Die Berechnung der Zylinderschalen

Die Berechnung der Zylinderschalen

Von

Dr.-Ing. A. Aas-Jakobsen
Oslo

Mit 30 Abbildungen

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1958

ISBN 978-3-642-52629-9 ISBN 978-3-642-52628-2 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-52628-2

Ursprünglich erschienen bei Springer-Verlag OHG., Berlin/Gottingen/Heidelberg 1958
Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1958

Vorwort

Die Grundlage der Schalenberechnung ist die mathematische Elastizitätstheorie, in der dem Zusammenhang zwischen Spannung und Deformation eine mathematische Formulierung gegeben wird. Die Spannungs-Dehnungsgesetze geben die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie, d. h. die partiellen Differentialgleichungen, deren Integration die Deformationen und die Schnittgrößen vermittelt.

Die Hauptaufgaben der Elastizitätstheorie sind somit die Aufstellung der Grundgleichungen und die Integration der dazugehörigen partiellen Differentialgleichungen.

Die erste Aufgabe ist für ein Idealmaterial zu lösen, das dem HOOKEschen Gesetz folgt. Selbst wenn sich auch nicht annähernd sagen läßt, daß das Hauptmaterial der Schalenkonstruktionen — der Beton — dem HOOKEschen Gesetz folgt, haben Versuche ergeben, daß dies von geringer Bedeutung ist. Eine Betonkonstruktion bekommt sowohl Deformationen als Schnittgrößen in guter Übereinstimmung mit der entsprechenden Konstruktion aus dem Idealmaterial, was sich auch theoretisch nachweisen läßt.

Die zweite Hauptaufgabe der Schalentheorie — die Integration der partiellen Differentialgleichungen — ist noch schwieriger als die erste, die Aufstellung. Die Integration kann aber in ähnlicher Weise wie die Aufstellung der Differentialgleichung durchgeführt werden: Statt das vorliegende Integrationsproblem zu lösen, wird ein anderes gewählt, bei dem die idealisierten Randbedingungen und Belastungen eine einfache Lösung gestatten.

Die Berechnung wird — mit anderen Worten — für eine Schale durchgeführt, die aus einem Idealmaterial besteht und idealisierte Randbedingung und Belastung hat, um eine Integration zu ermöglichen. Diese Schale wird als „Modellschale" bezeichnet und wird so gewählt, daß sie annähernd dieselbe Spannungsverteilung wie die wirkliche Schale erhält, und übrig bleibt dann, mit einfachen Gleichgewichtsbedingungen lediglich noch die Bestimmung der Größe von Spannungen und Deformationen.

Es soll hier die Berechnung von Tonnendächern und Behältern behandelt werden. Wenn auch großes Gewicht darauf gelegt ist, die mathematischen Grundlagen zu entwickeln und klarzustellen, so ist der Leitgedanke der gewesen, zu einfachen Formeln und Zahlentafeln zu gelangen, die die Übersicht erleichtern und die Rechenarbeit vermindern. Überall sind Rechenbeispiele mit berücksichtigt, um den Leser mit dem Gebrauch der Formeln und der Tafeln vertraut zu machen, während die Beispiele den Einfluß der verschiedenen Faktoren gleichzeitig am besten veranschaulichen.

Die Berechnung von Zahlentafeln sowie die Kontrolle der Gleichungen und Zahlenbeispiele wurden von Ziv.-Ing. J. P. Haukenes, B. Torgersrud und H. Aas, die Zeichnungen und das Manuskript von Frau Vidnes ausgeführt. Ich benutze die Gelegenheit auch hier meinen besten Dank auszusprechen.

Schließlich bin ich auch dem Verlag zu Dank verpflichtet für die ausgezeichnete Ausstattung des Buches und die wertvolle Hilfe bei sprachlichen Schwierigkeiten.

