DIE GRUNDLEHREN DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

IN EINZELDARSTELLUNGEN MIT BESONDERER BERÜCKSICHTIGUNG DER ANWENDUNGSGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON

R. GRAMMEL · E. HOPF · H. HOPF · F. RELLICH
F. K. SCHMIDT · B. L. VAN DER WAERDEN

BAND LXXIV

DARSTELLUNGEN VON GRUPPEN

MIT BERÜCKSICHTIGUNG
DER BEDÜRFNISSE DER MODERNEN PHYSIK

VON

HERMANN BOERNER

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1955

DARSTELLUNGEN VON GRUPPEN

MIT BERÜCKSICHTIGUNG
DER BEDÜRFNISSE DER MODERNEN PHYSIK

VON

DR. HERMANN BOERNER
PROFESSOR DER MATHEMATIK
AN DER JUSTUS-LIEBIG-HOCHSCHULE GIESSEN

MIT 15 ABBILDUNGEN

BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG
SPRINGER-VERLAG
1955

ISBN 978-3-642-52809-5 ISBN 978-3-642-52808-8 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-52808-8

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1955
BERLIN · GÖTTINGEN · HEIDELBERG

BRÜHLSCHE UNIVERSITÄTSDRUCKEREI GIESSEN

Vorwort.

Die Darstellungstheorie der Gruppen ist eines der reizvollsten Beispiele für die Wechselwirkung zwischen Physik und reiner Mathematik. Wenige Jahre vor der Jahrhundertwende führte der Algebraiker G. FROBENIUS die Gruppencharaktere und den Begriff der Darstellungen ein; ein Jahrzehnt lang enthielt nun fast jeder Band der Berliner Sitzungsberichte eine oder mehrere der schönen Arbeiten von FROBENIUS und I. SCHUR über diesen Gegenstand. Unterdessen hatte mit dem neuen Jahrhundert in demselben Berlin die Quantentheorie das Licht der Welt erblickt — aber niemand ahnte, daß ein Vierteljahrhundert später beide Theorien in so innige Wechselwirkung treten würden. Das geschah in Göttingen, nachdem dort in enger räumlicher und geistiger Nachbarschaft zu dem Algebraikerkreis um EMMY NOETHER die BORN-HEISENBERGsche Quantenmechanik entstanden war. Der besondere, ich möchte sagen ästhetische Reiz dieses Zusammenwirkens besteht darin, daß es die den Gegenständen der Atommechanik innewohnenden Symmetrien sind, die es ermöglichen, mit Hilfe der FROBENIUSschen Begriffe vielen Geheimnissen der Atome so überraschend einfach, sozusagen ohne Rechnung, auf die Spur zu kommen.

Spezielle Bücher über Darstellungstheorie sind bisher nur in englischer Sprache erschienen*). In Deutschland gibt es außer einigen Kapiteln in Lehrbüchern der Algebra oder Gruppentheorie**) nur die schönen, um 1930 von Großen unserer Wissenschaft geschriebenen Bücher über die Darstellungstheorie und die physikalischen Zusammenhänge zugleich***). Das vorliegende Buch ist rein mathematischen Inhalts; die Stoffauswahl und die Art der Darstellung ist aber gleichwohl von dem Wunsch bestimmt, den Physikern zu dienen. Da das Buch von VAN DER WAERDEN in dieser Sammlung erschienen ist, konnte auf die Besprechung der Anwendungen ganz verzichtet werden und dafür der mathematische Inhalt umfassender gewählt und breiter dargestellt werden, um ihn auch Fernerstehenden zugänglich zu machen. In dem gleichen Bestreben wurde versucht, den Stoff so übersichtlich zu gliedern, daß ein Leser, der sich für irgendeine Einzelheit interessiert,

*) LITTLEWOOD [1], MURNAGHAN [5]; auch H. WEYL [6], das freilich weit über das Darstellungsproblem hinausführt. (Ziffern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß des Buches.)

