5. Teil: Unendliche Reihen — Näherungsverfahren

§ 92 Allgemeine Orientierung

Bei der Integration allgemeiner Differentialgleichungen mußten wir offenlassen, ob alle Integrale, auf die man geführt wird, „in geschlossener Form“ lösbar sind. In der Tat lassen sich schon so einfache Funktionen wie

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^4}}, \quad \frac{e^x}{x}, \quad e^{-x^2}, \quad \frac{\sin x}{x}, \quad \frac{1}{\log x}$$

unbestimmt nicht integrieren. Von ihnen ist, in bestimmter Form, das mittlere praktisch wichtig. Oft ermöglicht die Reihenlehre solche Integrationen. Man stellt die Funktion durch eine unendliche Reihe dar.

Nun hatten wir aber wiederholt betont, daß die für das Endliche geltenden Rechnungsregeln nicht ohne weiteres auf das Unendliche übertragen werden dürfen. Eine völlige Beschränkung auf die praktische Handhabung, d. h. auf sogenannte „Faustregeln“ — wie wir es auch schon getan haben — ließe uns oft ratlos bleiben. Ganz ohne mathematische Begründungen läßt sich nicht durchkommen. Wenigstens die wichtigsten theoretischen Grundlagen über den Umgang mit unendlichen Reihen müssen bekannt sein. Daß wir mit dem notwendigen Minimum an Theorie vorliebnehmen, versteht sich von selbst.

Die Anwendung der unendlichen Reihen auf Probleme der Integralrechnung und der Differentialgleichungen lag für den Gang unserer Ausführungen am nächsten.

Wir brauchen indessen nicht so weit zu gehen. Bereits für den Zahlbegriff besitzen die unendlichen Reihen eine große Bedeutung. In § 30 wurde die für die gesamte Mathematik und ihre Anwendungen äußerst wichtige Irrationalzahl e durch die Definition

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

eingeführt und ihre elementarste näherungsweise Berechnung gezeigt. Die wiedergegebene Wertetabelle ist im Prinzip eine unendliche Zahlenfolge; die Ausrechnung wird bereits nach den ersten Schritten undurchführbar.

Ein anderer Weg zur numerischen näherungsweisen Berechnung von e ist unvergleichlich einfacher und zeigt den Zusammenhang mit den im folgenden zu besprechenden Begriffen noch deutlicher. Wir wenden auf $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ den binomischen Lehrsatz an und haben

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + \binom{n}{1}\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \binom{n}{3}\frac{1}{n^3} + \cdots + \binom{n}{n-1}\frac{1}{n^{n-1}} + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n}.$$

Setzen wir hierin

$$\binom{n}{2}\frac{1}{n^2}=\frac{n(n-1)}{2!\,n^2}=\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$$\binom{n}{3}\frac{1}{n^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3!\,n^3}=\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\binom{n}{n}\frac{1}{n^n}=\frac{n(n-1)\cdots[n-(n-1)]}{n!\,n^n}=\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

so ergibt sich

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots+$$
$$+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Für $n\to\infty$ folgt hieraus weiter

(1) $$\mathrm{e}=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

Durch (1) wird e als unendliche Reihe dargestellt.[1]) Näherungswerte von e erhalten wir, indem wir zwei, drei, vier, ... Glieder dieser Reihe addieren. Die Teilsummen sind

(2) $$\left\{\begin{array}{ll} 1+1 & =2\\ 1+1+\frac{1}{2!} & =2{,}5\\ 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!} & =2{,}666\,67\\ 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!} & =2{,}708\,34\\ 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!} & =2{,}716\,67\\ 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!} & =2{,}718\,06\approx 2{,}718. \end{array}\right.$$

Der Rechenaufwand, um e bis auf drei Dezimalen genau zu ermitteln, ist denkbar gering; denn man findet allgemein den Summanden $\frac{1}{n!}$ aus dem zuvor berechneten $\frac{1}{(n-1)!}$, indem man diesen durch n dividiert. Allerdings ist das rein mathematisch noch nicht einwandfrei. Daß das beschriebene Verfahren für die Reihe (1) statthaft ist, bedarf des Nachweises. Wir werden ihn mit § 94 bringen.

Wird die andere mathematisch berühmte Irrationalzahl π ebenfalls auf einem solchen Wege bestimmt? Daß auch π als Grenzwert definiert wird und daher auf einen unendlichen Prozeß hinweist, wissen wir, daß sich π mittels einer unendlichen Reihe berech-

[1]) Diese Folgerung ist nicht selbstverständlich. In § 97 leiten wir (1) anders ab.

nen läßt, werden wir in § 103 zeigen. Was für e und π gilt, trifft für jede Irrationalzahl zu. Auch davon werden wir uns überzeugen.
Daß die Anwendung der unendlichen Reihen auf Näherungsverfahren auch für den Naturwissenschaftler wichtig ist, wollen wir an einigen Beispielen erläutern.
1. Naturgesetze, so hatten wir in der Einleitung gesehen, sind unter mathematischem Aspekt Funktionen. Erkenntnismäßig sind sie Annäherungen an die absolute Wahrheit. Ihr Genauigkeitsgrad hängt von den Beobachtungs- und Versuchsbedingungen ab. So ist z. B. $s = \frac{g}{2}t^2$ nicht die exakte Wiedergabe des realen freien Falles, sondern genügt nur allen praktischen Anforderungen an die Genauigkeit. Die Formel setzt die Schwerebeschleunigung als konstant voraus und läßt alle Nebeneinflüsse, wie z. B. den Luftwiderstand, unberücksichtigt. Die Beschleunigung ist also in Wirklichkeit nicht konstant, sondern auch eine Funktion der Zeit. Das bedeutet mathematisch, daß die genaue Formel für s Glieder mit höheren Potenzen von t als nur t^2 enthält.
Denn allgemein wird für

$$s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$$

die Beschleunigung

$$\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}\, t^2} = 2\, a_2\,,$$

d. h. konstant. Es wäre daher anzusetzen

$$s = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \cdots$$

Bis zu welcher Potenz von t man gehen muß und welche Werte die Koeffizienten besitzen, würde besondere Untersuchungen erfordern.

