

Die Berechnung der Zylinderschalen

Die Berechnung der Zylinderschalen

Von

Dr.-Ing. A. Aas-Jakobsen

Oslo

Mit 30 Abbildungen



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1958

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen,
vorbehalten

Ohne ausdrückliche Genehmigung des Verlages ist es auch nicht gestattet,
dieses Buch oder Teile daraus auf photomechanischem Wege
(Photokopie, Mikrokopie) zu vervielfältigen

ISBN 978-3-642-52629-9 ISBN 978-3-642-52628-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-52628-2

© by Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1958

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag OHG., Berlin/Göttingen/Heidelberg 1958
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1958

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw.
in diesem Buche berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der
Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-
Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt
werden dürften

Vorwort

Die Grundlage der Schalenberechnung ist die mathematische Elastizitätstheorie, in der dem Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation eine mathematische Formulierung gegeben wird. Die Spannungs-Dehnungsgesetze geben die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, d. h. die partiellen Differentialgleichungen, deren Integration die Deformationen und die Schnittgrößen vermittelt.

Die Hauptaufgaben der Elastizitätstheorie sind somit die Aufstellung der Grundgleichungen und die Integration der dazugehörigen partiellen Differentialgleichungen.

Die erste Aufgabe ist für ein Idealmaterial zu lösen, das dem Hooke'schen Gesetz folgt. Selbst wenn sich auch nicht annähernd sagen läßt, daß das Hauptmaterial der Schalenkonstruktionen — der Beton — dem Hooke'schen Gesetz folgt, haben Versuche ergeben, daß dies von geringer Bedeutung ist. Eine Betonkonstruktion bekommt sowohl Deformationen als Schnittgrößen in guter Übereinstimmung mit der entsprechenden Konstruktion aus dem Idealmaterial, was sich auch theoretisch nachweisen läßt.

Die zweite Hauptaufgabe der Schalentheorie — die Integration der partiellen Differentialgleichungen — ist noch schwieriger als die erste, die Aufstellung. Die Integration kann aber in ähnlicher Weise wie die Aufstellung der Differentialgleichung durchgeführt werden: Statt das vorliegende Integrationsproblem zu lösen, wird ein anderes gewählt, bei dem die idealisierten Randbedingungen und Belastungen eine einfache Lösung gestatten.

Die Berechnung wird — mit anderen Worten — für eine Schale durchgeführt, die aus einem Idealmaterial besteht und idealisierte Randbedingung und Belastung hat, um eine Integration zu ermöglichen. Diese Schale wird als „Modellschale“ bezeichnet und wird so gewählt, daß sie annähernd dieselbe Spannungsverteilung wie die wirkliche Schale erhält, und übrig bleibt dann, mit einfachen Gleichgewichtsbedingungen lediglich noch die Bestimmung der Größe von Spannungen und Deformationen.

Es soll hier die Berechnung von Tonnendächern und Behältern behandelt werden. Wenn auch großes Gewicht darauf gelegt ist, die mathematischen Grundlagen zu entwickeln und klarzustellen, so ist

der Leitgedanke der gewesen, zu einfachen Formeln und Zahlentafeln zu gelangen, die die Übersicht erleichtern und die Rechenarbeit vermindern. Überall sind Rechenbeispiele mit berücksichtigt, um den Leser mit dem Gebrauch der Formeln und der Tafeln vertraut zu machen, während die Beispiele den Einfluß der verschiedenen Faktoren gleichzeitig am besten veranschaulichen.

Die Berechnung von Zahlentafeln sowie die Kontrolle der Gleichungen und Zahlenbeispiele wurden von Ziv.-Ing. J. P. HAUKENES, B. TORGERSRUD und H. AAS, die Zeichnungen und das Manuskript von Frau VIDNES ausgeführt. Ich benutze die Gelegenheit auch hier meinen besten Dank auszusprechen.

Schließlich bin ich auch dem Verlag zu Dank verpflichtet für die ausgezeichnete Ausstattung des Buches und die wertvolle Hilfe bei sprachlichen Schwierigkeiten.

