

# Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften

in Einzeldarstellungen  
mit besonderer Berücksichtigung  
der Anwendungsgebiete

Band 1

*Herausgegeben von* J. L. Doob A. Grothendieck E. Heinz  
F. Hirzebruch E. Hopf W. Maak  
S. Mac Lane W. Magnus J. K. Moser  
M. M. Postnikov F. K. Schmidt  
D. S. Scott K. Stein

*Geschäftsführende  
Herausgeber* B. Eckmann und B. L. van der Waerden

W. Blaschke · K. Leichtweiß

# Elementare Differentialgeometrie

5. vollständig neubearbeitete Auflage  
von K. Leichtweiß

Mit 37 Figuren



Springer-Verlag  
Berlin Heidelberg New York 1973

Kurt Leichtweiß  
Mathematisches Institut B der Universität Stuttgart

Geschäftsführende  
Herausgeber

B. Eckmann  
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich

B. L. van der Waerden  
Mathematisches Institut der Universität Zürich

---

AMS Subject Classification (1970) 53-01

Das Buch erschien bisher unter dem Titel  
Vorlesungen über Differentialgeometrie und geome-  
trische Grundlagen von Einsteins Relativitätstheorie I

ISBN 978-3-540-05889-2      ISBN 978-3-642-49193-1 (eBook)  
DOI: 10.1007/ 978-3-642-49193-1

---

Das Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, der Entnahme von Abbildungen, der Funksendung, der Wiedergabe auf photomechanischem oder ähnlichem Wege und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Bei Vervielfältigungen für gewerbliche Zwecke ist gemäß § 54 UrhG eine Vergütung an den Verlag zu zahlen, deren Höhe mit dem Verlag zu vereinbaren ist. © by Springer-Verlag Berlin · Heidelberg 1973.  
Library of Congress Catalog Number 72-90 195

Softcover reprint of the hardcover 1st edition 1973

## Vorwort zur fünften Auflage

Die „klassische“, d. h. bewegungsinvariante Differentialgeometrie der Kurven und Flächen im dreidimensionalen euklidischen Raum hat seit dem Erscheinen der 4. Auflage dieses Buches im Jahre 1945 eine stetige Weiterentwicklung erfahren, wobei insbesondere Fragen der Differentialgeometrie „im Großen“ im Vordergrund des Interesses standen. Der zweitgenannte Verfasser hat es sich zur Aufgabe gemacht, die wichtigsten neuen Erkenntnisse über diesen Gegenstand in die 5. Auflage des Blaschkeschen Werkes: „Elementare Differentialgeometrie“ aufzunehmen. Dabei wurde eine vollständige Umarbeitung und Neuformulierung des früheren Textes erforderlich, um einerseits von Anfang an die notwendigen Präzisierungen treffen zu können und um andererseits — in Übereinstimmung mit den Absichten des 1962 verstorbenen erstgenannten Verfassers — die Darstellung der „Tensoranalysis“ und des „Differentialformenkalküls“ als analytische Hilfsmittel innerhalb des Buches zu ermöglichen. Es versteht sich von selbst, daß bei dieser Gelegenheit viele unvollständige Beweise ergänzt oder geändert werden mußten, wobei aber der Geist des Buches hoffentlich beibehalten werden konnte.

Zwecks auch äußerlicher Anpassung an den Stil der früheren Auflage wurde die Einteilung in die einzelnen Kapitel und Sachgebiete nicht geändert; lediglich das 9. Kapitel über Liniengeometrie mußte aus Platzgründen entfallen. Die für die späteren Anwendungen wichtigen Grundlagen der Tensorrechnung bzw. des Differentialformenkalküls erscheinen neu am Ende des 4. Kapitels bzw. am Anfang des 5. Kapitels. Das 7. Kapitel über Fragen der Flächentheorie im Großen wurde aus dem anfangs genannten Grund total umgeschrieben und dabei stark vergrößert; insbesondere wurde die Rolle der Klasse der „vollständigen Flächen“ hervorgehoben. Aus didaktischen Gründen sind schließlich die den einzelnen Kapiteln angefügten früheren Paragraphen über „Aufgaben und Lehrsätze“ in Paragraphen über a) Übungsaufgaben und b) Bemerkungen umgewandelt worden.

