

Theorie der reellen Funktionen

Von

Dr. Hans Hahn

Professor der **Mathematik** an der **Universität**
Bonn

Erster Band

Mit 18 Textfiguren



Springer-Verlag Berlin Heidelberg GmbH
1921

Alle Rechte,
insbesondere das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.
Copyright 1921 by Springer-Verlag Berlin Heidelberg
Ursprünglich erschienen bei Julius Springer in Berlin 1921
ISBN 978-3-642-52570-4 ISBN 978-3-642-52624-4 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-52624-4

Vorwort.

Schon seit geraumer Zeit hat die Lehre von den reellen Funktionen aufgehört, eine bloße Sammlung von Merkwürdigkeiten zu sein: sie ist zu einer Theorie der reellen Funktionen geworden, die eine große Anzahl bedeutungsvoller und weittragender Gesetze aufgedeckt hat; nicht mehr das Suchen nach Ausnahmen ist ihre Absicht, sondern das Suchen nach Regeln. Und da immer häufiger Fragestellungen aus den verschiedensten Gebieten der Mathematik bei gründlicher Behandlung auf Fragen aus der Theorie der reellen Funktionen führten, so hat diese Theorie auch aufgehört, Alleinbesitz einiger Spezialisten zu sein und in immer steigendem Maße das Interesse der mathematischen Allgemeinheit gefunden. Von vielen Seiten wurde daher der Mangel einer zusammenfassenden, systematischen Darstellung dieser Theorie schmerzlich empfunden.

Ich habe es deshalb mit Freuden begrüßt, als vor einer Reihe von Jahren Herr A. Schoenflies an mich mit der Aufforderung herantrat, an einer Neuauflage seines Berichtes „Die Entwicklung der Lehre von den Punktmannigfaltigkeiten“ mitzuarbeiten, und zwar insbesondere die Anwendungen der Mengenlehre auf die Theorie der reellen Funktionen zu behandeln. Im Jahre 1914 war diese Darstellung nahezu beendet. Der Ausbruch des Krieges, der mich von meinem damaligen Wohnsitze Czernowitz trennte, sodann meine Einberufung zur österreichischen Armee, eine schwere Verwundung, schließlich meine Übersiedlung nach Bonn verzögerten die endgültige Fertigstellung, und als diese endlich erfolgt war, machten die mittlerweile eingetretenen traurigen Verhältnisse die Drucklegung unmöglich. Ich war schon darauf gefaßt, das Manuskript in meinem Schreibtische begraben zu müssen, als das freundliche Entgegenkommen der Verlagsbuchhandlung von Julius Springer mir die Möglichkeit bot, es zu einer selbständigen, zwei Bände umfassenden „Theorie der reellen Funktionen“ umzugestalten, deren erster Band nun vorliegt, und deren zweiter Band (enthaltend die Theorie der Integration und Differentiation, die analytische Darstellung willkürlicher Funktionen und die Fourierschen Reihen) hoffentlich bald wird folgen können.

Ich hoffe, daß dieses Buch auch nach dem Erscheinen von Herrn C. Carathéodorys ausgezeichneten „Vorlesungen über reelle Funktionen“ nicht als überflüssig wird empfunden werden. Denn schon ein flüchtiger Vergleich wird zeigen, daß der behandelte Stoff sich nur zum geringen Teile mit den Carathéodoryschen Vorlesungen deckt, und daß da, wo der Stoff sich deckt, doch die Darstellung meistens eine völlig verschiedene ist. Daß ich nach Form und Inhalt aus Carathéodorys Werke vielen Nutzen für das meine ziehen konnte, wird jeder aufmerksame Leser feststellen, und es sei hier ausdrücklich und gerne anerkannt.

Was die verarbeitete Literatur anlangt, so hoffe ich, von den bis 1914 erschienenen Arbeiten über die behandelten Gegenstände keine wichtigere unberücksichtigt gelassen zu haben. Die nach Kriegsausbruch erschienene Literatur des Auslandes ist mir teils gar nicht, teils so spät zur Kenntnis gekommen, daß sie nur ganz gelegentlich verwertet werden konnte.

