

# Statik und Dynamik der Schalen

Von

**Dr.-Ing. Wilhelm Flügge**

Professor of Engineering Mechanics  
Stanford University

Zweite, neubearbeitete Auflage

Mit 121 Abbildungen



**Springer-Verlag**  
Berlin/Göttingen/Heidelberg  
1957

ISBN 978-3-642-52729-6      ISBN 978-3-642-52728-9 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-642-52728-9

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten  
Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet  
dieses Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege  
(Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen  
Copyright 1934 by Springer-Verlag OHG., Berlin  
© by Springer-Verlag OHG., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1957  
Softcover reprint of the hardcover 2nd edition 1957

## Vorwort zur zweiten Auflage

Als dieses Buch erschien, war es das einzige „Schalenbuch“ und hat sich als solches rasch viele Freunde erworben. Als die erste Auflage gegen Kriegsende vergriffen war, wurde wegen der allgemeinen Notlage ein unveränderter Neudruck als ein Notbehelf in Aussicht genommen, aber wegen der sich schnell verschlechternden Wirtschaftsverhältnisse nicht mehr ausgeführt. Eine Überprüfung der Lage nach Kriegsende zeigte, daß eine Neubearbeitung an vielen Stellen nötig geworden war, um dem Fortschritt der Schalentheorie Rechnung zu tragen. Die Durchführung dieser Neubearbeitung verzögerte sich wiederholt, zunächst wegen der allgemeinen Lage in Deutschland, dann, weil der Verfasser inzwischen in einen Wirkungskreis eingetreten war, der seine ungeteilte Aufmerksamkeit verlangte. Als es endlich möglich wurde, dem Plane ernsthaft näherzutreten, war die Versuchung groß, durch Einfügung neuen Materials den Umfang des Buches anschwellen zu lassen, nach R. W. POHL das sicherste Anzeichen für das Altern eines Buches. Der Verfasser hat dieser Versuchung nach Kräften widerstanden und sich bemüht, durch Fortlassen weniger wichtigen Materials den Umfang einigermaßen in den alten Grenzen zu halten. In Zielsetzung und allgemeiner Anlage ist das Buch das alte geblieben, noch immer ein lebendiges Stück des alten Göttingen, in dem es einst entstanden ist.

Viele Fachgenossen aus aller Welt haben durch Zuschriften und mündliche Mitteilungen dazu beigetragen, Form und Inhalt des Buches in der Neuauflage zu verbessern. Es ist dem Verfasser eine angenehme Pflicht, ihnen allen für ihre Hinweise und Vorschläge zu danken. Dem Verlage gebührt auch diesmal Dank für die gewohnt gute Ausstattung des Buches. Ganz besonderen Dank schuldet der Verfasser Herrn Dr. JULIUS SPRINGER dafür, daß er nie müde wurde, an die Notwendigkeit einer Neuauflage des Buches zu erinnern. Ohne seine Bemühungen hätte das Schalenbuch noch ein paar Jahre auf sich warten lassen.

Los Altos, Calif., im Juni 1957

**Wilh. Flüge**

## Aus dem Vorwort der ersten Auflage

Im Laufe der letzten Jahrzehnte ist die Technik nacheinander auf verschiedenen Gebieten vor Fragen gestellt worden, die dem in diesem Buche behandelten Stoffkreise angehören, und ihre glückliche Lösung hat gelegentlich zu einem epochemachenden Fortschritt der konstruktiven Gestaltung geführt. Als besonders in die Augen springende Beispiele seien genannt der Behälterbau, die Formgebung der unstarren Luftschiffe, verschiedene Fragen des Turbinen- und Dampfmaschinenbaues, die weittragenden Dachkonstruktionen aus Eisenbeton und neuerdings die eben erst aktuell gewordenen Fragen des Flugzeugbaues (Schalenrümpfe usw.). Mit der Lösung dieser Fragen befaßt sich ein doppelter Kreis von Fachgenossen und dementsprechend hat sich auch dies Buch an einen Leserkreis von zweierlei Art zu wenden, an den entwerfenden Ingenieur, der sich für die Ergebnisse der Schalentheorie interessiert und ihre Darstellung in einer Form fordern muß, die ihm die unmittelbare Anwendung zur Lösung seiner konkreten Aufgaben ermöglicht, und an den Forscher auf dem Fachgebiete der technischen Mechanik, dessen Aufgabe es ist, unser Wissen auf diesem Gebiet weiter zu treiben und für neue, kompliziertere Fragen neue Lösungen zu finden. Ihn interessiert nicht nur der Bestand des Vorhandenen, sondern auch die Methodik, durch die es gewonnen wurde, und der Ausblick auf Möglichkeiten der Weiterentwicklung.