Oslo, im September 1958

Aas-Jakobsen

Inhaltsverzeichnis

Verzeichnis der Zahlentafeln

Bezeichnungen und Parameter

0.1 Abmessungen und elastische Verschiebungen

Die Bezeichnungen für die Schalenabmessungen und Verschiebungen sind:

h	Schalenstärke
l	Spannweite in der Längsrichtung
r	Halbmesser des Kreiszylinders oder Scheitelhalbmesser bei Schalen mit veränderlichem Halbmesser
R	Veränderlicher Halbmesser
φ	Winkel gemessen vom Längsrand
φ_0	Randwinkel für den Längsrand
ψ	Winkel gemessen vom Schalenscheitel
x, s, z	Linkshandkoordinaten
$x = \xi\, r$	
$s = \varphi\, r$	
u, v, w	Elastische Verschiebungen in den drei Achsenrichtungen
$\vartheta_\varphi, \vartheta_x$	Winkeländerung in der Ring- und Längsrichtung

Die Randbalken in der Längsrichtung haben:

h_0	Höhe des Randbalkens
$2F_0$	Querschnitt des Randbalkens
$2Q_0$	Belastung des Randbalkens
$2J_0$	Steifigkeit des Randbalkens
$2L$	Abstand zwischen den Randbalken (Bogenspannweite)

Die Rippen in der Ringrichtung haben:

a_φ	Abstand zwischen den Ringrippen
b_φ	Ringrippenbreite
h_φ	Ringrippenhöhe

0.2 Die Schalenparameter

Eine isotrope Schale ist durch ihre Abmessungen h, l, L und r gegeben. Aus den Abmessungen werden dimensionslose Parameter gebildet, die zur Vereinfachung der Schreibweise und der Berechnung dienen

$F = E\, h/r(1-\nu^2)$

E Elastizitätsmodul

ν Querzahl

$J = E\, h^3/12 r^3 (1-\nu^2)$

$\lambda = \pi\, r/l$

$\varrho = \sqrt[8]{(1-\nu^2)\,\lambda^4 \cdot F/J} = 2{,}42 \sqrt{r/l}\, \sqrt[4]{r/h}$

$\varkappa = \lambda^2/\varrho^2$

$\omega = 1/\varrho^2$

$k = h^2/12r^2 = J/F$
$k_1 = h^2/12r^2(1-\nu^2)$
$\varepsilon = \varrho\,\varphi$
$\varepsilon_0 = \varrho\,\varphi_0$

Die Ringrippenschalen haben

$F_\varphi = E(a_\varphi h + b_\varphi h_\varphi)/(a_\varphi + b_\varphi)\, r(1-\nu^2)$
$f_\varphi = F/F_\varphi$
$i_\varphi = J/J_\varphi$
$\varrho_\varphi = \varrho \sqrt[8]{i_\varphi}$
$\nu_\varphi = (1-\nu f_\varphi)/(1-\nu)$
$k_\varphi = J_\varphi/F$
$e_\varphi r$ Schwerpunktsabstand von der Mittelfläche

Ringrippen symmetrisch um die Mittelfläche der Schale haben $e_\varphi = 0$ und $J_\varphi = E(a_\varphi h^3 + b_\varphi h_\varphi^3)/12(a_\varphi + b_\varphi)\, r^3(1-\nu^2)$

Ringrippen unterhalb oder oberhalb der Schale haben

$e_\varphi = b_\varphi h_\varphi (h_\varphi - h)/2(a_\varphi h + b_\varphi h_\varphi)\, r$
$J_\varphi = E[(a_\varphi h^3 + b_\varphi h_\varphi^3)/3 - (a_\varphi h^2 + b_\varphi h_\varphi^2)^2/4(a_\varphi h + b_\varphi h_\varphi)]/(a_\varphi + b_\varphi)\, r^3(1-\nu^2)$

Die Randbalken in der Längsrichtung haben

$J_0 = E\,F_0\,h_0^2/12r^4.$

Die kontinuierlichen Schalen haben

$\varrho_k = 1{,}2\varrho$ bzw. $\varrho_k = 1{,}2\varrho_\varphi$.

0.3 Die Schnittgrößen

Die deutschen Bezeichnungen für die Ring- und Längskräfte N_φ und N_x sowohl als für die Ring- und Längsmomente M_φ und M_x sind heute auch in der englischen und amerikanischen Schalenliteratur die üblichen. Sie werden deshalb auch hier verwendet. An Stelle der Doppelindexbezeichnung der Schubkräfte $N_{\varphi x}$ und $N_{x\varphi}$ wird S_φ und S_x eingeführt. Analog wird M_t für die Drillmomente anstatt $M_{\varphi x}$ und $M_{x\varphi}$ benutzt. Die Schnittgrößen je Längeneinheit der Schale werden somit

N_φ Längskraft in der φ-Richtung
N_x Längskraft in der x-Richtung
S_φ Schubkraft im Schnitt φ = konst.
S_x Schubkraft im Schnitt x = konst.
Q_φ Querkraft im Schnitt φ = konst.
Q_x Querkraft im Schnitt x = konst.
R_φ Resultierende Querkraft aus Q_φ und M_t
M_φ Ringmoment
M_x Längsmoment
M_t Drillmoment
S Zug im Randbalken

Die Schnittkräfte greifen in den Schwerpunktslinien an — auch bei Schalen mit exzentrischen Ringrippen.