**) Vor allem SPEISER [1] und VAN DER WAERDEN [1]; in englischer Sprache BURNSIDE [1]; über MAAK [1] siehe weiter unten.

***) H. WEYL [3], VAN DER WAERDEN [3]; vgl. auch WIGNER [1].

nicht mehr zu lesen braucht, als hierfür notwendig ist. Insbesondere dienen die Zeilen, die in jedem Kapitel dem § 1 vorangehen, der Erleichterung des Gebrauchs. Was an Vorkenntnissen vorausgesetzt wird, geht über den üblichen Stoff der elementaren Vorlesungen nicht hinaus. Es ist sogar in den beiden ersten Kapiteln das gesamte Rüstzeug über Matrizen und über Gruppen übersichtlich zusammengestellt, und wo hierbei nicht alles bewiesen ist, wird auf geeignete Lehrbücher verwiesen.

Das Hauptanliegen des Buches ist die Angabe der Darstellungen und Charaktere für eine Anzahl der wichtigsten Gruppen. Von der allgemeinen Theorie wird genau das entwickelt, was hierfür notwendig ist. Es wird stets der Körper der komplexen Zahlen oder doch ein algebraisch abgeschlossener Körper zugrunde gelegt. Das ist für die Anwendungen das Naturgemäße und wird auch dadurch gerechtfertigt, daß der Kreis der Aussagen, die man so erhält, eine wunderschöne einfache und abgerundete Theorie darstellt.

Ganz außer Betracht geblieben ist daher die Theorie der modularen Darstellungen — Grundkörper von Primzahlcharakteristik — und die Frage nach dem Verhalten der Darstellungen bei Erweiterung des Grundkörpers, auch der Zusammenhang mit der Invariantentheorie und die Anwendungen auf die reine Gruppentheorie.

Methodisch weichen die einzelnen Kapitel zum Teil stark voneinander ab; doch dürfte es dem Leser erwünscht sein, mehrere Methoden zur Gewinnung der Darstellungen kennenzulernen*). Bei den endlichen Gruppen wird die Theorie des *Gruppenrings* vollständig durchgeführt und hieraus das System der Darstellungen gewonnen, also der Weg benutzt, den E. Noether zuerst gewiesen hat. Wenn man die volle Reduzibilität vorher beweist, ist dieser Weg so einfach, daß dem physikalischen Leser nichts Ungebührliches zugemutet wird. Außer dem Begriff der *Algebra*, der sich in der Physik bereits ein Hausrecht erobert hat, wird nur noch der des *Ideals* benutzt; beide werden nicht als bekannt vorausgesetzt.

Als konkretes Beispiel für die Theorie des Gruppenrings wird die Darstellungstheorie der *symmetrischen Gruppe* vorgeführt.

Die Theorie der *Charaktere* wird nach Schur entwickelt — ein Weg, der sich ohne weiteres auf kompakte kontinuierliche Gruppen übertragen läßt. Hier wird die Integralrechnung auf der Gruppe benutzt. Auch die Differentialrechnung, d. h. die Theorie der Infinitesimalringe kommt zur Sprache. Unter einschränkenden Differenzierbarkeitsvoraussetzungen, die in allen nachher zu betrachtenden Fällen erfüllt sind, kann beides sehr bequem und kurz gemacht werden. Der Verzicht auf größere Allgemeinheit wie überhaupt auf die Behandlung

*) Weitere Methoden findet man in den obengenannten Büchern in englischer Sprache.

allgemeiner kontinuierlicher Gruppen erscheint um so eher gerechtfertigt, als in dieser Sammlung vor wenigen Jahren das Buch über fastperiodische Funktionen von MAAK [1] erschienen ist, in dem man vieles darüber findet.