Vom Leser werden keine speziellen Vorkenntnisse verlangt, wohl aber eine gewisse Übung im mathematischen Denken. Um nicht fortwährend auf andere Bücher verweisen zu müssen, wurden die für das Verständnis erforderlichen Tatsachen aus der allgemeinen Mengenlehre und der Theorie der reellen Zahlen in einer Einleitung kurz entwickelt. Ich muß wohl nicht eigens darauf hinweisen, daß es sich dabei nicht um eine systematische Entwicklung dieser Theorien handelt; die schwierigen Fragen der Grundlegung der Mengen- und Zahlenlehre, z. B. werden gar nicht berührt. Ausführlicher und systematischer wurde in Kapitel I die Theorie der Punktmengen behandelt, doch auch hier möge sich der Leser vor Augen halten, daß diese Darstellung nicht Selbstzweck ist, sondern nur zur Grundlegung für den eigentlich zu behandelnden Gegenstand, die Theorie der reellen Funktionen, dient.

Beim Lesen der Korrekturen haben mich in freundlichster Weise unterstützt die Herren F. Hausdorff, Th. Radakovic, A. Rosenthal und H. Tietze. Es sei ihnen an dieser Stelle für zahlreiche wertvolle Ratschläge und Verbesserungen der herzlichste Dank ausgesprochen.

Bonn, September 1920.

Hans Hahn.

Inhalt.

Einleitung.

Grundbegriffe der allgemeinen Mengenlehre.

	Seite
§ 1. Vereinigung und Durchschnitt	1
§ 2. Die Mächtigkeiten	5
§ 3. Die geordneten Mengen. Die Ordnungstypen	11
§ 4. Die wohlgeordneten Mengen. Die Ordinalzahlen	15

Die reellen Zahlen.

§ 5. Grenzwerte reeller Zahlen	27
§ 6. Häufungswerte reeller Zahlen	35
§ 7. Die Mächtigkeit des Kontinuums	44
§ 8. Anordnungssätze	47

Erstes Kapitel.

Punktmengen.

§ 1. Metrische Räume	52
§ 2. Kompakte, abgeschlossene, offene Punktmengen	58
§ 3. Umgebungen	65
§ 4. In sich dichte, dichte, nirgends dichte Mengen	75
§ 5. Zusammenhängende Mengen	82
§ 6. Das Borelsche Theorem	89
§ 7. Separable Mengen	93
§ 8. Vollständige Mengen	99
§ 9. Lineare abgeschlossene Mengen	109

Zweites Kapitel.

Der Begriff der Stetigkeit und seine Verallgemeinerungen.

§ 1. Der Funktionsbegriff	113
§ 2. Obere und untere Schrankenfunktion	117
§ 3. Stetigkeit in einem Punkte	122
§ 4. Stetigkeit auf einer Punktmenge	127
§ 5. Erweiterung einer stetigen Funktion	133
§ 6. Stetige Abbildungen	140
§ 7. Abbildung einer Strecke auf ein Quadrat	146
§ 8. Halbstetigkeit in einem Punkte	152
§ 9. Halbstetigkeit auf einer Punktmenge	156
§ 10. Stetige und halbstetige Funktionen	161

	Seite
§ 11. Die Schrankenfunktionen als halbstetige Funktionen. Grenzwert einer Funktion	166
§ 12. Vernachlässigung von Teilmengen	173
§ 13. Einseitige Stetigkeit und Halbstetigkeit	176

Drittes Kapitel.

Die unstetigen Funktionen.

§ 1. Häufungswerte einer Funktion	184
§ 2. Die Schwankung einer Funktion	190
§ 3. Verteilung der Unstetigkeitspunkte	198
§ 4. Punktweise unstetige Funktionen	203
§ 5. Erweiterung einer punktweise unstetigen Funktion	209
§ 6. Beispiele punktweise unstetiger Funktionen	214
§ 7. Verallgemeinerungen	219

Viertes Kapitel.

Funktionenfolgen.

