

**Einflußfelder zweifeldriger Platten mit freien Längsrändern**  
**Influence Surfaces of Two-Span Continuous Plates with Free Longitudinal Edges**

Achim Molkenthin

**Einflußfelder  
zweifeldriger Platten  
mit freien Längsrändern**

**Influence Surfaces  
of Two-Span Continuous Plates  
with Free Longitudinal Edges**

31 Abbildungen und 165 Tafeln

31 Figures and 165 Charts

In deutscher und englischer Sprache

Englische Übersetzung von Heinz Juhl

Mit einem Geleitwort von Werner Koepecke



Springer-Verlag Berlin · Heidelberg · New York 1971

**Dr.-Ing. ACHIM MOLKENTHIN**

Dyckerhoff & Widmann AG, Berlin

**Professor Dr.-Ing. WERNER KOEPCKE**

Ordinarius für Stahlbetonbau an der Technischen Universität Berlin  
Direktor des Institutes für Baukonstruktionen und Festigkeit

**Dipl.-Ing. HEINZ G. JUHL**

Camp Hill, Pa./USA

---

ISBN 978-3-642-51639-9      ISBN 978-3-642-51638-2 (eBook)  
DOI 10.1007/978-3-642-51638-2

---

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdruckes, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten.

Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist.

© by Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg 1971.  
Library of Congress Catalog Card Number 72-130576

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1971

## Geleitwort

Die Singularitätenmethode der Einflußflächen dünner elastischer Platten ist im Jahre 1938 von ADOLF PUCHER entwickelt worden. Er habilitierte sich damit an der Fakultät für Bauwesen der damaligen Technischen Hochschule Berlin-Charlottenburg. Die Anwendung dieses Verfahrens auf eine Platte spezieller Berandung macht es erforderlich, die von der singulären Belastung erzeugte Biegefläche den Randbedingungen anzupassen. Hierzu bediente sich PUCHER s. Zt. der Differenzenmethode. Da damals nur mechanische Tischrechenmaschinen zur Verfügung standen, war der Arbeitsaufwand schon bei mäßiger Genauigkeit der Ergebnisse erheblich. Man bemühte sich deshalb, für die technisch wichtigen Rechteckplatten ein möglichst allgemein anwendbares analytisches Verfahren bereitzustellen, mit dem beliebige Auflagerbedingungen der einzelnen Ränder befriedigt werden können.

Läßt man zu, daß diejenigen Lösungen der Bipotentialgleichung, die aus einer unendlichen Reihe von Produkten der Exponentialfunktion mit trigonometrischen Funktionen bestehen, komplexes Argument haben, so erschließt sich in der Tat ein neuer Weg zur Berechnung von Biegeflächen rechteckiger Platten, deren Ränder in beliebiger Folge drehbar, eingespannt oder nicht gestützt sind. Die Funktionen mit komplexen Eigenwerten sind zwar nicht orthogonal, doch wird dieser Nachteil durch ihre weitgehende Anpassungsfähigkeit an die Auflagerbedingungen mehr als aufgewogen.

Reihen mit komplexen Argumenten als Lösungen elastizitäts-theoretischer Aufgaben sind seit fast acht Jahrzehnten bekannt, trotzdem blieben sie lange unbeachtet. Sie mußten gleichsam erst neu entdeckt werden, nachdem die Singularitätenmethode der Einflußflächen elastischer Platten dies erforderlich machte. In der Folgezeit hat es sich herausgestellt, daß diese Reihen zur Lösung von Problemen der Schalentheorie, dicker Kreisplatten, dickwandiger Hohlzylinder und dickwandiger Hohlkugeln ebenfalls geeignet sind. In Fortsetzung der von A. PUCHER begründeten Tradition sind die entsprechenden Arbeiten am Lehrstuhl für Stahlbetonbau der Technischen Universität Berlin durchgeführt worden.