Diesem doppelten Leserkreis entspricht das Buch, indem es einerseits jede Rechnung, soweit es irgend mit dem gesteckten Umfange vereinbar ist, bis zum letzten Ziel durchführt, bis zur Gewinnung und anschaulich-bildlichen Darstellung zahlenmäßiger Ergebnisse, und indem es andererseits auch vor schwierigen mathematischen Entwicklungen *dann* nicht zurückschreckt, wenn dies schärfste Werkzeug technischer Wissenschaft zur Erreichung des Zieles unbedingt notwendig ist. Dagegen ist es bewußt vermieden worden, solchen Fragen nachzugehen, deren Interesse ausschließlich im Spekulativen liegt, ohne daß die derzeitige oder zukünftige Anwendung auf ein technisches Ziel gegeben wäre, während es andererseits ebenso unterbleiben konnte, das Einsetzen von Zahlenwerten in die gebotenen Formeln in extenso vorzuführen.

Der Mannigfaltigkeit der angeführten Fragestellungen entspricht eine fast noch größere Mannigfaltigkeit der Originalliteratur, die in ihren mechanischen Voraussetzungen, in der Verständlichkeit und Güte der Darstellung, in dem Maße der Verwendung mathematischer Hilfsmittel, in dem Grade der Durchführung der Rechnungen und in den benutzten Symbolen für die fundamentalen Größen ein außerordentlich buntes Bild bietet. Dazu kommt als weiterer Übelstand, daß manche — und darunter einige der wertvollsten Arbeiten — an schwer zugänglicher und schwer auffindbarer Stelle erschienen sind. Hier Abhilfe zu schaffen und das reiche vorhandene Material in einheitlicher und bequemer Form für Forschung und Praxis zugänglich zu machen, ist nachgerade ein dringendes Bedürfnis geworden. Wie es sich bei einer solchen Systematisierung eines großen, vielgestaltigen Stoffgebietes ganz von selbst ergibt, sind bei dieser Gelegenheit auch manche noch bestehende Lücken geschlossen worden. Wo sie liegen, zeigen am deutlichsten die Stellen geringster Dichte im Literaturverzeichnis.

Heiligenhafen, im August 1934

**Wilh. Flügge**

# Inhaltsverzeichnis

	Seite
I. Allgemeine Grundlagen . . . . .	1
1. Einführung . . . . .	1
2. Membranspannungszustand . . . . .	5
3. Transformation der Längskräfte . . . . .	7
4. Längskrafttransformation in schiefwinkligen Koordinaten . . . . .	10
5. Transformation der Momente . . . . .	13
6. Theorie der Beanspruchung von Stahlbetonschalen . . . . .	14
II. Membrantheorie der Rotationsschalen . . . . .	22
1. Allgemeines . . . . .	22
2. Drehsymmetrische Belastung . . . . .	26
a) Differentialgleichungen . . . . .	26
b) Lösung für verschiedene Schalenformen . . . . .	26
3. Fragen der Formgebung . . . . .	36
a) Kuppel gleicher Festigkeit . . . . .	36
b) Tropfenbehälter . . . . .	39
4. Unsymmetrische Belastung . . . . .	43
a) FOURIER-Ansatz . . . . .	43
b) Kugelschale . . . . .	45
$\alpha$ ) Inhomogene Lösung . . . . .	46
$\beta$ ) Homogene Lösung . . . . .	49
$\gamma$ ) Apsidenkuppel . . . . .	51
c) Lösung für Schalen beliebiger Form . . . . .	54
d) Kegelschale . . . . .	58
e) Einschaliges Hyperboloid . . . . .	59
f) Lösung durch konforme Abbildung . . . . .	65
5. Formänderungen . . . . .	70
a) Differentialgleichungen für die Verschiebungen . . . . .	70
b) Dehnungslose Verformungen . . . . .	74
c) Lösung der inhomogenen Gleichungen . . . . .	77
d) Geschlossene Lösung für die Kugelschale . . . . .	79
e) Drehsymmetrische Verformung . . . . .	79
f) Ringschalen . . . . .	81
6. Formänderungsarbeit . . . . .	82
7. Statisch unbestimmte Systeme . . . . .	85