Von den Herren H. Hopf (Zürich), H. Karcher (Bonn) und W. Klingenberg (Bonn) stammen wichtige Hinweise und Anregungen für die Neubearbeitung; ferner hat das Mathematische Institut der Universität

Freiburg dieselbe durch Erstellung einer Literaturkartei wesentlich unterstützt. Frau F. Müller sowie die Herren G. Blind, E. Glässner, S. Grüner, L. Profke, H. Sachs (alle Stuttgart) haben sich freundlicherweise an der Korrektur beteiligt. Frl. Eisele (Stuttgart) hat einen Teil des druckfertigen Manuskriptes hergestellt. Ich danke allen Genannten herzlich, ebenso dem Verlag für seine Unterstützung.

Möge dieses Buch dazu beitragen, die Geometrie in einer Zeit wachzuhalten, in der eine als alleinseligmachend verstandene, abstrakte „Strukturmathematik“ die Quellen anschaulichen Denkens zu verschütten droht!

Stuttgart, im Januar 1973

K. LEICHTWEISS

# Inhaltsverzeichnis

## Einleitung

§ 1. Innere Produkte . . . . .	1
§ 2. Determinanten und Vektorprodukte . . . . .	4
§ 3. Invarianten bei Abbildungsgruppen, vollständiges Invariantensystem einer endlichen Punktmenge . . . . .	7
§ 4. Ein vollständiges System unabhängiger Invarianten einer endlichen Punktmenge . . . . .	12

## 1. Kapitel

### Kurventheorie

§ 5. Bogenlänge . . . . .	15
§ 6. Tangente und Schmiegebene . . . . .	17
§ 7. Krümmung und Windung . . . . .	20
§ 8. Rechnerische Bestimmung der Invarianten einer Kurve . . . . .	23
§ 9. Formeln von Frenet . . . . .	28
§ 10. Über das Vorzeichen der Windung . . . . .	31
§ 11. Kinematische Deutung von Frenets Formeln . . . . .	33
§ 12. Ebene Kurven, Vierscheitelsatz . . . . .	35
§ 13. Krümmungsmittelpunkt und Schmiegekreis . . . . .	37
§ 14. Schmiegekugeln . . . . .	38
§ 15. Bertrand-Kurven . . . . .	40
§ 16. Natürliche Gleichungen . . . . .	41
§ 17. Hilfssatz über lineare Differentialgleichungen . . . . .	44
§ 18. Böschungslinien . . . . .	45
§ 19. Böschungslinien auf einer Kugel . . . . .	47
§ 20. Böschungslinien auf einem Drehparaboloid . . . . .	48
§ 21. Evolventen, Evoluten . . . . .	49
§ 22. Isotrope Kurven . . . . .	50
§ 23. Integrallose Darstellung der isotropen Kurven . . . . .	52
§ 24. Übungsaufgaben und Bemerkungen . . . . .	54

## 2. Kapitel

### Extreme bei Kurven

§ 25. Die erste Variation der Bogenlänge . . . . .	59
§ 26. Variationsprobleme von J. Radon . . . . .	61
§ 27. Bestimmung der Extremalen unserer Variationsprobleme . . . . .	63

§ 28. Die Isoperimetrie des Kreises . . . . .	65
§ 29. Beweis von E. Schmidt . . . . .	67
§ 30. Ein Beweis von A. Hurwitz . . . . .	69
§ 31. Sätze über Raumkurven mit vorgegebener Krümmung . . . . .	72
§ 32. Übungsaufgaben und Bemerkungen . . . . .	77