Oslo, im September 1958

Aas-Jakobsen

Inhaltsverzeichnis

	Seite
Verzeichnis der Zahlentafeln	IX
Bezeichnungen und Parameter	X
1. Grundlagen der Schalentheorie	1
1.1 Geschichtliche Übersicht	1
1.2 Biegetheorie der isotropen Kreiszyinderschalen	2
1.3 Biegetheorie der Kreiszyinderschalen mit symmetrischen Ringrippen	9
1.4 Biegetheorie der Kreiszyinderschalen mit Ringrippen unterhalb oder oberhalb der Schale	11
2. Flächenlasten. Membrantheorie	13
2.1 Geschichtliche Übersicht	13
2.2 Das frei aufliegende Kreiszyinderrohr	14
2.3 Die Membrantheorie	17
3. Isotrope Schalen mit Belastung am Längsrand	22
3.1 Geschichtliche Übersicht	22
3.2 Die charakteristische Gleichung	25
3.3 Die Integrationskonstanten und die Multiplikatoren	32
3.4 Die Lösungsfunktionen und die Verteilungsfunktionen für die Ringrichtung	38
3.5 Zahlentafeln für die Verteilungsfunktionen	40
4. Ringrippenschalen mit Belastung am Längsrand	58
4.1 Geschichtliche Übersicht	58
4.2 Schalen mit symmetrischen Ringrippen	58
4.3 Schalen mit exzentrischen Ringrippen	77
5. Schalen mit veränderlichem Halbmesser und veränderlicher Schalenstärke	82
5.1 Geschichtliche Übersicht	82
5.2 Vereinfachte Berechnungsgrundlage	82
5.3 Das Differenzenverfahren	86
6. Berechnungsmethoden für Tonnendächer	89
6.1 Geschichtliche Übersicht	89
6.2 Schalenberechnung nach der mathematischen Elastizitätstheorie	91
6.3 Allgemeine Balkentheorie, Modellschale	93
6.4 Tonnenreihe mit Randbalken ohne Biegesteifigkeit	97
6.5 Tonnenreihe mit biegesteifen Randbalken	104
6.6 Einzeltonnen oder Außenrand der Paralleltonnen	108
6.7 Der Einfluß des Sekundärantes und der Membrandeformationen	112
6.8 Streifenlasten $P = \sin \lambda \xi$ senkrecht zur Schalenfläche	113

	Seite
7. Trajektorienbewehrung, Binderberechnung	114
7.1 Geschichtliche Übersicht	114
7.2 Die Trajektorienbewehrung	115
7.3 Binderberechnung	118
8. Stabilität, Ring- und Längsmomente	121
8.1 Geschichtliche Übersicht	121
8.2 Eigenwerte des Ringknickens	121
8.3 Eigenwerte des Axialknickens	126
8.4 Bemessung der Schalendruckzone, Ring- und Längsmomente	130
9. Das vorgespannte Tonnendach	132
9.1 Geschichtliche Übersicht	132
9.2 Berechnungsgrundlagen	132
9.3 Vorgespannte Reihentonnen	135
9.4 Vorgespannte Einzeltonne mit frei aufliegenden Randbalken	138
10. Belastung am Ringrand $x = 0$	139
10.1 Geschichtliche Übersicht	139
10.2 Die Lösungsfunktion	140
10.3 Schnittgrößen und Verschiebungen	143
10.4 Verteilungsfunktionen	147
11. Literaturverzeichnis	148
Sachverzeichnis	160

