektrischen Stromkreisen . . . . .	1
1. Die Aufgabe der Operatorenrechnung . . . . .	1
2. Die Grundgleichungen . . . . .	1
3. Die Zwangsschwingungen . . . . .	6
4. Die Lösung für den eingeschwungenen Zustand . . . . .	8
5. Der allgemeine Schwingungszustand . . . . .	9
II. Störungen des elektrischen Gleichgewichtes durch willkürliche Kräfte . . . . .	11
6. Die Grenzbedingungen . . . . .	11
7. Einheitsstoß der Spannung, Übergangswert . . . . .	13
8. Beziehungen zwischen dem Schaltvorgang und dem eingeschwungenen Zustand . . . . .	16
9. Die Integralgleichung für den Übergangswert . . . . .	17
III. Die Heavisidesche Aufgabe und die Operatorenrechnung . . . . .	18
10. Die Stammfunktion . . . . .	18
11. Die Operatorenleichung . . . . .	20
12. Die Methode der Potenzreihen . . . . .	21
13. Einschalten eines Schwingungskreises . . . . .	23
14. Technik der Reihenentwicklung . . . . .	27
15. Kritik der Potenzreihenlösung . . . . .	28
16. Die Methode der Partialbruchzerlegung . . . . .	29
17. Anwendungen der Partialbruchzerlegung . . . . .	32
IV. Allgemeine Sätze und Formeln für die Lösung von Operatorenleichungen . . . . .	34
18. Umkehrung der ursprünglichen Aufgabe . . . . .	34
19. Berechnung einiger bestimmter Integrale . . . . .	34
20. Der Satz von Borel . . . . .	37
21. Der Additionssatz . . . . .	38
22. Multiplikation der Stammfunktion mit dem Operator . . . . .	38
23. Der Divisionssatz . . . . .	39
24. Der Multiplikationssatz . . . . .	40
25. Der Verschiebungssatz . . . . .	41
26. Der Ähnlichkeitssatz . . . . .	42
27. Der Verzögerungssatz . . . . .	43
28. Die Operatorenleichung für beliebigen Spannungsstoß . . . . .	44
29. Die Lösung mittels Hilfgleichung . . . . .	45
30. Stromaufnahme des induktionsfreien Kabels . . . . .	46
31. Die Klemmenspannung an einem Kabel beim Aufladen über Kondensatoren . . . . .	51
32. Stromaufnahme einer Leitung mit verteilter Induktivität $L$ , Kapazität $C$ und Widerstand $R$ . . . . .	54

	Seite
V. Asymptotische Lösung von Operatorengleichungen . . . . .	55
33. Der allgemeine asymptotische Entwicklungssatz . . . . .	55
34. Der asymptotische Entwicklungssatz für $h = F(p) \sqrt{p}$ . . . . .	56
35. Beispiele für die asymptotische Entwicklung von $h = F(p) \sqrt{p}$ . . . . .	58
36. Der asymptotische Entwicklungssatz für $h = \Phi(p^k) \sqrt{p}$ . . . . .	61
37. Beispiele für die asymptotische Entwicklung von $h = \Phi(p^k) \sqrt{p}$ . . . . .	63
38. Der Einschwingvorgang bei Wechselströmen . . . . .	67
39. Der Heavisidesche asymptotische Entwicklungssatz für einige andere Operatorengleichungen . . . . .	70
VI. Strom- und Spannungswellen längs eines induktionsfreien Kabels . . . . .	76
40. Bedeutung der Ausgleichsvorgänge im induktionsfreien Kabel; Strom- und Spannungsverteilung für ein Kabel unbegrenzter Länge . . . . .	76
41. Diskussion des Verlaufes von Strom und Spannung . . . . .	78
42. Das Kelvinsche KR-Gesetz . . . . .	80
43. Das Kabel mit Ableitung . . . . .	83
44. Einschwingvorgänge von Wechselströmen bei induktionsfreien Kabeln ohne Ableitung . . . . .	86
VII. Strom- und Spannungswellen längs Leitungen . . . . .	89
