



Martin Brokate

Norbert Henze

Frank Hettlich

Andreas Meister

Gabriela Schranz-Kirlinger

Thomas Sonar

# Grundwissen Mathematikstudium

Höhere Analysis, Numerik und Stochastik

unter Mitwirkung von Daniel Rademacher



Springer Spektrum

## **Autoren**

Martin Brokate, TU München Zentrum Mathematik (M10), Garching, brokate@ma.tum.de

Norbert Henze, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), norbert.henze@kit.edu

Frank Hettlich, Karlsruher Institut für Technologie (KIT), frank.hettlich@kit.edu

Andreas Meister, Universität Kassel, meister@mathematik.uni-kassel.de

Gabriela Schranz-Kirlinger, TU Wien, g.schranz-kirlinger@tuwien.ac.at

Thomas Sonar, TU Braunschweig FB 1 Mathematik und Informatik, Braunschweig, t.sonar@tu-bs.de

ISBN 978-3-642-45077-8

ISBN 978-3-642-45078-5 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-45078-5

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2016

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Dr. Andreas Rüdinger, Bianca Alton

Redaktion: Martin Radke

Fotos/Zeichnungen: Thomas Epp, Joscha Kaiser, Norbert Henze

Satz: EDV-Beratung Frank Herweg, Leutershausen

Einbandentwurf: deblik, Berlin

Einbandabbildung: © Jos Leys

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer-Verlag GmbH Berlin Heidelberg ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+ Business Media ([www.springer.com](http://www.springer.com))

# Vorwort

Wenn mit ANA und LA, der Analysis und der Linearen Algebra, das Fundament für ein Mathematikstudium gelegt ist, wird dieses im zweiten und dritten Studienjahr vertieft und mit der Stochastik und der Numerischen Mathematik um zwei weitere Bereiche ergänzt. So liefert das Grundstudium einen Einstieg in die vier tragenden Säulen der modernen Mathematik: Algebra, Analysis, Numerische Mathematik und Stochastik. Mit dem vorliegenden zweiten Band des „Grundwissen Mathematikstudium“ möchten wir Autoren Sie auf Ihrem Weg in die Mathematik weiter anleiten. Dabei werden wie bereits im ersten Band (Arens et al., Grundwissen Mathematikstudium – Analysis und Lineare Algebra mit Querverbindungen, Springer Spektrum, 2013) auch Verknüpfungen der einzelnen Bereiche herausgestellt. Die beiden Lehrbücher sind aber so angelegt, dass mit ihnen auch unabhängig voneinander gearbeitet werden kann.

Zentral sind selbstverständlich die Beweise, von denen wir wieder einige „unter die Lupe“ nehmen. Auch die anderen didaktischen Elemente wie Beispielboxen, Ausblicke, Übersichten oder Selbstfragen wird der Leser in diesem Lehrwerk wiederfinden. Es sei angemerkt, dass bei der Verwendung der männlichen Sprachform stets alle Personen, unabhängig von ihrem Geschlecht, gemeint sind.

Die Stoffauswahl für den zweiten Teil unseres Grundwissen-Konzepts orientiert sich an den üblichen Curricula im zweiten bzw. dritten Studienjahr. Dabei gehen wir auch hier neue Wege, indem etwa die Stochastik und die Numerische Mathematik in einem Band zusammen präsentiert werden. Neben diesen beiden großen Bereichen werden durch Kapitel zu Differenzialgleichungen, Funktionentheorie, Funktionalanalysis, Mannigfaltigkeiten und Maßtheorie die Grundlagen der Analysis in verschiedene Richtungen erweitert. Damit eine solche Erweiterung in angemessener Ausführlichkeit dargestellt werden kann, haben wir auf Vertiefungen im Bereich der Algebra, der Geometrie und Topologie sowie der Optimierung verzichtet.

Wir wünschen Ihnen mit dem vorliegenden Buch viele neue Erkenntnisse und hoffen, Ihnen mit dem Grundwissen Mathematikstudium einen zuverlässigen Begleiter beim Erlernen der Grundbausteine der Mathematik und beim späteren Nachschlagen mit auf den Weg geben zu können.

Selbstverständlich ist dieses umfassende Buch nicht ohne die tatkräftige Hilfe anderer entstanden. Zunächst gilt unser Dank den Autoren des ersten Teils, die mit ihren Vorarbeiten einen passenden Rahmen für das vorliegende Werk geschaffen haben. Insbesondere bedanken wir uns bei Herrn Ch. Karpfinger, dessen Beschreibungen wir in Abschnitt 1.2 direkt übernehmen durften. Ebenso richten wir einen ganz besonderen Dank an Herrn D. C. Rademacher, der ganz wesentlich bei der Ausarbeitung des sechsten Kapitels mitgewirkt hat. Unser Dank gilt weiterhin Herrn S. Kopecz, dessen konstruktive Hinweise gepaart mit seiner sehr hilfreichen MATLAB-Programmierung uns bei vielen Beispielen zu didaktisch sinnvollen Illustrationen verhalf. Für aufmerksames Korrekturlesen und zahlreiche Verbesserungsvorschläge bedanken wir uns bei Herrn B. Klar und Frau V. Riess sowie bei Frau N. Bialowas und Frau C. Geiersbach. Darüber hinaus bedanken wir uns für ein perfektes Redigieren des Textes bei Herrn M. Radke. Er gab uns beim Schreiben die Sicherheit, dass alle Texte sehr sorgsam Korrektur gelesen werden. Weiterhin durften wir dankbar auf die Mitarbeit von Herrn T. Epp und Herrn J. Kaiser zählen, die viele unserer oft rudimentären Skizzen in ansprechende Abbildungen umgesetzt haben. Ganz besonders gilt unser Dank der Zusammenarbeit mit dem Verlag Springer Spektrum. Nur die strukturierende Übersicht von Frau B. Alton und die immer wieder beeindruckende Kompetenz von Herrn A. Rüdinger mit vielen kreativen und engagierten Vorschlägen machten die Umsetzung dieses umfangreichen und ehrgeizigen Projekts möglich.