Verzeichnis der Zahlentafeln

		Seite
I 1	Schnittgrößen und Verschiebungen eines isotropen Rohres für die Flächenlasten Z und Y	15
I 2	Schnittkräfte eines elliptischen Rohres für 0,3 atü Überdruck	22
II 1	Wurzelquadrate und Wurzeln einer beliebigen isotropen Schale	31
II 2	Multiplikatoren und Integrationskonstanten für Verschiebungen und Schnittgrößen der isotropen Schale	36
II 3	Multiplikatoren für $\omega = \kappa = 0$ und $\omega = 0, \kappa > 0$	36
II 4	Multiplikatoren der Integrationskonstanten für vier Schalen	37
II 5	Multiplikatoren der Integrationskonstanten für eine beliebige isotrope Schale	39
II 6	Lösungsfunktionen für vier Schalen	40
II 7	Lösungsfunktionen für eine beliebige isotrope Schale	41
II 8	Integrationskonstanten für drei Schalen	42
II 9	Verteilungsfunktionen für drei Schalen mit $m_\varphi = 0$	43
II 10	Verteilungsfunktionen einer beliebigen isotropen Schale mit $m_\varphi = 1$	44
III	Isotrope Modellschale, $m_\varphi = 0$	45
III 1—12	Isotrope Modellschale, Verteilungsfunktionen für freien Rand	46
IV	Isotrope Modellschale, $\vartheta_\varphi = 0$	52
IV 1—12	Isotrope Modellschale, Verteilungsfunktionen für eingespannten Rand	52
V 1	Lösungsfunktionen der Modellschale mit Ringrippen	61
V 2	Multiplikatoren der Integrationskonstanten für Schalen mit Ringrippen	62
V 3	Multiplikatoren der Integrationskonstanten für die Modellschale mit Ringrippen	62
VI	Modellschale mit Ringrippen, $m_\varphi = 0$	64
VI 1—12	Modellschale mit Ringrippen, Verteilungsfunktionen für freien Rand	65
VII	Modellschale mit symmetrischen Ringrippen, Randwerte für eingespannten Rand	71
VII 1—12	Modellschale mit Ringrippen, Verteilungsfunktionen für eingespannten Rand	71
VIII 1	Multiplikatoren der Integrationskonstanten bei Schalen mit Ringrippen unterhalb der Schale	80
VIII 2	Grundbelastungssysteme und Randwerte für Schalen mit exzentrischen Ringrippen	80
VIII 3—7	Ringverteilung für exzentrische Ringrippen	81
IX	Längsverteilung	92
X 1	Erste Näherung für die Multiplikatoren der Integrationskonstanten bei Belastung am Ringrand einer isotropen Schale	146
X 2	Multiplikatoren der Integrationskonstanten für Belastung am Ringrand einer isotropen Schale	146

Bezeichnungen und Parameter

0.1 Abmessungen und elastische Verschiebungen

Die Bezeichnungen für die Schalenabmessungen und Verschiebungen sind:

h	Schalenstärke
l	Spannweite in der Längsrichtung
r	Halbmesser des Kreiszyinders oder Scheitelhalbmesser bei Schalen mit veränderlichem Halbmesser
R	Veränderlicher Halbmesser
φ	Winkel gemessen vom Längsrand
φ_0	Randwinkel für den Längsrand
ψ	Winkel gemessen vom Schalenscheitel
x, s, z	Linkshandkoordinaten
$x = \xi r$	
$s = \varphi r$	
u, v, w	Elastische Verschiebungen in den drei Achsenrichtungen
$\partial_\varphi, \partial_x$	Winkeländerung in der Ring- und Längsrichtung

Die Randbalken in der Längsrichtung haben:

h_0	Höhe des Randbalkens
$2F_0$	Querschnitt des Randbalkens
$2Q_0$	Belastung des Randbalkens
$2J_0$	Steifigkeit des Randbalkens
$2L$	Abstand zwischen den Randbalken (Bogenspannweite)