45. Die Operatorengleichung der Leitungswellen . . . . .	89
46. Lösung der Operatorengleichung . . . . .	91
47. Lösung durch Reihenentwicklung . . . . .	93
48. Eigenschaften der Wellenstirn . . . . .	94
49. Das Ähnlichkeitsgesetz der Leitungswellen . . . . .	97
50. Fortpflanzung von Sinuswellen . . . . .	99
VIII. Wanderwellen auf Starkstromleitungen . . . . .	102
51. Wanderwellen als Überspannungserreger . . . . .	102
52. Operatorengleichung der Wanderwellen . . . . .	103
53. Wanderwellen auf unbegrenzter Leitung . . . . .	104
54. Reflexionsgesetze . . . . .	106
55. Schalten über Schutzleitung . . . . .	109
56. Wirkung von Zwischenleitungen . . . . .	110
57. Umformung von Sprungwellen durch Spulen und Kondensatoren . . . . .	113
58. Umformung durch Schwingungskreise . . . . .	114
59. Einschalten eines Kurzschlusses . . . . .	117
IX. Wellen längs künstlicher Leitungen . . . . .	118
60. Die Kettenleiter . . . . .	118
61. Operatorengleichung der Kettenleiter . . . . .	119
62. Der Kettenleiter im eingeschwungenen Zustand . . . . .	121
63. Übergangsfunktion der Kettenleiter . . . . .	122
64. Einiges über Besselsche Funktionen . . . . .	126
65. Wellen in der Spulenkette . . . . .	128
X. Die endliche, belastete Leitung . . . . .	131
66. Grenzbedingungen der endlichen Leitung . . . . .	131
67. Reflexion an den Leitungsenden . . . . .	132
68. Ersatzschaltungen zur Darstellung der reflektierten Wellenzüge . . . . .	134
69. Einschalten einer kapazitiv belasteten Freileitung . . . . .	135
70. Voltterrasche Integralgleichungen . . . . .	138



	Seite
71. Ausgleicherscheinungen in Vierpolen . . . . .	140
72. Schalten einer Leitung über Widerstand . . . . .	142
73. Integralgleichungen der Einschwingvorgänge in endlichen Leitungen . . . . .	145
74. Schalten eines kapazitiv belasteten Kabels; quantitative Vergleichsrechnungen . . . . .	146
75. Schalten einer induktiv-Ohmisch belasteten Leitung . . . . .	149
76. Entwicklung nach Eigenschwingungen der endlichen Leitung . . . . .	150
<b>XI. Einführung in die Theorie der veränderlichen Stromkreise</b>	<b>153</b>
77. Ausgleichsvorgänge gemäß inneren Systemänderungen . . . . .	153
78. Der plötzliche Kurzschluß . . . . .	153
79. Plötzliche Stromunterbrechung . . . . .	154
80. Veränderliche Leitungselemente . . . . .	154
81. Mikrophontheorie . . . . .	155
82. Der Induktionsgenerator . . . . .	158
83. Die Wechselströme veränderlicher Stromkreise . . . . .	160
84. Nichtlineare Stromkreise . . . . .	164
<b>XII. Anwendung des Fourierschen Integralsatzes auf die Theorie der Ausgleichsvorgänge</b> . . . . .	<b>165</b>
85. Fouriersche Reihe und Fouriersches Integral . . . . .	165
86. Wechselstrom-Schaltvorgänge . . . . .	168
87. Integraldarstellung der Übergangsfunktion . . . . .	169
88. Abschätzung von Einschwingvorgängen . . . . .	171
89. Verzerrung in Übertragungssystemen . . . . .	173
90. Energie und Leistung von Ausgleichsspannungen . . . . .	175
91. Selektivität gegen Störungen . . . . .	177
Literaturverzeichnis . . . . .	180
Namen- und Sachverzeichnis . . . . .	184
Tafel der Integrale mit den zugehörigen Operatorengleichungen und Lösungen.	