## 3. Kapitel

**Streifen**

§ 33. Das begleitende Dreiein eines Streifens . . . . .	80
§ 34. Geometrische Deutung der Invarianten eines Flächenstreifens . . . . .	82
§ 35. Krümmungsstreifen, Schmiegestreifen und geodätische Streifen . . . . .	85
§ 36. Drehung eines Streifens um seine Kurve . . . . .	87
§ 37. Verbiegung eines Streifens . . . . .	89
§ 38. Der Parallelismus von Levi-Civita . . . . .	92
§ 39. Beweis von Radon für einen Satz von E. Schmidt . . . . .	94
§ 40. Übungsaufgaben und Bemerkungen . . . . .	97

## 4. Kapitel

**Anfangsgründe der Flächentheorie**

§ 41. Die erste Grundform . . . . .	99
§ 42. Die zweite Grundform . . . . .	103
§ 43. Sätze von Meusnier und Euler . . . . .	104
§ 44. Hauptkrümmungen . . . . .	108
§ 45. Das Gaußsche Theorema egregium . . . . .	110
§ 46. Krümmungslinien . . . . .	112
§ 47. Nabelpunkte . . . . .	115
§ 48. Satz von Dupin über rechtwinklige Flächennetze . . . . .	116
§ 49. Die winkeltreuen Abbildungen des euklidischen Raumes . . . . .	119
§ 50. Gauß' sphärisches Abbild einer Fläche . . . . .	121
§ 51. Normalensysteme . . . . .	124
§ 52. Asymptotenlinien . . . . .	125
§ 53. Asymptotenlinien auf Regelflächen . . . . .	127
§ 54. Konjugierte Netze . . . . .	129
§ 55. Ableitungsformeln von Weingarten . . . . .	130
§ 56. Satz von Beltrami und Enneper über die Windung der Asymptotenlinien . . . . .	133
§ 57. Die Ableitungsformeln von Gauß . . . . .	134
§ 58. Integrierbarkeitsbedingungen von Gauß und Codazzi . . . . .	135
§ 59. Fundamentalsatz der Flächentheorie . . . . .	138
§ 60. Ein Hilfssatz über ein System von linearen partiellen Differentialgleichungen . . . . .	140
§ 61. Kovariante Richtungsableitung eines Tangentialvektorfelds der Fläche . . . . .	145
§ 62. Kovektoren und Tensoren auf einer Fläche . . . . .	147
§ 63. Kovariante Ableitung von Tensorfeldern . . . . .	149
§ 64. Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen der Flächentheorie in Tensorschreibweise . . . . .	152
§ 65. G. Monge . . . . .	155
§ 66. Übungsaufgaben und Bemerkungen . . . . .	156

5. Kapitel

**Cartansche Differentialformen auf einer Fläche**

§ 67. Definition, alternierendes Produkt und äußeres Differential von Differentialformen . . . . . 162

§ 68. Rechengesetze, Transformation von Differentialformen . . . . . 166

§ 69. Zusammenhang der Differentialformen mit Tensoren . . . . . 170

§ 70. Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen für die „beweglichen Dreibeine“ E. Cartans . . . . . 173

§ 71. Grundgrößen der Flächentheorie in Cartanscher Schreibweise . . . . . 175

§ 72. Invariante Ableitungen bezüglich eines Paares von Pfaffschen Formen 178

§ 73. Ableitungsgleichungen und Integrierbarkeitsbedingungen in invarianter Schreibweise . . . . . 182

§ 74. Gesimsflächen und Kanalfächen . . . . . 186

§ 75. Übungsaufgaben und Bemerkungen . . . . . 190

6. Kapitel

**Innere Geometrie einer Fläche**

§ 76. Verbiegung . . . . . 192

§ 77. Geodätische Krümmung . . . . . 195

§ 78. Geodätische Linien . . . . . 196

§ 79. Geodätische Polarkoordinaten . . . . . 199

§ 80. Biegungsinvariante Deutung des Krümmungsmaßes . . . . . 203

§ 81. Zwei verschiedene Erklärungen der geodätischen Kreise . . . . . 204

§ 82. Flächen festen Krümmungsmaßes . . . . . 205

§ 83. Abbildung der Flächen festen negativen Krümmungsmaßes auf Poincarés Halbebene . . . . . 207

