





Michael Schäfer

# Numerik im Maschinenbau



Springer

Prof. Dr. rer. nat. Michael Schäfer

Technische Universität Darmstadt  
Institut für Numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau  
Petersenstraße 30  
64287 Darmstadt

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

**Schäfer, Michael:**

Numerik im Maschinenbau / Michael Schäfer. - Berlin ; Heidelberg ; New York ; Barcelona ; Hongkong ; London ; Mailand ; Paris ; Singapur ; Tokio : Springer 1999  
(Springer-Lehrbuch)

ISBN 978-3-540-65391-2      ISBN 978-3-642-58416-9 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-58416-9

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1999

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York 1999

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z.B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert werden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Einbandgestaltung: design & production

Satz: Autoredaten, Computer to plate

Weiterverarbeitung: Lüderitz & Bauer, Berlin

SPIN: 10667074

68/3020 – 5 4 3 2 1 0 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

# Vorwort

Aufgrund der enormen Fortschritte im Bereich der Computertechnologie und der Berechnungsmethoden, die in den letzten Jahren erreicht wurden, gewinnt der Einsatz numerischer Simulationsverfahren in vielen Industriezweigen zunehmend an Bedeutung. Dies trifft insbesondere für nahezu alle Anwendungsbereiche des Maschinenbaus zu. Numerische Berechnungen bieten hier oft eine kostengünstige Möglichkeit zur Untersuchung und Optimierung von Produkten und Prozessen.

Neben dem Bedarf an Entwicklern entsprechender Software, gibt es einen nicht geringen Bedarf an qualifizierten Fachkräften (mit stark steigendem Trend), die in der Lage sind, numerische Simulationsverfahren effizient für komplexe industrielle Aufgabenstellungen einzusetzen. Der erfolgreiche und effiziente Einsatz der Berechnungsmethoden setzt jedoch gewisse Grundkenntnisse über die verwendeten numerischen Techniken und deren Anwendungsmöglichkeiten voraus. In der Vermittlung dieser Kenntnisse ist das Hauptanliegen des vorliegenden Buchs zu sehen.

Der Text gibt eine praxisbezogene Einführung in moderne numerische Berechnungsverfahren, wie sie typischerweise im Bereich des Maschinenbaus aber auch in anderen Ingenieurdisziplinen (z.B. im Chemie- oder Bauingenieurwesen) zum Einsatz kommen. Die weitaus häufigsten Berechnungsaufgaben stellen hierbei Wärmeübertragungsprobleme und Probleme aus der Struktur- und Strömungsmechanik dar, die daher einen thematischen Schwerpunkt bilden.

Bei der zu behandelnden Thematik hat man es mit einem stark interdisziplinären Fachgebiet zu tun (oft mit dem Begriff *Technisch-Wissenschaftliches Rechnen* beschrieben), in dem Aspekte der Numerischen Mathematik, der Naturwissenschaften, und der Informatik mit der jeweiligen Ingenieurdisziplin, aus welcher die Anwendung stammt, eng zusammenspielen. Die notwendigen Informationen finden sich daher oft in verschiedenen Lehrbüchern der Einzeldisziplinen verstreut. Im vorliegenden Text wird die Thematik fachübergreifend dargestellt, wobei auf die verschiedenen Teildisziplinen nur so weit eingegangen wird, wie dies für das allgemeine Verständnis erforderlich ist.

Es werden Grundlagen der Modellierung, Diskretisierung und Lösungsalgorithmen vermittelt, wobei stets Bezüge zu für den Maschinenbau wichtigen Anwendungsgebieten aus Wärmeübertragung, Struktur- und Strömungsme-

chanik hergestellt werden. Gemeinsame Aspekte der verschiedenen Berechnungstechniken werden herausgestellt und Fragen der Genauigkeit, Effizienz und Wirtschaftlichkeit, welche für die praktische Anwendung von besonderer Bedeutung sind, werden diskutiert. Im einzelnen werden die folgenden Themen behandelt:

- *Modellierung*: Einfache Feldprobleme, Wärmetransport, Strukturmechanik, Strömungsmechanik.
- *Diskretisierung*: CAD-Anbindung, numerische Gitter, Finite-Volumen-Verfahren, Finite-Elemente-Verfahren, Zeitdiskretisierung, Eigenschaften diskreter Systeme.
- *Lösungsalgorithmen*: Lineare Systeme, nichtlineare Systeme, Variablenkopplung, Mehrgitterverfahren, Parallelisierung.
- *Spezielle Anwendungen*: Finite-Element-Verfahren für elastomechanische Probleme, Finite-Volumen-Verfahren für inkompressible Strömungen, Berechnungsverfahren für turbulente Strömungen.