## Inhaltsverzeichnis

	VII Seite
III. Membrantheorie der Zylinderschalen . . . . .	89
1. Rohre und Tonnendächer . . . . .	89
2. Formänderungen . . . . .	96
3. Statisch unbestimmte Zylinderschalen . . . . .	98
4. Vieleckkuppeln . . . . .	100
IV. Membrantheorie für beliebige Schalenformen . . . . .	111
1. Gleichgewichtsbedingungen für eine Schale beliebiger Form . . . . .	111
2. Elliptisches Paraboloid . . . . .	114
3. Hyperbolisches Paraboloid . . . . .	117
a) Ränder längs der Erzeugenden . . . . .	117
b) Ränder längs der Hauptkrümmungslinien . . . . .	120
4. Konoidschale . . . . .	127
5. Der Spannungszustand affiner Schalen . . . . .	131
a) Allgemeine Theorie . . . . .	131
b) Kuppeln . . . . .	134
$\alpha$ ) Lotrechte Verzerrung von Rotationsschalen . . . . .	134
$\beta$ ) Waagerechte Verzerrung von Rotationsschalen . . . . .	135
$\gamma$ ) Vieleckkuppeln . . . . .	138
c) Behälterschalen . . . . .	139
d) Gewölbe . . . . .	139
V. Biegetheorie der Kreiszylinderschale . . . . .	141
1. Die Differentialgleichungen der Zylindertheorie . . . . .	141
2. Lösung für die an den Rändern $x = \text{const}$ belastete Zylinderschale . . . . .	151
3. Theorie der Tonnendächer . . . . .	156
4. Behältertheorie . . . . .	164
VI. Biegetheorie der Drehschalen . . . . .	172
1. Differentialgleichungen . . . . .	172
a) Gleichgewichtsbedingungen . . . . .	172
b) Elastizitätsgesetz . . . . .	174
c) Differentialgleichungen für drehsymmetrische Randlasten . . . . .	177
2. Kugelschale konstanter Wandstärke . . . . .	180
a) Strenge Lösung . . . . .	180
b) Näherungslösung für dünne Schalen . . . . .	182
c) Lösung durch numerische Integration . . . . .	185
d) Einzelkräfte und kleine Ausschnitte . . . . .	187
3. Schale mit beliebiger Meridianform und veränderlicher Wandstärke . . . . .	189
a) Strenge Lösung . . . . .	189
b) Näherungslösung für dünne Schalen . . . . .	191
4. Kegelschale . . . . .	196
a) Kegelschale konstanter Wandstärke . . . . .	196
b) Kegelschale mit linear veränderlicher Wandstärke . . . . .	201
VII. Theorie der Falwerke . . . . .	203
1. Membrantheorie . . . . .	203
2. Biegetheorie . . . . .	207

	Seite
VIII. Die Stabilität der Schalen . . . . .	214
1. Grundlagen der Theorie der Schalenknickung . . . . .	214
2. Stabilität der Kreiszyinderschale . . . . .	219
a) Differentialgleichungen für gleichmäßig verteilte Grundspannungen	219
b) Lösung für zweiachsigen Druck . . . . .	225
c) Lösung für reinen Schub . . . . .	237
d) Lösung für kombinierten Schub und Längsdruck . . . . .	241
$\alpha$ ) Allgemeine Lösung . . . . .	241
$\beta$ ) Knickbedingung für kurze Zylinder . . . . .	245
e) Ursachen eines Biegungsbruches vor Erreichen der Knicklast .	247
3. Stabilität der Kugelschale . . . . .	256
IX. Schwingungen drehsymmetrischer Schalen . . . . .	263
1. Dehnungslose Schwingungen . . . . .	263
2. Vollständige Schwingungstheorie für die Kreiszyinderschale . . .	268
Literaturübersicht . . . . .	273
Sachverzeichnis . . . . .	284