Die Theorie der *ganzrationalen* Darstellungen der *vollen linearen Gruppe* und ihr Zusammenhang mit den Darstellungen der symmetrischen Gruppe, den SCHUR entdeckt und H. WEYL immer weiter verfolgt hat, ist als „gruppentheoretisches Fundament der Tensorrechnung" (WEYL) mehr von grundsätzlicher als von praktischer Bedeutung für die Physik. Auch hier ist bei unserer Beschränkung auf die komplexen Zahlen alles einfach und übersichtlich; vom Tensorbegriff wird konsequent Gebrauch gemacht. Im Besitz der ganzrationalen Darstellungen macht es nur noch wenig Mühe, bis zur Angabe sämtlicher stetigen Darstellungen nicht nur der vollen linearen, sondern auch der *reellen, unimodularen* und *unitären* Gruppen vorzudringen. Die Beziehung der vollen linearen zur symmetrischen Gruppe gewinnt aber auch praktische Bedeutung dadurch, daß die Formeln, die den Zusammenhang zwischen den Charakteren beider Gruppen herstellen, das beste Werkzeug für die numerische Berechnung der Charaktere der symmetrischen Gruppe abgeben. Hier ergibt sich auch die Übersicht über die Darstellungen der *alternierenden* Gruppe, und ihre Charaktere werden berechnet.

Wie bei den schon genannten kontinuierlichen Gruppen werden auch bei der *Drehungsgruppe* die Darstellungen für beliebige Dimension hergeleitet. Denn wenn auch die gewöhnliche Drehgruppe $\mathfrak{d}_3$ für die Physik am wichtigsten ist (ihre Darstellungen können ohne Studium der allgemeinen Theorie aus VIII § 6*) entnommen werden), so ist doch z. B. die LORENTZ-Gruppe eine modifizierte Drehgruppe $\mathfrak{d}_4$, und auch $\mathfrak{d}_5$ und $\mathfrak{d}_6$ sind schon in physikalischen Arbeiten zur Theorie der Elementarteilchen wichtig geworden. Bei den Drehgruppen wird die Übersicht über die Charaktere (und damit über die Darstellungen) auf dem Wege von E. CARTAN gewonnen, aber mit der „globalen" Wendung, die ihm STIEFEL gegeben hat, also ohne Verwendung des Infinitesimalen. Bei allgemeiner Behandlung erfordert das tiefliegende topologische Hilfssätze, aber da wir nur ein konkretes Beispiel behandeln, geht alles elementar, und die Charaktere ergeben sich gewissermaßen aus einer genauen Betrachtung der Gruppe selbst. Auch der allgemeine Satz von PETER und WEYL braucht nicht benutzt zu werden. Um zu zeigen, daß zu den berechneten Charakteren auch wirklich Darstellungen gehören, müssen nur die „Fundamentaldarstellungen" angegeben werden, mit deren Hilfe man zu allen anderen gelangen kann. Die

*) Stellen, Sätze und Formeln werden so zitiert: § 3 oder Satz 3.2 oder (3.6) verweist auf Stelle oder Satz oder Formel im gleichen Kapitel; V § 3 oder V Satz 3.2 oder V (3.6) auf das Entsprechende im V. Kapitel.

eindeutigen davon sind aus dem früheren bekannte Tensordarstellungen. Die zweideutigen, die sog. *Spin-Darstellungen,* werden auf zwei Arten gewonnen. Einmal infinitesimal, denn es erschien mir angebracht, den Infinitesimalring der Drehgruppe und die damit eng zusammenhängende CLIFFORDsche Algebra oder, wie man auch sagen könnte, die allgemeine Theorie der PAULI-Matrizen wegen ihrer großen Bedeutung für die Physik eingehend zu behandeln. Als zweites wird der direkte globale Weg von BRAUER und WEYL beschritten, bei dem ebenfalls die CLIFFORDsche Algebra benutzt wird.

Bei den LORENTZ-*Gruppen* zeichnet sich die „gewöhnliche" LORENTZ-Gruppe der speziellen Relativitätstheorie dadurch aus, daß man ihre sämtlichen Darstellungen fast ebenso leicht erhält wie die der gewöhnlichen Drehgruppe. Bei allgemeiner Dimension wird nur so viel gebracht, wie man von den korrespondierenden Drehgruppen her unmittelbar übertragen kann.