Die Themen werden jeweils in einführender Weise dargestellt, so daß neben Standardkenntnissen in Analysis und Linearer Algebra keine speziellen Vorkenntnisse erforderlich sind. Für weiterführende Studien ist entsprechende Literatur (mit Hinweis auf die Kapitel, für welche diese jeweils relevant ist) angegeben.

Wichtige Effekte werden anhand von Anwendungsbeispielen illustriert. Viele „per Hand“ durchgeführte Beispielberechnungen sollen helfen, die beschriebenen numerischen Methoden nachzuvollziehen und zu verstehen. Die zu jedem Kapitel angegebenen Übungsaufgaben bieten die Gelegenheit die Methoden selbst nachzuvollziehen. Das Buch eignet sich damit sowohl für das Selbststudium als auch Begleitmaterial zu Vorlesungen. Es wendet sich sowohl an Studierende des Maschinenbaus und anderer ingenieurwissenschaftlicher Disziplinen als auch an Berechnungsingenieure in der Industrie.

Der Text entstand auf der Grundlage von Skripten zu verschiedenen Vorlesungen am *Fachgebiet Numerische Berechnungsverfahren im Maschinenbau der Technischen Universität Darmstadt*. Der Autor bedankt sich bei den Mitarbeitern des Fachgebiets für die Unterstützung bei der Erstellung des Manuskriptes. Insbesondere seien hier Frau Dipl.-Ing. Ilka Teschauer sowie die Herren Dipl.-Ing. Peter Droll, Dr.-Ing. Sebastian Meynen und Dipl.-Ing. Rolf Sieber erwähnt. Der INVENT Computing GmbH sei für die Kooperation im Zusammenhang mit dem Finite-Volumen-Berechnungsprogramm FASTEST gedankt, mit welchem viele der Anwendungsbeispiele berechnet wurden. Dem Springer-Verlag sei für die angenehme Zusammenarbeit gedankt.

Darmstadt, November 1998

Michael Schäfer

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b> .....	1
1.1	Nutzen numerischer Untersuchungen .....	1
1.2	Entwicklung numerischer Verfahren .....	4
1.3	Charakterisierung numerischer Verfahren .....	6
<b>2</b>	<b>Modellierung kontinuumsmechanischer Probleme</b> .....	11
2.1	Kinematik .....	11
2.2	Grundlegende Erhaltungsgleichungen .....	15
2.2.1	Massenerhaltung .....	16
2.2.2	Impulserhaltung .....	18
2.2.3	Drehimpulserhaltung .....	19
2.2.4	Energieerhaltung .....	19
2.2.5	Materialgesetze .....	20
2.3	Skalare Probleme .....	21
2.3.1	Einfache Feldprobleme .....	21
2.3.2	Wärmetransportprobleme .....	24
2.4	Strukturmechanische Probleme .....	26
2.4.1	Lineare Elastizitätstheorie .....	27
2.4.2	Stäbe und Balken .....	31
2.4.3	Scheiben und Platten .....	36
2.4.4	Lineare Thermoelastizität .....	40
2.4.5	Hyperelastizität .....	42
2.5	Strömungsmechanische Probleme .....	43
2.5.1	Inkompressible Strömungen .....	45
2.5.2	Reibungsfreie Strömungen .....	46
	Übungsaufgaben zu Kap. 2 .....	47
<b>3</b>	<b>Diskretisierung des Problemgebiets</b> .....	49
3.1	Beschreibung der Problemgeometrie .....	49
3.2	Numerische Gitter .....	52
3.2.1	Gittertypen .....	53
3.2.2	Gitterstruktur .....	54
3.3	Erzeugung strukturierter Gitter .....	58
3.3.1	Algebraische Gittererzeugung .....	59