§ 1. Maximal- und Minimalfunktionen	230
§ 2. Stetige Konvergenz und halbstetige Oszillation	238
§ 3. Gleichmäßige Konvergenz	246
§ 4. Gleichmäßige Oszillation	254
§ 5. Schwankung und Ungleichmäßigkeitsgrad einer Funktionenfolge	261
§ 6. Verteilung der Punkte ungleichmäßiger Konvergenz	267
§ 7. Punktweise ungleichmäßige Konvergenz	274
§ 8. Einfach-gleichmäßige und quasi-gleichmäßige Konvergenz	280
§ 9. Vertauschung von Grenzübergängen	288
§ 10. Gleichgradig stetige Funktionenmengen	300
§ 11. Schranken- und Grenzfunktionen einer Funktionenmenge	305
§ 12. Verdichtung von Singularitäten	309
§ 13. Die Borelschen Reihen	313

Fünftes Kapitel.

Die Baireschen Funktionen.

§ 1. Funktionen α -ter Klasse	318
§ 2. Eigenschaften, die bei Grenzübergang erhalten bleiben	324
§ 3. Funktionen α -ter Ordnung	328
§ 4. Borelsche Mengen	334
§ 5. Die Ordnung einer Baireschen Funktion, charakterisiert durch Borelsche Mengen	342
§ 6. Zusammenhang zwischen Klasse und Ordnung einer Baireschen Funktion	345
§ 7. Die Klasse einer Baireschen Funktion, charakterisiert durch Borelsche Mengen	349
§ 8. Charakteristische Eigenschaften der Funktionen höchstens α -ter Klasse	352
§ 9. Verhalten Bairescher Funktionen in der Umgebung eines Punktes. Erweiterung einer Baireschen Funktion	356
§ 10. Funktionen erster und zweiter Klasse	363
§ 11. Funktionen dritter Klasse	370
§ 12. Existenz von Funktionen α -ter Klasse	374
§ 13. Unvollständige Bairesche Funktionen	380
§ 14. Funktionen mehrerer Punkte	383

Sechstes Kapitel.

Die absolut-additiven Mengenfunktionen.

	Seite
§ 1. Additive und absolut-additive Mengenfunktionen	393
§ 2. Positivfunktion, Negativfunktion, Absolutfunktion	399
§ 3. Stetige und unstetige Mengenfunktionen	408
§ 4. Totalstetige Mengenfunktionen	416
§ 5. Maßfunktionen	424
§ 6. Gewöhnliche und reguläre Maßfunktionen	430
§ 7. Inhaltsfunktionen	444
§ 8. Inhaltsfunktionen im \mathfrak{R}_k	453
§ 9. Absolut-additive Mengenfunktionen im \mathfrak{R}_k	461

Siebentes Kapitel.

Die Funktionen endlicher Variation.

§ 1. Absolutzuwachs, Positivzuwachs, Negativzuwachs einer Funktion	465
§ 2. Funktionen totalstetigen Absolutzuwachses	473
§ 3. Ausgezeichnete Folgen von Intervallsystemen	479
§ 4. Variation, positive und negative Variation einer Funktion $f(x)$	483
§ 5. Funktionen endlicher Variation	489
§ 6. Stetige Funktionen endlicher Variation. Ausgezeichnete Zerlegungsfolgen	497
§ 7. Unstetige Funktionen endlicher Variation	505
§ 8. Rektifikation	513
§ 9. Länge eines stetigen Kurvenbogens	518
§ 10. Totalstetige Funktionen	523
§ 11. Die Funktion der Singularitäten	528
§ 12. Streckenweise konstante Funktionen	533
§ 13. Funktionen endlicher Variation im \mathfrak{R}_k	539

Achtes Kapitel.

Die meßbaren Funktionen.

§ 1. Meßbare Funktionen	548
§ 2. Folgen meßbarer Funktionen	553
§ 3. Die Basisfunktion als gewöhnliche Maßfunktion	563
§ 4. Asymptotische Konvergenz	570
§ 5. Nicht-meßbare Punktmengen	575
§ 6. Nicht-meßbare Funktionen	581
§ 7. Meßbare und reguläre Abbildungen	586
Verzeichnis der zitierten Bücher	590
Verzeichnis der zitierten Autoren	591
Sachverzeichnis	593