Die Rippen in der Ringrichtung haben:

a_φ	Abstand zwischen den Ringrippen
b_φ	Ringrippenbreite
h_φ	Ringrippenhöhe

0.2 Die Schalenparameter

Eine isotrope Schale ist durch ihre Abmessungen h , l , L und r gegeben. Aus den Abmessungen werden dimensionslose Parameter gebildet, die zur Vereinfachung der Schreibweise und der Berechnung dienen

$$\begin{aligned}F &= E h/r(1 - \nu^2) \\E &\text{ Elastizitätsmodul} \\ \nu &\text{ Querszahl} \\ J &= E h^3/12r^3(1 - \nu^2) \\ \lambda &= \pi r/l \\ \varrho &= \sqrt[8]{(1 - \nu^2) \lambda^4 \cdot F/J} = 2,42 \sqrt{r/l} \sqrt[4]{r/h} \\ \kappa &= \lambda^2/\varrho^2 \\ \omega &= 1/\varrho^2\end{aligned}$$

$$k = h^2/12r^2 = J/F$$

$$k_1 = h^2/12r^2(1 - \nu^2)$$

$$\varepsilon = \varrho \varphi$$

$$\varepsilon_0 = \varrho \varphi_0$$

Die Ringrippenschalen haben

$$F_\varphi = E(a_\varphi h + b_\varphi h_\varphi)/(a_\varphi + b_\varphi) r(1 - \nu^2)$$

$$f_\varphi = F/F_\varphi$$

$$i_\varphi = J/J_\varphi$$

$$\varrho_\varphi = \varrho \sqrt{i_\varphi}$$

$$\nu_\varphi = (1 - \nu f_\varphi)/(1 - \nu)$$

$$k_\varphi = J_\varphi/F$$

$e_\varphi r$ Schwerpunktsabstand von der Mittelfläche

Ringrippen symmetrisch um die Mittelfläche der Schale haben $e_\varphi = 0$ und

$$J_\varphi = E(a_\varphi h^3 + b_\varphi h_\varphi^3)/12(a_\varphi + b_\varphi) r^3(1 - \nu^2)$$

Ringrippen unterhalb oder oberhalb der Schale haben

$$e_\varphi = b_\varphi h_\varphi(h_\varphi - h)/2(a_\varphi h + b_\varphi h_\varphi) r$$

$$J_\varphi = E[(a_\varphi h^3 + b_\varphi h_\varphi^3)/3 - (a_\varphi h^2 + b_\varphi h_\varphi^2)^2/4(a_\varphi h + b_\varphi h_\varphi)]/(a_\varphi + b_\varphi) r^3(1 - \nu^2)$$

Die Randbalken in der Längsrichtung haben

$$J_0 = E F_0 h_0^2/12r^4.$$

Die kontinuierlichen Schalen haben

$$\varrho_k = 1,2\varrho \text{ bzw. } \varrho_k = 1,2\varrho_\varphi.$$

0.3 Die Schnittgrößen

Die deutschen Bezeichnungen für die Ring- und Längskräfte N_φ und N_x sowohl als für die Ring- und Längsmomente M_φ und M_x sind heute auch in der englischen und amerikanischen Schalenliteratur die üblichen. Sie werden deshalb auch hier verwendet. An Stelle der Doppelindexbezeichnung der Schubkräfte $N_{\varphi x}$ und $N_{x\varphi}$ wird S_φ und S_x eingeführt. Analog wird M_t für die Drillmomente anstatt $M_{\varphi x}$ und $M_{x\varphi}$ benutzt. Die Schnittgrößen je Längeneinheit der Schale werden somit

N_φ Längskraft in der φ -Richtung

N_x Längskraft in der x -Richtung

S_φ Schubkraft im Schnitt $\varphi = \text{konst.}$

S_x Schubkraft im Schnitt $x = \text{konst.}$

Q_φ Querkraft im Schnitt $\varphi = \text{konst.}$

Q_x Querkraft im Schnitt $x = \text{konst.}$

R_φ Resultierende Querkraft aus Q_φ und M_t

M_φ Ringmoment

M_x Längsmoment

M_t Drillmoment

S Zug im Randbalken

Die Schnittkräfte greifen in den Schwerpunktslinien an — auch bei Schalen mit exzentrischen Ringrippen.