Auch die vorliegende Schrift von A. MOLKENTHIN gehört zu diesem Forschungskomplex. Sie stellt dem entwerfenden und konstruierenden Ingenieur ein Hilfsmittel zur Verfügung, mit dem er leicht die Biegemomente der vorwiegend im Brückenbau vorkommenden durchlaufenden Platten mit freien Längsrändern berechnen kann. Die topographische Darstellung der Flächen mit Höhenlinien vermittelt einen unmittelbaren visuellen Eindruck, auf den der Bauingenieur bei der wachsenden Verbreitung elektronisch aufgestellter Berechnungen der Tragwerke weniger denn je verzichten sollte.

Werner Koepcke

## Preface

The singularity method for the influence surfaces of thin elastic plates was developed by ADOLF PUCHER 1938. With this method, he habilitated in the Department of Civil Engineering of the former Technische Hochschule, Berlin-Charlottenburg. The application of this method to a plate of a particular edge condition requires the adaption of the deflection surface, due to the singular load, to the boundary conditions. Because only mechanical desk calculators were available at the time, the amount of work for a modest accuracy of the results was considerable. Consequently, one was interested to develop a general analytical method which could satisfy the arbitrary support conditions at the individual edges of the rectangular plate.

When admitting the solutions with complex argument for the bi-potential equations, composed of an infinite series of products of exponential and trigonometric functions, a new route for the computation of the bending surfaces of rectangular plates with edges of arbitrary conditions, i.e., simply supported, fixed or free, has been opened up indeed. The functions with complex eigenvalues are not orthogonal, however, this disadvantage is outweighed by their adaptability to the boundary conditions.

The series with complex arguments as solutions to problems in the theory of elasticity are known since nearly eight decades but remained in obscurity for a long time. When the singularity method for influence surfaces of elastic plates made it necessary, it seemed as if they had to be discovered anew. It was found, hereafter, that these series are suitable also for the solution of problems in the theory of shells, for thick circular plates, for thick-walled cylinders and for thick-walled spheres. Related research was carried on at the Department of Reinforced Concrete Structures of the Technical University Berlin, in continuation of a tradition founded by A. PUCHER.

The book by A. MOLKENTHIN, hereby introduced, is also part of this research complex. It presents to the designing structural engineer a tool for easy computation of the bending moments in continuous plates with free, longitudinal edges, as occurring mainly in bridges. The topographical presentation of the influence surfaces by contour lines produces a direct, visual impression. With the growing application of electronic computers to structural analysis, the structural engineer should disregard such graphical presentations even less than before.

Werner Koepcke

## Vorwort

Einflußfelder für Feld- und Stützenmomente zwei- und mehrfeldriger Platten mit freien Längsrändern, die für den Brückenbau und andere Aufgaben im Bauwesen wichtig sind, sind bisher nicht veröffentlicht worden. Dies mag seinen Grund darin haben, daß das Randwertproblem des freien Randes einer durchlaufenden Platte eine schwer zu lösende Aufgabe der Plattenstatik ist.

Die theoretischen Grundlagen zur Berechnung der „Einflußfelder durchlaufender Platten mit freien Längsrändern“ sind in den letzten Jahren vervollständigt worden. Die Berechnungsmethoden führen auf numerische Rechnungen, die mit herkömmlichen Tischrechenmaschinen kaum noch zu bewältigen sind. Die modernen elektronischen Rechenanlagen geben dem Forschenden aber die Möglichkeit auch schwierige mathematische Formeln in kurzer Zeit zu verarbeiten.

So entstand im Anschluß an theoretische Arbeiten, die ich während meiner Assistententätigkeit bei Herrn Professor Dr.-Ing. W. KOEPCKE am Lehrstuhl für Stahlbetonbau der Technischen Universität Berlin anfertigte, mit Hilfe elektronischer Rechenanlagen, das vorliegende Tafelwerk. Seine 165 Einflußfelder sollen dem Statiker als Arbeitsunterlage dienen ohne ihn mit der zeitraubenden numerischen Berechnung zu belasten.

Von den 165 Einflußfeldern hat Herr Dr.-Ing. J. GERICKE die neun Stützenmomenteneinflußfelder mit Aufpunkt am freien Rand berechnet und mir zur Vervollständigung des Werkes zur Verfügung gestellt.