Zum Schluß möchte ich Herrn H. WIELANDT herzlich danken, der sich der Mühe unterzogen hat, alle Fahnen mitzulesen, und der dabei manche kritische Bemerkung gemacht hat. Ferner danke ich den Herren TH. BIEGLER, G. KRAFFT, R. KRIEGER und W. VELTE für Mithilfe bei der Herstellung des Manuskripts und der Abbildungen und für zahlreiche kleine Verbesserungsvorschläge bei den Korrekturen. Nicht zuletzt gilt mein Dank dem Verlag und der Druckerei, die meinen vielen Verbesserungswünschen den Formelsatz betreffend mit großer Bereitwilligkeit entgegengekommen sind.

Gießen, Ende Februar 1955. H. BOERNER.

Inhaltsverzeichnis.

I. Kapitel. **Matrizen.**

§ 1. Vektoren 1
§ 2. Lineare Abbildungen. Matrizen 3
§ 3. Begriff einer Algebra 7
§ 4. Quadratische und hermitesche Formen, orthogonale und unitäre Matrizen 9
§ 5. Eigenwerte und Transformation auf Diagonalgestalt 11
§ 6. Zwei weitere Verknüpfungen für Matrizen; das KRONECKER-Produkt . . 15
§ 7. Äquivalenz und Reduzibilität von Matrixsystemen. Das Lemma von SCHUR 18
§ 8. Vertauschbarkeit von Matrixsystemen 21
§ 9. Beispiele irreduzibler Systeme. Eine Anwendung des SCHURschen Lemmas 23

II. Kapitel. **Gruppen.**

§ 1. Elementare Gruppentheorie 24
§ 2. Die symmetrische und die alternierende Gruppe 26
§ 3. Kontinuierliche Gruppen 30
§ 4. Die Matrix-Exponentialfunktion 32
§ 5. Der Infinitesimalring einer linearen Gruppe 34
§ 6. Integration in LIEschen Gruppen 39

III. Kapitel. **Allgemeine Darstellungstheorie.**

§ 1. Begriff der Darstellung. Die vollständige Reduzibilität der Darstellungen endlicher Gruppen. Eindeutigkeit der Zerlegung 43
§ 2. Der Gruppenring und die reguläre Darstellung 49
§ 3. Struktur des Gruppenrings. Vorbereitende Sätze 54
§ 4. Die Struktur des Gruppenrings und das System der Klassen irreduzibler Darstellungen 59
§ 5. Zur Darstellungstheorie der halbeinfachen Algebren 66
§ 6. Normale Darstellungen 68
§ 7. Die Charaktere 69
§ 8. a) Charaktere und Gruppenring 74
b) Darstellungen und Charaktere eines direkten Produkts 76
c) Zusammenhang der Charaktere mit denen einer Untergruppe . . . 77
d) Weitere Formeln für die Charaktere; ihre Berechnung auf algebraischem Wege 79
§ 9. Die infinitesimalen Transformationen der Darstellungen kontinuierlicher Gruppen 80
§ 10. Die adjungierte Darstellung 82
§ 11. Die Charaktere der kontinuierlichen Gruppen 83
§ 12. Gruppen mit Normalteiler vom Index 2 86

IV. Kapitel. **Die Darstellungen der symmetrischen Gruppen.**

§ 1. Die Tableaux 92
§ 2. Hilfssätze über die Tableaux 94
§ 3. Die irreduziblen Darstellungen 97
§ 4. Die Standard-Tableaux. Volle Reduktion des Gruppenrings 99
§ 5. Berechnung der Matrizen einer irreduziblen Darstellung 102
§ 6. Beweis der Sätze 4.2 und 4.3 108

