Heidelberger Taschenbücher Band 43

Hans Grauert · Ingo Lieb

Differential- und Integralrechnung III

Integrationstheorie
Kurven- und Flächenintegrale
Vektoranalysis

Zweite, neubearbeitete und erweiterte Auflage

Mit 40 Abbildungen

Springer-Verlag
Berlin Heidelberg New York 1977

Prof. Dr. Hans Grauert
Mathematisches Institut der Universität Göttingen

Prof. Dr. Ingo Lieb
Mathematisches Institut der Universität Bonn

AMS Subject Classifications (1970): 26A42, 26A66
ISBN-13:978-3-540-08383-2 e-ISBN-13:978-3-642-66734-3
DOI: 10.1007/978-3-642-66734-3

Library of Congress Cataloging in Publication Data. Grauert, Hans, 1930–. Differential- und Integralrechnung. (Heidelberger Taschenbücher, Bd. 26, 36, 43). Vol. 2 by Hans Grauert and Wolfgang Fischer. Includes earlier editions of each volume. Includes bibliographies. Contents. – 1. Funktionen einer reellen Veränderlichen. (4., verb. Aufl.) (2., verb. Aufl.) – 2. Differentialrechnung in mehreren Veränderlichen, Differentialgleichungen. – 3. Integrationstheorie. Kurven- und Flächenintegrale. (2. Aufl.). 1. Calculus. I. Lieb, Ingo, 1939– joint author. II. Fischer, Wolfgang, 1936– joint author. III. Title. QA303.G773. 517. 67-18965

Gesamtherstellung: Universitätsdruckerei H. Stürtz AG, Würzburg
2144/3140-543210

Heinrich Behnke gewidmet

Vorwort zur zweiten Auflage

Um dem Anfänger das Verständnis des Buches zu erleichtern, haben wir die Integration über Radonsche Maße in der Neuauflage nicht mehr behandelt. In vielen Lehrbüchern spielt der Formalismus der Vektoranalysis noch eine große Rolle. Wir haben ihm daher ein zusätzliches Kapitel des Buches (Kap. IV) gewidmet und dort insbesondere den Zusammenhang der Formeln des Kalküls der Differentialformen mit denen der Vektoranalysis dargestellt. Weiter werden in diesem Kapitel Kurven- und Flächenintegrale und damit die klassischen Integralsätze von Gauß und Stokes anschaulich interpretiert. Für die Anfertigung der zugehörigen Skizzen möchten wir Herrn Spindler herzlich danken.

Göttingen und Bonn, im April 1977

H. Grauert
I. Lieb

Aus dem Vorwort zur ersten Auflage

Der dritte und letzte Teil unserer Darstellung der Differential- und Integralrechnung ist der Integrationstheorie im $\mathbb{R}^n$ gewidmet. Er ist gedacht für Mathematik- und Physikstudenten des dritten und vierten Semesters. Zum Verständnis wird der Stoff von Band I und ein kleiner Teil des Stoffes von Band II vorausgesetzt.

1. Wir beginnen (in Kap. I) mit dem Lebesgueschen Integral im $\mathbb{R}^n$.

Die Definition des Integrals in § 2 ist wieder so gefaßt, daß sie sich unverändert auf allgemeinste Fälle überträgt, z.B. auf Funktionen mit Werten in einem topologischen Vektorraum V. Selbstverständlich muß V ein lokal-konvexer Hausdorff-Raum sein, wenn man sinnvolle Ergebnisse erwarten will. In diesem Fall werden Funktionsbereiche folgendermaßen erklärt: Es sei $W \subset \mathbb{R}^n \times V$ eine offene Menge, so daß für jeden Punkt $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n$ der Durchschnitt $(\{\mathfrak{x}\} \times V) \cap W$ nichtleer und konvex ist; ferner gebe es eine kompakte Menge $K \subset \mathbb{R}^n$ mit $(\mathbb{R}^n - K) \times \{0\} \subset W$. Alle Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to V$, deren Graph zu W gehört, bilden dann den durch W bestimmten Funktionsbereich $\mathfrak{F}$. Vektorräume $\mathfrak{T}$ von Treppenfunktionen (mit Werten in V) lassen sich wie in § 1 definieren; die Aussage „$t \in\in \mathfrak{F}$“ bedeutet jetzt, daß (wir übernehmen die Bezeichnungen von § 1) alle Mengen $U_J^* \times \bigcup_{K \subset J} t(U_K^*)$ in W liegen.[1] Jetzt liefert Definition 2.5 die Definition des Integrals einer Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to V$ bezüglich eines Maßes $\mu\colon \mathfrak{T} \to V$; der Wert $A = \int f\, d\mu$ ist also ein Element[2] von V. (Die in Def. 2.5 auftretenden ε-Umgebungen sind natürlich durch beliebige Umgebungen von A zu ersetzen.)