§ 84. Längentreue Abbildungen einer Fläche mit  $K = -1$  auf sich selbst . 210

§ 85. Das Integral der geodätischen Krümmung . . . . . 214

§ 86. Folgerungen aus der Integralformel von Gauß und Bonnet . . . . . 216

§ 87. Über Hüllkurven von geodätischen Linien . . . . . 218

§ 88. Beltramis erster Differentiator . . . . . 220

§ 89. Eine geometrische Anwendung des ersten Differentiators von Beltrami 222

§ 90. Beltramis zweiter Differentiator . . . . . 224

§ 91. Integralformeln von Gauß und Green . . . . . 225

§ 92. Zwei neue Formeln für die geodätische Krümmung . . . . . 227

§ 93. Isotherme Parameter . . . . . 228

§ 94. Winkeltreue Abbildung . . . . . 231

§ 95. Die Förderung der Flächentheorie durch Gauß . . . . . 232

§ 96. Übungsaufgaben und Bemerkungen . . . . . 233

7. Kapitel

**Fragen der Flächentheorie im Großen**

§ 97. Begriff einer differentialgeometrischen Fläche . . . . . 237

§ 98. Gesamtkrümmung geschlossener Flächen . . . . . 241

§ 99. Die Indexsummenformel Poincarés . . . . . 246

§ 100. Geschlossene Flächen mit konstanter mittlerer Krümmung . . . . . 250

§ 101. Geschlossene Flächen mit konstanter Gaußscher Krümmung . . . . . 253



§ 102. Die Integralformeln Minkowskis . . . . .	255
§ 103. Kongruenzsätze bzw. Ähnlichkeitssätze für zwei durch Parallelprojektion bzw. Zentralprojektion aufeinander bezogene geschlossene Flächen	259
§ 104. Kongruenzsätze für zwei durch parallele Normalen aufeinander bezogene Eiflächen . . . . .	268
§ 105. Ein Kongruenzsatz für isometrische Eiflächen . . . . .	274
§ 106. Verbiegung geschlossener Flächen . . . . .	281
§ 107. Existenz geschlossener bzw. vollständiger Flächen mit vorgegebener erster Grundform . . . . .	286
§ 108. Das Vorhandensein kürzester Wege auf Flächen mit vollständiger innerer Flächenmetrik . . . . .	291
§ 109. Schnittpunkt und konjugierte Punkte . . . . .	298
§ 110. Ein Satz Jacobis . . . . .	303
§ 111. Wiedersehensflächen . . . . .	310
§ 112. Ein Dreiecksvergleichssatz von A. D. Aleksandrow . . . . .	312
§ 113. Der innere Durchmesser einer Eifläche . . . . .	319
§ 114. Übungsaufgaben und Bemerkungen . . . . .	326

## 8. Kapitel

**Extreme bei Flächen**

§ 115. Erste Variation der Oberfläche . . . . .	329
§ 116. Die Minimalflächen als komplexe Schiebflächen . . . . .	330
§ 117. Formeln von Weierstraß für Minimalflächen . . . . .	332
§ 118. Formeln von Study für Minimalflächen . . . . .	335
§ 119. Eine Formel von Schwarz für die Oberfläche einer Minimalfläche . . . . .	338
§ 120. Bestimmung einer Minimalfläche durch einen Streifen . . . . .	339
§ 121. Zweite Variation der Oberfläche . . . . .	341
§ 122. Ein Satz von Bernstein über Minimalflächen im Großen . . . . .	344
§ 123. Isoperimetrie der Kugel . . . . .	347
§ 124. Wirkung von Steiners Symmetrisierung auf Rauminhalt und Oberfläche einer Eifläche . . . . .	349
§ 125. Konvergenzbeweis von Wilhelm Groß . . . . .	352
§ 126. Übungsaufgaben und Bemerkungen . . . . .	357
<b>Namen- und Sachverzeichnis . . . . .</b>	<b>360</b>