



Tomas Gal Jan Gal

# Mathematik für Wirtschafts- wissenschaftler Aufgabensammlung

Zweite, durchgesehene Auflage

Mit 72 Abbildungen  
und 40 Tabellen

Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York  
London Paris Tokyo  
Hong Kong Barcelona  
Budapest

Prof. Dr. Tomas Gal  
Fachbereich Wirtschaftswissenschaft  
Fernuniversität Gesamthochschule  
Postfach 940  
W-5800 Hagen, FRG

Dr. Jan Gal  
Insterburger Weg 7  
W-4020 Mettmann, FRG

ISBN-13: 978-3-540-53807-3      e-ISBN-13: 978-3-642-76500-1  
DOI: 10.1007/978-3-642-76500-1

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1986, 1991

Die Widergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

42/3140-543210 - Gedruckt auf säurefreiem Papier

## Vorwort zur zweiten Auflage

Es ist fast nicht zu vermeiden, daß sich in einer Aufgabensammlung mit mathematischen Beispielen auch bei größter Sorgfalt Fehler einschleichen. Unsere Leser waren zum Glück nicht nur sehr aufmerksam, sondern haben uns die von ihnen in harter Arbeit entdeckten Fehler auch mitgeteilt. Wir möchten uns auf diesem Weg bei unseren Lesern herzlich bedanken und hoffen, daß uns ihre Gunst auch weiterhin erhalten bleibt.

In dieser 2., durchgesehenen Auflage sind nicht nur alle von den Lesern und auch von uns entdeckten Fehler beseitigt, sondern wir haben, dank der Mitarbeit von Frau Dr. G. Piehler, auch einige Aufgaben herausgenommen bzw. verändert, die - wie es sich herausstellte - für unsere Leser etwas zu schwierig geraten sind.

Wir wünschen dem Leser auch bei dieser Auflage viele Erfolgserlebnisse.

Hagen, im Januar 1991

Die Autoren

## Vorwort zur ersten Auflage

Mit diesem Büchlein bekommen die Leser des Buches "Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler" (Gal, Kruse, Piehler, Vogeler, Wolf: "Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler", I, II, III, Springer 1982)<sup>1</sup> eine Hilfe zur Hand, die es Ihnen ermöglicht, die Materie der durchgearbeiteten Kapitel noch besser zu verstehen und im Gedächtnis stärker zu verankern. Denn, und damit entdecken wir kein Neuland, je mehr Aufgaben man zu einem Abschnitt rechnet, desto sicherer beherrscht man die entsprechende Materie ("Die Übung macht den Meister"). Die Aufgaben wurden ursprünglich für Zwecke des Studiums der Mathematik für Ökonomen an der FeU Hagen zusammengestellt. Einige "Generationen" von Studenten der FeU haben sich dieser Aufgaben bedient und es war für sie eine große Hilfe. Viele Studenten haben geäußert, daß sie sich ohne diese Aufgabensammlung nicht vorstellen könnten, wie sie das Studium der Mathematik für Ökonomen bewältigt hätten.

Die Inhalte der Aufgaben in dieser Sammlung lehnen sich an die Reihenfolge der Kapitel und deren Inhalte im oben erwähnten Buch. Nichtsdestoweniger kann diese Sammlung auch völlig unabhängig vom Buch benutzt werden, denn die Aufgabeninhalte stimmen mit den allgemeinen Anforderungen an die s.g. "höhere Mathematik" für Ökonomen und im großen Teil auch der des ingenieur- und sozialwissenschaftlichen Studiums überein. Die Aufgaben sind kapitelweise nummeriert, wobei die dekadische Schreibweise jeder Aufgabe eindeutig eine Nummer zuordnet. So z. B. Aufgabe 3.7 ist die 7te Aufgabe im Kapitel 3 "Matrizenrechnung". Die Lösungen in diesem Heft sind gleichnummeriert, so daß die

---

<sup>1</sup> In den Fußnoten wird hierfür die Kurzbezeichnung "WiMa-Buch" verwendet.

## VIII

Auffindung der Lösung einer Aufgabe leicht ist. Es ist empfehlenswert, eine Aufgabe zunächst selbständig zu lösen und das Ergebnis mit der Lösung in der Sammlung zu vergleichen, wenn Sie jedoch feststellen, daß Sie bei der Lösung nicht weiterkommen, so sollten Sie sich die Lösung in der Sammlung anschauen, insbesondere die "Anleitungen". Wenn nichtmals das weiterhilft, so ist es empfehlenswert, das entsprechende Kapitel im o.g. Buch nochmals nachzulesen. Wir wünschen den "Bearbeitern" dieser Sammlung viele Erfolgserlebnisse bei der Lösung der Aufgaben. Von den Kapiteln 1, 6 und 11 (entspricht Teil I, II und III des WiMa-Buches) haben wir eine Auswahl der wichtigsten Symbole eingefügt. Ein komplettes Symbolverzeichnis findet der Leser am Anfang jeden Teiles des WiMa-Buches.