Bei dem von uns gewählten Aufbau der Integrationstheorie ist es nicht nötig, die Maßtheorie in allen Feinheiten zu entwickeln;

[1] In den Begriffsbildungen der 2. Auflage bedeutet „$t \in\in \mathfrak{F}$“, daß die abgeschlossene Hülle des Graphen von $t \mid \mathbb{R}^n - \partial\mathfrak{U}$ in W liegt.

[2] Bei N. Bourbaki ist A ein Element des Bidualraums von V.

wir begügen uns mit dem Nachweis, daß die meßbaren Mengen eine σ-Algebra bilden, auf welcher der Inhalt als σ-additives Funktional operiert, und daß jede offene Menge meßbar ist.

2. Das zweite Kapitel bringt den Begriff der alternierenden Differentialform. Die multilineare Algebra wird in dem Umfang, in dem wir sie brauchen, mitbehandelt. Differentialformen sind die natürlichen Integranden der in Kap. III untersuchten Flächenintegrale. Hier werden auch die wichtige Transformationsformel für die Integration in n Veränderlichen und der Stokessche Satz bewiesen. Die Integration erfolgt über (kompakte) „gepflasterte" Flächen; das Integral erweist sich dabei als unabhängig von der Auswahl der Pflasterung. Da sich jede glatte Fläche $\mathfrak{F}$ in natürlicher Weise pflastern läßt, ist eine Integration über $\mathfrak{F}$ stets möglich. Ähnlich dürfte jede kompakte semianalytische Menge (mit Singularitäten!) Pflasterungen besitzen.

Die letzten beiden Paragraphen des dritten Kapitels sind dann den Kurvenintegralen über beliebige rektifizierbare Wege gewidmet. Um das Integral in dieser Allgemeinheit zu erhalten, ist eine Untersuchung der absolut stetigen Funktionen notwendig. Damit werden auch die bereits in Band I angegebenen Sätze über die Variablentransformation im Lebesgue-Integral und über den Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration bewiesen.

3. Differentialformen und Flächenintegrale ersetzen die nach strukturellen Gesichtspunkten unzulängliche Vektoranalysis, deren Formeln – völlig unnötig – von der Maßbestimmung des $\mathbb{R}^n$ Gebrauch machen und deshalb nur wenige Invarianzeigenschaften aufweisen. Ist z.B. $\mathfrak{a}=(a_1, a_2, a_3)$ ein Vektorfeld im $\mathbb{R}^3$, so schreibt die Vektoranalysis das Kurvenintegral als $\int_W \mathfrak{a}(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{s}$. Dabei ist $d\mathfrak{s}=\Phi'(s)\, ds$ und $\Phi(s)$ die ausgezeichnete Parametrisierung von W. Man benutzt ferner das Skalarprodukt von $\mathfrak{a}$ mit $d\mathfrak{s}$ – und damit die Metrik des $\mathbb{R}^3$ gleich zweimal! In unserer Theorie ersetzt man $\mathfrak{a}$ durch die Pfaffsche Form $\varphi=a_1\, dx_1+a_2\, dx_2+a_3\, dx_3$; das Kurvenintegral $\int_W \varphi$ ist von der Maßbestimmung unabhängig und daher invariant gegenüber beliebigen differenzierbaren Koordinatentransformationen. Ähnliches gilt für das Integral über glatte zweidimensionale Flächen des $\mathbb{R}^3$. In der Vektoranalysis bildet man zu dem Vektorfeld $\mathfrak{b}=(b_1, b_2, b_3)$ das Flächenintegral $\int_{\mathfrak{F}} \mathfrak{b}(\mathfrak{x})\, d\mathfrak{o}$, wobei $d\mathfrak{o}=\mathfrak{n}\, do$ ist, $\mathfrak{n}$ den Normalenvektor auf $\mathfrak{F}$ und do das Riemannsche Flächenelement von $\mathfrak{F}$ bezeichnet. In unserer Theorie haben wir statt dessen einfach das

Integral $\int_{\mathfrak{F}} \psi$ über die 2-Form

$$\psi = b_1\, dx_2 \wedge dx_3 + b_2\, dx_3 \wedge dx_1 + b_3\, dx_1 \wedge dx_2 .$$

Der für alle Dimensionen gültige Stokessche Satz ersetzt den Gaußschen Integralsatz sowie den Stokesschen Satz, der in Physikbüchern auftritt (bei der Verbindung von Flächen- und Randintegralen), ferner die entsprechenden Formeln für das Raum-Zeit-Kontinuum. Es ist nämlich

$$\begin{aligned} d\varphi &= d(a_1 dx_1 + a_2 dx_2 + a_3 dx_3) \\ &= c_1 dx_2 \wedge dx_3 + c_2 dx_3 \wedge dx_1 + c_3 dx_1 \wedge dx_2 \end{aligned}$$

