Theorie der reellen Funktionen

Von

Dr. Hans Hahn
Professor der Mathematik an der Universität
Bonn

Erster Band

Mit 18 Textfiguren

Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1921

Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1921

ISBN 978-3-642-52570-4 ISBN 978-3-642-52624-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-52624-4

Vorwort.

Schon seit geraumer Zeit hat die Lehre von den reellen Funktionen aufgehört, eine bloße Sammlung von Merkwürdigkeiten zu sein: sie ist zu einer Theorie der reellen Funktionen geworden, die eine große Anzahl bedeutungsvoller und weittragender Gesetze aufgedeckt hat; nicht mehr das Suchen nach Ausnahmen ist ihre Absicht, sondern das Suchen nach Regeln. Und da immer häufiger Fragestellungen aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik bei gründlicher Behandlung auf Fragen aus der Theorie der reellen Funktionen führten, so hat diese Theorie auch aufgehört, Alleinbesitz einiger Spezialisten zu sein und in immer steigendem Maße das Interesse der mathematischen Allgemeinheit gefunden. Von vielen Seiten wurde daher der Mangel einer zusammenfassenden, systematischen Darstellung dieser Theorie schmerzlich empfunden.

Ich habe es deshalb mit Freuden begrüßt, als vor einer Reihe von Jahren Herr A. Schoenflies an mich mit der Aufforderung herantrat, an einer Neuauflage seines Berichtes „Die Entwickelung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten" mitzuarbeiten, und zwar insbesondere die Anwendungen der Mengenlehre auf die Theorie der reellen Funktionen zu behandeln. Im Jahre 1914 war diese Darstellung nahezu beendet. Der Ausbruch des Krieges, der mich von meinem damaligen Wohnsitze Czernowitz trennte, sodann meine Einberufung zur österreichischen Armee, eine schwere Verwundung, schließlich meine Übersiedlung nach Bonn verzögerten die endgültige Fertigstellung, und als diese endlich erfolgt war, machten die mittlerweile eingetretenen traurigen Verhältnisse die Drucklegung unmöglich. Ich war schon darauf gefaßt, das Manuskript in meinem Schreibtische begraben zu müssen, als das freundliche Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung von Julius Springer mir die Möglichkeit bot, es zu einer selbständigen, zwei Bände umfassenden „Theorie der reellen Funktionen" umzugestalten, deren erster Band nun vorliegt, und deren zweiter Band (enthaltend die Theorie der Integration und Differentiation, die analytische Darstellung willkürlicher Funktionen und die Fourierschen Reihen) hoffentlich bald wird folgen können.

Ich hoffe. daß dieses Buch auch nach dem Erscheinen von Herrn C. Carathéodorys ausgezeichneten „Vorlesungen über reelle Funktionen" nicht als überflüssig wird empfunden werden. Denn schon ein flüchtiger Vergleich wird zeigen, daß der behandelte Stoff sich nur zum geringen Teile mit den Carathéodoryschen Vorlesungen deckt, und daß da, wo der Stoff sich deckt, doch die Darstellung meistens eine völlig verschiedene ist. Daß ich nach Form und Inhalt aus Carathéodorys Werke vielen Nutzen für das meine ziehen konnte, wird jeder aufmerksame Leser feststellen, und es sei hier ausdrücklich und gerne anerkannt.

Was die verarbeitete Literatur anlangt, so hoffe ich, von den bis 1914 erschienenen Arbeiten über die behandelten Gegenstände keine wichtigere unberücksichtigt gelassen zu haben. Die nach Kriegsausbruch erschienene Literatur des Auslandes ist mir teils gar nicht, teils so spät zur Kenntnis gekommen, daß sie nur ganz gelegentlich verwertet werden konnte.

Vom Leser werden keine speziellen Vorkenntnisse verlangt, wohl aber eine gewisse Übung im mathematischen Denken. Um nicht fortwährend auf andere Bücher verweisen zu müssen, wurden die für das Verständnis erforderlichen Tatsachen aus der allgemeinen Mengenlehre und der Theorie der reellen Zahlen in einer Einleitung kurz entwickelt. Ich muß wohl nicht eigens darauf hinweisen, daß es sich dabei nicht um eine systematische Entwicklung dieser Theorien handelt; die schwierigen Fragen der Grundlegung der Mengen- und Zahlenlehre z. B. werden gar nicht berührt. Ausführlicher und systematischer wurde in Kapitel I die Theorie der Punktmengen behandelt, doch auch hier möge sich der Leser vor Augen halten, daß diese Darstellung nicht Selbstzweck ist, sondern nur zur Grundlegung für den eigentlich zu behandelnden Gegenstand, die Theorie der reellen Funktionen, dient.

Beim Lesen der Korrekturen haben mich in freundlichster Weise unterstützt die Herren F. Hausdorff, Th. Radakovic, A. Rosenthal und H. Tietze. Es sei ihnen an dieser Stelle für zahlreiche wertvolle Ratschläge und Verbesserungen der herzlichste Dank ausgesprochen.

Bonn, September 1920.

Hans Hahn.

Inhalt.

Einleitung.

Grundbegriffe der allgemeinen Mengenlehre.

Die reellen Zahlen.

Erstes Kapitel.

Punktmengen.

Zweites Kapitel.

Der Begriff der Stetigkeit und seine Verallgemeinerungen.

Drittes Kapitel.

Die unstetigen Funktionen.

Viertes Kapitel.

Funktionenfolgen.

Fünftes Kapitel.

Die Baireschen Funktionen.

Sechstes Kapitel.

Die absolut-additiven Mengenfunktionen.

Siebentes Kapitel.

Die Funktionen endlicher Variation.

Achtes Kapitel.

Die meßbaren Funktionen.