0.4 Differentialquotienten und Lösungsfunktionen

Die Schreibweise der partiellen Differentialquotienten scheint ihre endgültige Form noch nicht gefunden zu haben. So werden $\partial f/\partial\varphi$, f' , f° , f_φ und f_{10} als Bezeich-

XII

Bezeichnungen und Parameter

nung für die Ableitung in der Ringrichtung benutzt. Die letztere ist vorzuziehen und wird hier benutzt. Die Ableitungen sind entsprechend

$$\begin{aligned} \partial f / \partial \varphi &= f_{10} & \partial^2 f / \partial \varphi^2 &= f_{20} \dots \\ \partial f / \partial \xi &= f_{01} & \partial^2 f / \partial \xi^2 &= f_{02} \dots \\ \partial^2 f / \partial \varphi \partial \xi &= f_{11} & \partial^3 f / \partial \varphi^2 \partial \xi &= f_{21} \dots \\ \dots & & & \\ \Delta f &= f_{20} + f_{02} \\ \Delta^2 f &= \Delta \Delta f = f_{40} + 2f_{22} + f_{04} \\ (\Delta + 1) f &= f_{20} + f_{02} + f \\ \dots & & & \\ \dots & & & \end{aligned}$$

Die Belastung am Längsrand hat

$$\begin{aligned} w &= \sin \lambda \xi \cdot W \\ W &\text{ Lösungsfunktion} \\ W &= e^{m \varphi} \\ m &\text{ Wurzel der charakteristischen Gleichung} \\ m_{1,2} &= \alpha \pm i \beta \\ m_{3,4} &= \gamma \pm i \delta \\ W &= A W_A + B W_B + C W_C + D W_D \\ A, B, C, D &\text{ Integrationskonstanten} \\ W_A &= e^{\alpha \varepsilon} \cos \beta \varepsilon & W_B &= e^{\alpha \varepsilon} \sin \beta \varepsilon \\ W_C &= e^{\gamma \varepsilon} \cos \delta \varepsilon & W_D &= e^{\gamma \varepsilon} \sin \delta \varepsilon \\ \varepsilon &= \varphi \varrho \text{ bzw. } \varphi \varrho \varphi \end{aligned}$$

Die Schnittgrößen haben die Form

$$\begin{aligned} N &= \sin \lambda \xi \cdot M \cdot n_r, \text{ bzw. } \cos \lambda \xi \cdot M \cdot n_r \\ M &\text{ expliziten Multiplikator} \\ n_r &\text{ Verteilungsfunktion für die Ringrichtung} \\ n_r &= A_n W_A + B_n W_B + C_n W_C + D_n W_D \\ A_n &= a_n A + b_n B, & B_n &= -b_n A + a_n B \\ C_n &= c_n C + d_n D, & D_n &= c_n D - d_n C \\ a_n, b_n, c_n, d_n &\text{ Multiplikatoren der Integrationskonstanten} \end{aligned}$$

Belastungen am Längsrand sind durch die Verteilungsfunktionen m_φ , r_φ , n_φ , s_φ und n_x gegeben, wobei

$$\begin{aligned} M_\varphi &= \sin \lambda \xi \cdot r m_\varphi \\ R_\varphi &= \sin \lambda \xi \cdot \varrho r_\varphi \\ N_\varphi &= \sin \lambda \xi \cdot \varrho^2 n_\varphi \\ S_\varphi &= \cos \lambda \xi \cdot \varrho^3 s_\varphi / \lambda \\ N_x &= \sin \lambda \xi \cdot \varrho^4 n_x / \lambda^2 \end{aligned}$$

Die Belastung am Ringrand hat

$$\begin{aligned} w &= \sin n \varphi \cdot X \\ n &\text{ wird aus den Randbedingungen bestimmt} \\ X &\text{ Lösungsfunktion} \\ X &= e^{m \xi} \\ m &\text{ Wurzel der charakteristischen Gleichung} \\ m_{1,2} &= \alpha \pm i \beta, & m_{3,4} &= \gamma \pm i \delta \\ \eta &= 2n \sqrt{k_1} \end{aligned}$$