3.3.2	Elliptische Gittererzeugung	62
3.4	Erzeugung unstrukturierter Gitter	63
3.4.1	Advancing-Front-Methoden	64
3.4.2	Delaunay-Triangulierungen	66
	Übungsaufgaben zu Kap. 3	68
<b>4</b>	<b>Finite-Volumen-Diskretisierung</b>	<b>69</b>
4.1	Allgemeine Vorgehensweise	69
4.2	Approximation von Oberflächen- und Volumenintegralen	72
4.3	Diskretisierung konvektiver Flüsse	75
4.3.1	Zentraldifferenzen	76
4.3.2	Upwind-Verfahren	77
4.3.3	„Flux-Blending“-Technik	79
4.4	Diskretisierung diffusiver Flüsse	80
4.5	Nicht-kartesische Gitter	82
4.6	Diskretisierte Transportgleichung	85
4.7	Behandlung von Randbedingungen	86
4.8	Gesamtgleichungssystem	88
4.9	Berechnungsbeispiel	91
	Übungsaufgaben zu Kap. 4	93
<b>5</b>	<b>Finite-Element-Diskretisierung</b>	<b>95</b>
5.1	Das Galerkinsche Verfahren	95
5.2	Finite-Element-Verfahren	98
5.3	Eindimensionale Elemente	100
5.3.1	Linearer Ansatz	104
5.3.2	Kubischer Ansatz	106
5.3.3	Berechnungsbeispiel	107
5.4	Zweidimensionale Elemente	110
5.4.1	Dreieckselemente	113
5.4.2	Parallelogrammelemente	117
5.5	Aufstellen des Gesamtgleichungssystems	119
5.6	Numerische Integration	127
	Übungsaufgaben zu Kap. 5	129
<b>6</b>	<b>Zeitdiskretisierung</b>	<b>131</b>
6.1	Grundlagen	131
6.2	Explizite Verfahren	135
6.2.1	Explizite Einschrittverfahren	135
6.2.2	Explizite Mehrschrittverfahren	138
6.3	Implizite Verfahren	139
6.3.1	Implizite Einschrittverfahren	139
6.3.2	Implizite Mehrschrittverfahren	142
6.4	Berechnungsbeispiel	144
	Übungsaufgaben zu Kap. 6	148



<b>7</b>	<b>Lösung der algebraischen Gleichungssysteme</b>	149
7.1	Lineare Systeme	149
7.1.1	Direkte Lösungsmethoden	150
7.1.2	Klassische iterative Methoden	151
7.1.3	ILU-Verfahren	153
7.1.4	Konvergenz iterativer Verfahren	156
7.1.5	Konjugierte Gradientenverfahren	158
7.1.6	Vorkonditionierung	160
7.1.7	Vergleich von Gleichungslösern	161
7.2	Nichtlineare und gekoppelte Systeme	165
	Übungsaufgaben zu Kap. 7	167
<b>8</b>	<b>Eigenschaften von Berechnungsverfahren</b>	169
8.1	Eigenschaften von Diskretisierungsmethoden	169
8.1.1	Konsistenz	170
8.1.2	Stabilität	172
8.1.3	Konvergenz	177
8.1.4	Konservativität	178
8.1.5	Beschränktheit	179
8.2	Abschätzung des Diskretisierungsfehlers	181
8.3	Einfluß des numerischen Gitters	185
8.4	Wirtschaftlichkeit	188
	Übungsaufgaben zu Kap. 8	189
<b>9</b>	<b>Finite-Element-Verfahren in der Strukturmechanik</b>	191
9.1	Struktur des Gleichungssystems	191
9.2	Finite-Element-Diskretisierung	193
9.3	Anwendungsbeispiele	197
	Übungsaufgaben zu Kap. 9	203
<b>10</b>	<b>Finite-Volumen-Verfahren für inkompressible Strömungen</b>	205
10.1	Struktur des Gleichungssystems	205
10.2	Finite-Volumen-Diskretisierung	206
10.3	Lösungsalgorithmen	212
10.3.1	Druckkorrekturverfahren	213
10.3.2	Druck-Geschwindigkeits-Kopplung	217
10.3.3	Unterrelaxation	222
10.3.4	Druckkorrekturvarianten	227
10.4	Behandlung von Randbedingungen	230
10.5	Berechnungsbeispiel	234
10.6	Turbulente Strömungen	241
10.6.1	Charakterisierung von Berechnungsmethoden	241
10.6.2	Statistische Turbulenzmodellierung	246
10.6.3	Das $k$ - $\varepsilon$ Turbulenzmodell	248
10.6.4	Randbedingungen für turbulente Strömungen	250

10.6.5	Diskretisierung und Lösungsverfahren . . . . .	254
	Übungsaufgaben zu Kap. 10 . . . . .	255
<b>11</b>	<b>Beschleunigung von Berechnungen</b> . . . . .	<b>257</b>
11.1	Mehrgitterverfahren . . . . .	257
11.1.1	Prinzip der Mehrgittermethode . . . . .	258
11.1.2	Zweigitterverfahren . . . . .	261
11.1.3	Gittertransfers . . . . .	263
11.1.4	Mehrgitterzyklen . . . . .	264
11.1.5	Berechnungsbeispiele . . . . .	267
11.2	Parallelisierung von Berechnungen . . . . .	270
11.2.1	Parallelrechnersysteme . . . . .	271
11.2.2	Parallelisierungsstrategien . . . . .	272
11.2.3	Effizienzbetrachtungen mit Berechnungsbeispielen . . . . .	277
	Übungsaufgaben zu Kap. 11 . . . . .	282
	<b>Symbolverzeichnis</b> . . . . .	<b>283</b>
	<b>Ergänzende und weiterführende Literatur</b> . . . . .	<b>289</b>
	<b>Index</b> . . . . .	<b>291</b>