mit $\mathfrak{c} = \operatorname{rot} \mathfrak{a}$, weiter

$$\begin{aligned} d\psi &= d(b_1 dx_2 \wedge dx_3 + b_2 dx_3 \wedge dx_1 + b_3 dx_1 \wedge dx_2) \\ &= c\, dx_1 \wedge dx_2 \wedge dx_3 \end{aligned}$$

mit $c = \operatorname{div} \mathfrak{b}$. Die Formeln

$$\int_{\partial \mathfrak{F}} \mathfrak{a}\, d\mathfrak{s} = \int_{\mathfrak{F}} (\operatorname{rot} \mathfrak{a})\, d\mathfrak{o}$$

und

$$\int_{\partial G} \mathfrak{b}\, d\mathfrak{o} = \int_{G} (\operatorname{div} \mathfrak{b})\, dx_1 dx_2 dx_3$$

sind also, wie man sofort nachrechnet, gleichbedeutend mit

$$\int_{\partial \mathfrak{F}} \varphi = \int_{\mathfrak{F}} d\varphi \quad \text{und} \quad \int_{\partial G} \psi = \int_{G} d\psi .$$

Ähnliches gilt für den $\mathbb{R}^4$.

Auch aus praktischen Gründen ist der Kalkül der alternierenden Differentialformen der Vektoranalysis vorzuziehen. Die sehr einfachen Rechenregeln aus Kap. II, §§ 4, 5, machen manche komplizierten Beweise überflüssig und ersparen einige schwer zu behaltende Festsetzungen (man denke etwa an die Definition von rot $\mathfrak{a}$).

4. Viele physikalische Größen sind, wie die Messung zeigt, durch Differentialformen und nicht etwa durch (kontravariante) Vektoren zu beschreiben. Das gilt insbesondere in der Elektrodynamik. Wir formulieren daher in Kap. IV[3] die Maxwellschen Gleichungen in der Sprache der Differentialformen. – Der Physi-

[3] Kap. V der 2. Auflage.

ker bestimmt beispielsweise durch Messung den Fluß der magnetischen Feldintensität $\mathfrak{B}$ durch ein zweidimensionales Flächenstück, d.h. er bestimmt den Wert des Integrals einer 2-Form. Es ist also sinnvoller,

$$\mathfrak{B} = B_1 dx_2 \wedge dx_3 + B_2 dx_3 \wedge dx_1 + B_3 dx_1 \wedge dx_2$$

anstelle von $\mathfrak{B} = (B_1, B_2, B_3)$ zu schreiben. Die Zuordnung der 2-Form $\mathfrak{B}$ zum Vektorfeld (B_1, B_2, B_3) ist nur invariant gegenüber orthogonalen Transformationen, die außerdem noch die Orientierung erhalten[4], beruht also wieder einmal wesentlich auf der Metrik des $\mathbb{R}^3$. – Auch die elektrische Feldstärke ist eine (eindimensionale) Differentialform (weil nach den Erkenntnissen der Relativitätstheorie die Kraft als Gradient der Energie eine solche ist). In unserer Formulierung ist die zweite Gruppe der Maxwellschen Gleichungen ($\operatorname{div} \mathfrak{B} = 0$; $\operatorname{rot} \mathfrak{E} = -\dot{\mathfrak{B}}$) invariant gegenüber beliebigen differenzierbaren Abbildungen – und das hat physikalische Bedeutung!

Die erste Gruppe der Maxwellschen Gleichungen besitzt weniger Invarianzeigenschaften. Zu ihrer Formulierung muß man nämlich den von der Metrik des Raum-Zeit-Kontinuums wesentlich abhängigen $*$-Operator einführen. Er verwandelt Differentialformen in Ströme, das sind Objekte, die sich bei orientierungserhaltenden Abbildungen wie Differentialformen transformieren (und daher bei derartigen Transformationen nicht von Differentialformen zu unterscheiden sind); bei allgemeineren Koordinatentransformationen F multiplizieren sie sich zusätzlich mit dem Vorzeichen der Funktionaldeterminante von F. – Das ganze System der Maxwellschen Gleichungen ist dann invariant gegenüber Lorentz-Transformationen (wenigstens gegenüber allen eigentlichen Lorentz-Transformationen und den Raumspiegelungen).

Um dem Praktiker den Gebrauch der neuen Begriffe zu erleichtern, haben wir noch besonderen Wert auf die Veranschaulichung von Differentialformen und Strömen im $\mathbb{R}^3$ gelegt. Auch hier ergeben sich Unterschiede zu der bislang üblichen Benutzung von „Feldlinien".

Es sei uns gestattet, an dieser Stelle den Herren Prof. Dr. H.J. Borchers (Elektrodynamik) und Dr. W. Jäger (Integrationstheorie) für wertvolle Hinweise zu danken.

H. Grauert

Göttingen, im März 1968 I. Lieb

---

[4] Aus diesem Grunde heißt $\mathfrak{B}$ in vielen modernen Physikbüchern auch ein Pseudovektor (axialer Vektor).

Inhaltsverzeichnis