0.4 Differentialquotienten und Lösungsfunktionen

Die Schreibweise der partiellen Differentialquotienten scheint ihre endgültige Form noch nicht gefunden zu haben. So werden $\partial f/\partial\varphi$, $f^\cdot$, f°, f_φ und f_{10} als Bezeichnung für die Ableitung in der Ringrichtung benutzt. Die letztere ist vorzuziehen und wird hier benutzt. Die Ableitungen sind entsprechend

$\partial f/\partial\varphi = f_{10} \quad \partial^2 f/\partial\varphi^2 = f_{20}\cdots$
$\partial f/\partial\xi = f_{01} \quad \partial^2 f/\partial\xi^2 = f_{02}\cdots$
$\partial^2 f/\partial\varphi\,\partial\xi = f_{11} \quad \partial^3 f/\partial\varphi^2\,\partial\xi = f_{21}\cdots$
$\cdots\cdots\cdots$
$\Delta f = f_{20} + f_{02}$
$\Delta^2 f = \Delta\Delta f = f_{40} + 2 f_{22} + f_{04}$
$(\Delta + 1)\,f = f_{20} + f_{02} + f$
$\cdots\cdots\cdots$
$\cdots\cdots\cdots$

Die Belastung am Längsrand hat
$w = \sin\lambda\,\xi\cdot W$
W Lösungsfunktion
$W = e^{m\,\varphi}$
m Wurzel der charakteristischen Gleichung
$m_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta$
$m_{3,4} = \gamma \pm i\,\delta$
$W = A\,W_A + B\,W_B + C\,W_C + D\,W_D$
A, B, C, D Integrationskonstanten
$W_A = e^{\alpha\,\varepsilon}\cos\beta\,\varepsilon \quad W_B = e^{\alpha\,\varepsilon}\sin\beta\,\varepsilon$
$W_C = e^{\gamma\,\varepsilon}\cos\delta\,\varepsilon \quad W_D = e^{\gamma\,\varepsilon}\sin\delta\,\varepsilon$
$\varepsilon = \varphi\,\varrho$ bzw. $\varphi\,\varrho_\varphi$

Die Schnittgrößen haben die Form
$N = \sin\lambda\,\xi\cdot M\cdot n_r$, bzw. $\cos\lambda\,\xi\cdot M\cdot n_r$
M expliziten Multiplikator
n_r Verteilungsfunktion für die Ringrichtung
$n_r = A_n\,W_A + B_n\,W_B + C_n\,W_C + D_n\,W_D$
$A_n = a_n\,A + b_n\,B, \quad B_n = -b_n\,A + a_n\,B$
$C_n = c_n\,C + d_n\,D, \quad D_n = c_n\,D - d_n\,C$
a_n, b_n, c_n, d_n Multiplikatoren der Integrationskonstanten

Belastungen am Längsrand sind durch die Verteilungsfunktionen m_φ, r_φ, n_φ, s_φ und n_x gegeben, wobei
$M_\varphi = \sin\lambda\,\xi\cdot r\,m_\varphi$
$R_\varphi = \sin\lambda\,\xi\cdot\varrho\,r_\varphi$
$N_\varphi = \sin\lambda\,\xi\cdot\varrho^2\,n_\varphi$
$S_\varphi = \cos\lambda\,\xi\cdot\varrho^3\,s_\varphi/\lambda$
$N_x = \sin\lambda\,\xi\cdot\varrho^4\,n_x/\lambda^2$

Die Belastung am Ringrand hat
$w = \sin n\,\varphi\cdot X$
n wird aus den Randbedingungen bestimmt
X Lösungsfunktion
$X = e^{m\,\xi}$
m Wurzel der charakteristischen Gleichung
$m_{1,2} = \alpha \pm i\,\beta, \quad m_{3,4} = \gamma \pm i\,\delta$
$\eta = 2n\sqrt[4]{k_1}$