Das Erscheinen dieses Tafelwerkes wäre jedoch ohne wesentliche Förderungen schwerlich möglich gewesen. Herrn Professor Dr.-Ing. W. KOEPCKE gebührt an dieser Stelle mein Dank für die Anregung zu dieser Arbeit, der Deutschen Forschungsgemeinschaft Dank für die Bereitstellung der erforderlichen Mittel. Besonderer Dank gilt auch dem Springer-Verlag, der die Herausgabe des Tafelwerkes bereitwillig übernommen hat und durch die vorzügliche Ausstattung wesentlich zum Gelingen beigetragen hat. Herr Dipl.-Ing. HEINZ G. JUHL übersetzte das Werk ins Englische und erweiterte damit den Kreis seiner Benutzer. Auch ihm gebührt mein Dank.

Berlin, im Frühjahr 1971

**Achim Molkenhain**

## Foreword

Until now, influence surfaces for span- and support-moments of two- and multi-span plates with free longitudinal edges, which are of importance for bridge and other structures, have not been published. The reason for it may be that the boundary conditions of free edges of a continuous plate represent a difficult problem in the analysis of plates.

In recent years, the theory for the computation of “Influence Surfaces of Continuous Plates with Free Longitudinal Edges” has been completed. The computation methods lead to numerical computations which are difficult to execute on ordinary desk calculators. However, modern electronic computers provide the researcher with a tool that handles complicated mathematical expressions fast.

Thus, after conclusion of the theoretical work, done during my tenure of Assistantship to Professor Dr.-Eng. W. KOEPCKE at the Department of Reinforced Concrete of the Technical University Berlin, the presented volume of charts was produced with the aid of the electronic computer. The 165 influence surfaces of the volume are intended to serve the analyst as a design tool without burdening him with time consuming numerical calculations.

The nine support moment influence surfaces with the reference point at the free edge, of a total of 165 influence surfaces, were computed by Dr.-Eng. J. GERICKE, and, for completeness of the volume, made available to me.

The publication of this volume of charts would have been difficult without considerable assistance. Professor Dr.-Eng. W. KOEPCKE deserves my thanks for the idea to this work, and the Deutsche Forschungsgemeinschaft for providing the required financial means. Special thanks also to the Springer-Verlag who accepted readily the publication of the chart volume, and contributed substantially to the success with an excellent edition. Dipl.-Eng. HEINZ G. JUHL translated the book into the English language, thus enlarging the number of its users, my thanks to him also.