2. Die Länge L eines Metallstabes, der bei 0 °C die Länge 1 hat, ist eine lineare Funktion der Temperatur ϑ. L kann durch

$$L = 1 + \alpha\vartheta$$

dargestellt werden. Die Konstante α ist die Vergrößerung der Längeneinheit bei der Erwärmung um 1 °C, der lineare Ausdehnungskoeffizient.
Ist jedoch die Temperatur genügend hoch und sind die Messungen genügend genau, so kann man konstatieren, daß diese Formel die Resultate nicht mit hinreichender Genauigkeit wiedergibt, daß die Abhängigkeit des L von ϑ nicht linear ist. Das läßt sich durch die Annahme deuten, daß α keine Konstante, sondern selbst eine Temperaturfunktion ist. Nimmt man an, daß α eine lineare Funktion der Temperatur sei, setzt also

$$\alpha = \alpha_0 + \beta\vartheta\,, \qquad (\alpha_0, \beta = \text{konstant})$$

so wird

$$L = 1 + \alpha_0\vartheta + \beta\vartheta^2\,.$$

Bei Platin haben die Messungen $\alpha_0 = 8{,}5 \times 10^{-6}$ und $\beta = 3{,}5 \times 10^{-9}$ ergeben, β käme also nur bei hohen Temperaturen und sehr genauen Messungen in Betracht. Bei noch genaueren Messungen wäre es möglich, daß auch die Formel mit den 2 Konstanten α_0 und β die Messungen nicht mit genügender Genauigkeit wiedergäbe. Um sie weiter zu verbessern, nimmt man β als lineare Temperaturfunktion an und kommt so in analoger Weise wie früher auf die Formel

$$L = 1 + \alpha_0\vartheta + \beta_0\vartheta^2 + \gamma\vartheta^3 .$$

Nehmen wir an, daß wir die Annäherung durch Hinzufügen weiterer Glieder mit höheren Potenzen von ϑ so weit treiben könnten, daß wir mit einer unendlichen Reihe solcher Potenzen eine vollkommene Genauigkeit erzielten!

3. Die Drehung der Polarisationsebene durch eine Rohrzuckerlösung wächst mit der Konzentration der Lösung, und zwar fand man zunächst einfache direkte Proportionalität. Ist c die Konzentration der Lösung, gemessen in g/ml, und α der zugehörige Drehungswinkel, so heißt die mathematische Formel

$$(*) \qquad \alpha = \beta c .$$

Der Proportionalitätsfaktor β hat eine reale Bedeutung. Für $c = 1$ ist $\alpha = \beta$, d. h., β ist der Drehungswinkel bei der Konzentration 1. Man nennt β die spezifische Drehung. Genauere Untersuchungen ergaben, daß das Gesetz (*) nur in erster Näherung zutrifft. Verfeinerten Messungen entspricht der Ansatz

$$\alpha = \beta_1 c + \beta' c^2 ,$$

wobei jetzt β_1 und β' Konstanten bezeichnen, deren Werte empirisch ermittelt werden müssen. Die weitere Entwicklung hat zu

$$\alpha = \beta_1 c + \beta_2 c^2 + \beta_3 c^3$$

als abermals besserer Näherung geführt. Bei Verwendung eines 10 cm langen Rohres heißen die Formeln

$$\alpha = 66{,}5\,c; \quad (1\text{a})\ \alpha = 66{,}456\,c + 0{,}0087\,c^2;$$
$$(1\text{b})\ \alpha = 66{,}456\,c + 0{,}0087\,c^2 - 0{,}000\,235\,c^3 .$$

Die aufgeführten numerischen Werte der Koeffizienten werden aus den Versuchsergebnissen mit Hilfe der Ausgleichsrechnung ermittelt.

Auch hier handelt es sich um eine schrittweise Annäherung an die absolute Wahrheit oder mathematisch um einen Fortgang ins Unendliche.

Zwischen diesen und den zuvor besprochenen arithmetischen Beispielen besteht ein wesentlicher Unterschied. Dort sind die Glieder der unendlichen Reihen Konstanten, hier sind sie Funktionen, im ersten Beispiel Funktionen der Zeit, im zweiten der Temperatur, im dritten der Konzentration. Durch die unendliche Reihe wird eine neue Funktion — hier ein genaueres Naturgesetz — definiert. Bei der Darstellung der Reihentheorie haben wir zwischen Reihen mit konstanten und solchen mit veränderlichen Gliedern zu unterscheiden.

Das Bildungsgesetz der Reihen in den vorstehenden drei Beispielen ist denkbar einfach. Jedes Glied ist das Produkt aus einer Konstanten und einer positiv ganzzahligen Potenz der Veränderlichen. Man nennt sie Potenzreihen. Sie bilden den Hauptgegenstand der folgenden Untersuchungen. Außerdem müssen wir wegen ihrer praktischen Bedeutung die trigonometrischen Reihen berücksichtigen.