Hagen, im August 1985  
Die Autoren

Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler  
Aufgabensammlung

Übungsaufgaben zum Buch Mathematik für Wirtschaftswissenschaftler

Inhaltsverzeichnis

	<u>Aufgaben</u> <u>Lösungen</u>	
	-----	
Teil I: Lineare Algebra		
Kapitel:		
1 Vektorrechnung	1	49
2 Geometrie im $\mathbb{R}^n$	6	62
3 Matrizenrechnung	9	65
4 Lineare Gleichungssysteme	16	72
5 Lineare Ungleichungssysteme und konvexe Polyeder	19	87
Teil II: Analysis		
Kapitel:		
6 Funktionen einer Variablen	22	96
7 Differentialrechnung für Funktionen einer Variablen	28	102
8 Funktionen mehrerer Variablen	32	126
9 Extrema im $\mathbb{R}^n$	34	131
10 Integrale	38	135
11 Differentialgleichungen	42	141
Teil III: Lineare Programmierung		
Kapitel:		
12 + 13 Lineare Optimierung	43	143

SYMBOLVERZEICHNIS

$x \leq y$ (bzw. $x \geq y$ )	$x$ ist kleiner (bzw. größer) oder gleich $y$
$x < y$ (bzw. $x > y$ )	$x$ ist echt kleiner (bzw. größer) $y$
( )	Runde Klammern bei Vektoren, Punkten, Matrizen, offenen Intervallen und geordneten Paaren
[ ]	Eckige Klammern bei abgeschlossenen Intervallen
< >	Spitze Klammern bei erzeugten Teilräumen
{ }	Geschweifte Klammern bei Mengen
IN <sup>1</sup>	Menge der natürlichen Zahlen
IR (bzw. $\mathbb{R}^+$ ) <sup>1</sup>	Menge der reellen (bzw. positiven reellen) Zahlen
	Menge der $n$ -dimensionalen reellen Vektoren
$A \setminus B$	Differenzmenge (oder: $A$ ohne $B$ )
$\complement A$	Komplementärmenge (oder: Komplement) von $A$
$j = 1, \dots, n$	Der Index $j$ läuft von 1 bis $n$
$\sum_{j=k}^n$	Summe über $j$ von $k$ bis $n$ $\left[ \text{z. B. } \sum_{j=3}^5 a_j = a_3 + a_4 + a_5 \right]$
$x = (x_1, \dots, x_n)^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$	Spaltenvektor $x \in \mathbb{R}$
$x^T = (x_1, \dots, x_n)$	Zeilenvektor; der transponierte Vektor $x$
$0 = (0, \dots, 0)^T$	( $n$ -dimensionaler) Nullvektor
$\langle x^1, \dots, x^k \rangle$	Teilraum, der von den Vektoren $x^1, \dots, x^k$ erzeugt wird
$A = A_{m,n} = (a_{ij}) = (a_{ij})_{m,n}$ $= \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$	$m \times n$ -Matrix mit den Elementen $a_{ij}$ , $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$

---

<sup>1</sup> Diese Zeichen sollen als Standardbezeichnungen mit dem zusätzlichen "I" nur diese Zeichen von allen anderen abgrenzen. Es wird also nicht als "in" bzw. "ir", sondern als "n" bzw. "r" gelesen.



XII

$I, I_n$	Einheitsmatrix $\left[ \text{z. B. } I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$
$A^T$	Transponierte Matrix A
$\text{rg } A$	Rang von A
$ A , \det A$	Determinante von A
$\text{Int } P$	Inneres der Punktmenge P
$\text{Rd } P$	Rand der Punktmenge P
$(A b)$	Erweiterte Koeffizientenmatrix
$B, N$	Basis (-matrix) bzw. Matrix der Nichtbasisvektoren
$x_B$	Basislösung
$x_B^{(o)}$	Vollständige Basislösung
$x_N$	Vektoren der Nichtbasisvariablen (oder: der frei wählbaren) Variablen
$x_a$	Allgemeine Lösung
$\beta^k$	k-te Spalte der Basisinversen $B^{-1}$
$X$ bzw. $\bar{X}$	Lösungsraum eines linearen (Un-) Gleichungssystems bzw. der zugehörigen kanonischen Form
$P_n(\lambda)$	Charakteristisches Polynom zum Eigenwertproblem $Ax = \lambda x$
$D_f$	Definitionsbereich einer Funktion f
$W_f$	Wertebereich einer Funktion f
$f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ oder $y = f(x), x \in D_f, D_f \subseteq \mathbb{R}$	Funktion, definiert auf der Menge $D_f$ mit Werten in $\mathbb{R}$
$\Delta x$	Differenz $(x - x_0)$
$f', y', \frac{dy}{dx}, \frac{df}{dx}, \frac{df(x)}{dx}$	Ableitung von $y = f(x)$
$f^{(k)}, y^{(k)}, \frac{d^k f}{dx^k}, \frac{d^k y}{dx^k}$	k-te Ableitung von f
$f'_{x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}$	partielle Ableitung von f nach $x_i$ , $i \in \{1, \dots, n\}$
$\frac{\partial f}{\partial x_i} \Big _{(x_1, \dots, x_n)^T}$	partielle Ableitung von f nach $x_i$ an einer Stelle $x = (x_1, \dots, x_n)^T$
$F(x) \Big _a^b$	Differenz $F(b) - F(a)$ der Stammfunktion F(x)

$z^{\text{neu}}, z^{\text{alt}}$	Zielfunktionswert vor bzw. nach einem Simplexschritt
$z_{\text{max}}$ bzw. $z_{\text{min}}$	Optimaler Zielfunktionswert
$\theta_{\text{min}}$	Kriteriumselement beim Zulässigkeitskriterium
$\Delta z_j$	Kriteriumselement beim Optimalitätskriterium
$P_i$	Hilfsvariable bei der Zwei-Phasen-Methode
H	Hilfszielfunktion bei der Zwei-Phasen-Methode
(P) bzw. (D)	Primales bzw. duales LOP
$x_A$	Alternative Lösung bei einem LOP