Berlin, in Spring 1971

**Achim Molkenhain**

## Inhaltsverzeichnis

§ 1. Einleitung . . . . .	9
§ 2. Erläuterungen zu den Einflußfeldern durchlaufender Platten . . . . .	9
§ 3. Auswertung . . . . .	11
§ 4. Anwendungsbeispiele . . . . .	14
§ 5. Erweiterte Anwendung . . . . .	27
§ 6. Theoretische Angaben zur Berechnung der Einflußfelder durchlaufender Platten	32
Literaturverzeichnis . . . . .	44
Tafelverzeichnis . . . . .	45
1.1. Feldmomenten-Einflußfelder $m_x$ und $m_y$ einfeldriger Platten mit zwei freien und zwei frei drehbaren Rändern; Aufpunkt auf der Mittellinie bei $0,5 l_x$ . . . . .	45
1.2. Feldmomenten-Einflußfelder $m_x$ und $m_y$ einfeldriger Platten mit zwei freien und zwei frei drehbaren Rändern; Aufpunkt auf der Mittellinie bei $0,6 l_x$ . . . . .	45
2.1. Feldmomenten-Einflußfelder $m_x$ einfeldriger Platten mit zwei freien und zwei frei drehbaren Rändern; Aufpunkt auf dem freien Rand bei $0,5 l_x$ . . . . .	46
2.2. Feldmomenten-Einflußfelder $m_x$ einfeldriger Platten mit zwei freien und zwei frei drehbaren Rändern; Aufpunkt auf dem freien Rand bei $0,6 l_x$ . . . . .	46
3.1. Feldmomenten-Einflußfelder $m_x$ und $m_y$ zweifeldriger Plattenstreifen, Aufpunkt im Feld 1 bei $0,5 l_{x1}$ . . . . .	46
3.2. Feldmomenten-Einflußfelder $m_x$ und $m_y$ zweifeldriger Plattenstreifen; Aufpunkt im Feld 2 bei $0,5 l_{x2}$ . . . . .	47
4. Stützenmomenten-Einflußfelder $m_x$ zweifeldriger Plattenstreifen. . . . .	47
5. Stützenmomenten-Einflußfelder $m_x$ zweifeldriger Platten mit zwei freien und zwei frei drehbaren Außenrändern. . . . .	47
6. Feldmomenten-Einflußfelder $m_x$ und $m_y$ zweifeldriger Platten mit zwei freien und zwei frei drehbaren Außenrändern; Aufpunkt auf der Mittellinie. . . . .	50
7. Feldmomenten-Einflußfelder $m_x$ zweifeldriger Platten mit zwei freien und zwei frei drehbaren Außenrändern; Aufpunkt auf dem freien Rand. . . . .	51
8. Stützenmomenten-Einflußfelder $m_x$ einfeldriger Platten mit zwei freien, einem frei drehbaren und einem eingespannten Rand . . . . .	52
Einflußfelder Tafel 1 bis 165. . . . .	55

## Contents

§ 1. Introduction . . . . .	9
§ 2. Explanations to the Charts of the Influence Surfaces of Continuous Plates . . . . .	9
§ 3. Evaluation of the Influence Surfaces . . . . .	11
§ 4. Examples of Application . . . . .	14
§ 5. Extended Application . . . . .	27
§ 6. Information on the Theory for the Computation of Influence Surfaces of Continuous Plates . . . . .	32
References . . . . .	44
Index of Charts . . . . .	45
1.1. Span Moment Influence Surfaces $m_x$ and $m_y$ of Single-Span Plates with two Free and two Simply Supportet Edges; Reference Point at the Center Line at $0.5 l_x$	45
1.2. Span Moment Influence Surfaces $m_x$ and $m_y$ of Single-Span Plates with two Free and two Simply Supported Edges; Reference Point at the Center Line at $0.6 l_x$ . . . . .	45
2.1. Span Moment Influence Surfaces $m_x$ of Single-Span Plates with two Free and two Simply Supported Edges; Reference Point at the Free Edge at $0.5 l_x$ . . . . .	46
2.2. Span Moment Influence Surfaces $m_x$ of Single-Span Plates with two Free and two Simply Supported Edges; Reference Point at the Free Edge at $0.6 l_x$ . . . . .	46
3.1. Span Moment Influence Surfaces $m_x$ and $m_y$ of Two-Span Strips; Reference Point in Span 1 at $0.5 l_{x1}$ . . . . .	46
3.2. Span Moment Influence Surfaces $m_x$ and $m_y$ of Two-Span Strips; Reference Point in Span 2 at $0.5 l_{x2}$ . . . . .	47
4. Support Moment Influence Surfaces $m_x$ of Two-Span Plate Strips . . . . .	47
5. Support Moment Influence Surfaces $m_x$ of Two-Span Plates with two Free and two Simply Supported Border Edges . . . . .	47
6. Span Moment Influence Surfaces $m_x$ and $m_y$ of Two-Span Plates with two Free and two Simply Supported Border Edges; Reference Point at the Center Line . . . . .	50
7. Span Moment Influence Surfaces $m_x$ of Two-Span Plates with two Free and two Simply Supported Border Edges; Reference Point on the Free Edge . . . . .	51
8. Support Moment Influence Surfaces $m_x$ of Single-Span Plates with two Free, one Simply Supported and one Fixed Edge . . . . .	52
Influence Surfaces, Chart 1 to 165 . . . . .	55