V. Kapitel. **Die Darstellungen der vollen linearen, unimodularen und unitären Gruppen.**

§ 1. Vorbemerkungen 112
§ 2. Das KRONECKER-Quadrat und die symmetrischen und schiefsymmetrischen Tensoren zweiter Stufe 113
§ 3. Der Raum der Tensoren ν-ter Stufe und die Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}_n$ vom Polynomgrad ν 116
§ 4. Die Symmetrieklassen im Tensorraum 124
§ 5. Die Tableaux und die ganzrationalen Darstellungen der vollen linearen Gruppe 130
§ 6. Der Verzweigungssatz 143
§ 7. Ganzrationale Darstellungen der reellen linearen, unimodularen und unitären Gruppen 147
§ 8. Rationale und semirationale Darstellungen 149
§ 9. Die unzerfällbaren Darstellungen der additiven Gruppe der reellen Zahlen 154
§ 10. Die stetigen Darstellungen der vollen und reellen linearen, der unimodularen und unitären Gruppen 157

VI. Kapitel. **Charaktere der linearen und der Permutationsgruppen. Die alternierende Gruppe.**

§ 1. Die Charakteristiken und die Darstellungsgrade der ganzrationalen Darstellungen der vollen linearen Gruppe 164
§ 2. Zusammenhang zwischen den Charakteren der symmetrischen Gruppe und den Charakteristiken der vollen linearen Gruppe 167
§ 3. Zur Berechnung der Charaktere der symmetrischen Gruppe. Übersicht über die Darstellungen der alternierenden Gruppe 171
§ 4. Noch eine Formel zur Berechnung der Charaktere von $\mathfrak{S}_\nu$ 176
§ 5. Analyse von KRONECKER-Produkten bei der symmetrischen und bei der vollen linearen Gruppe 179
§ 6. Die Charaktere der alternierenden Gruppe 183

VII. Kapitel. **Charaktere und eindeutige Darstellungen der Drehgruppe.**

§ 1. Zusammenhangsverhältnisse der Drehgruppe 190
§ 2. Das Toroid $\mathfrak{T}_p$ 197
§ 3. Das STIEFELsche Diagramm 198
§ 4. Die Gruppe Ψ 201
§ 5. Die Fundamentalbereiche der Gruppe Ψ 204
§ 6. Die Eigenwerte der Darstellungen 207
§ 7. Die Eigenwerte der adjungierten Darstellung 209
§ 8. Das Integral über eine Klassenfunktion 211
§ 9. Invariante und alternierende Polynome und Elementarsummen 215
§ 10. Das System der einfachen Charaktere 219
§ 11. Der Darstellungsgrad 223
§ 12. Der Verzweigungssatz 224
§ 13. Anwendung auf die niedersten Dimensionszahlen 228
§ 14. Die Fundamentaldarstellungen 229
§ 15. Die volle orthogonale Gruppe 234

VIII. Kapitel. **Spindarstellungen, Infinitesimalring, gewöhnliche Drehgruppe.**

§ 1. Der Infinitesimalring der Drehgruppe 237
§ 2. CLIFFORDs Algebra und ihr Zusammenhang mit den infinitesimalen Drehungen 238

§ 3. Darstellungstheorie der CLIFFORDschen Algebra 240
§ 4. Die Spindarstellungen des Infinitesimalrings der Drehgruppe 243
§ 5. Die Spindarstellungen der Drehgruppe 245
§ 6. Die gewöhnliche Drehgruppe $\mathfrak{d}_3$ 252
§ 7. Die Formel von CLEBSCH-GORDAN 254
§ 8. Struktur des Infinitesimalrings und Gewichte der Darstellungen 255
§ 9. Weitere KRONECKER-Produkte. Algebra von KEMMER und DE BROGLIE 260

IX. Kapitel. **Die LORENTZ-Gruppe.**

§ 1. Die vier Stücke der LORENTZ-Gruppe 264
§ 2. Die Fundamentaldarstellungen der LORENTZ-Gruppe $\mathfrak{L}_{n,t}$ 269
§ 3. Die gewöhnliche eigentliche LORENTZ-Gruppe $\mathfrak{l}_{4,1}$ und ihr Zusammenhang mit der unimodularen Gruppe $\mathfrak{g}_2$ 272
§ 4. Die Darstellungen der vollen LORENTZ-Gruppe $\mathfrak{L}_{4,1}$ 275

Literaturverzeichnis 278
Namen- und Sachverzeichnis 283