Heidelberg, 2015

Martin Brokate, Norbert Henze, Frank Hettlich,  
Andreas Meister, Gabriela Schranz-Kirlinger, Thomas Sonar

## Die Autoren



**Prof. Dr. Martin Brokate** ist als Professor an der Fakultät für Mathematik der Technischen Universität München tätig. Er ist Co-Autor eines Lehrbuchs über Maß- und Integrationstheorie. In der Forschung befasst er sich mit ratenunabhängigen Evolutionen und optimalen Steuerungen.



**Prof. Dr. Andreas Meister** ist Professor für Angewandte Mathematik an der Universität Kassel und befasst sich mit numerischen Methoden für realitätsbezogene Problemstellungen. Neben dem Kurt-Hartwig-Siemers-Forschungspreis der Hamburgischen Wissenschaftlichen Stiftung erhielt er den Mentorship-Preis der Claussen-Simon-Stiftung und wurde mehrfach mit der Titel „Hochschullehrer des Semesters“ ausgezeichnet.



**Prof. Dr. Norbert Henze** ist seit 1991 Professor für Mathematische Stochastik am Karlsruher Institut für Technologie (KIT). 2015 wurde er mit dem Ars-legendi-Fakultätenpreis für exzellente Hochschullehre in der Kategorie Mathematik ausgezeichnet.



**A. o. Prof. Dr. Gabriela Schranz-Kirlinger** ist Dozentin an der Technischen Universität Wien und hat sehr viel Erfahrung sowohl in der Servicelehre als auch in der Ausbildung von Studierenden der Mathematik.



**PD Dr. Frank Hettlich** ist als Dozent an der Fakultät für Mathematik des Karlsruher Instituts für Technologie (KIT) tätig.



**Prof. Dr. Thomas Sonar** studierte Maschinenbau an der Fachhochschule Hannover und anschließend Mathematik und Informatik an der Leibniz-Universität. Er hat eine Professur für Technomathematik an der TU Braunschweig inne und ist Mitglied der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft BWG und korrespondierendes Mitglied der Hamburger Akademie der Wissenschaften.

## Unter Mitarbeit von



**Daniel C. Rademacher** studiert an der Universität Braunschweig Mathematik (Master). Das von ihm verfasste Kapitel 6 beruht zu großen Teilen auf der Vorlesung „Globale Analysis“ von Prof. Sonar.

# Inhaltsverzeichnis

Vorwort .....	V	5 Funktionentheorie – Analysis im Komplexen .....	95
1 Mathematik – eine lebendige Wissenschaft .....	1	5.1 Holomorphe Funktionen .....	96
1.1 Über Mathematik, Mathematiker und dieses Lehrbuch .....	2	5.2 Das Wegintegral im Komplexen .....	102
1.2 Die didaktischen Elemente dieses Lehrbuchs .....	5	5.3 Der Integralsatz von Cauchy .....	107
1.3 Ratschläge zum weiterführenden Studium der Mathematik .....	8	5.4 Nullstellen .....	116
1.4 Entwicklung und historische Einordnung der Gebiete .....	9	5.5 Identitätssatz und Maximumprinzip .....	119
2 Lineare Differenzialgleichungen – Systeme und Gleichungen höherer Ordnung .....	15	5.6 Singularitäten .....	124
2.1 Grundlagen .....	16	5.7 Laurentreihen .....	130
2.2 Systeme von Differenzialgleichungen .....	19	5.8 Der Residuensatz .....	134
2.3 Differenzialgleichungen höherer Ordnung . Zusammenfassung .....	27 34	Zusammenfassung .....	142
Aufgaben .....	36	Aufgaben .....	145
3 Randwertprobleme und nichtlineare Differenzialgleichungen – Funktionen sind gesucht .....	41	6 Differenzialformen und der allgemeine Satz von Stokes .....	149
3.1 Separable Differenzialgleichungen .....	42	6.1 Mannigfaltigkeiten in $\mathbb{R}^n$ .....	150
3.2 Exakte Differenzialgleichungen und integrierender Faktor .....	47	6.2 Differenzialformen .....	159
3.3 Randwertprobleme .....	52	6.3 Integration von Formen und der Satz von Stokes .....	183
3.4 Eigenwertprobleme .....	57	Zusammenfassung .....	203
3.5 Die Laplace-Transformation .....	62	Aufgaben .....	205
Zusammenfassung .....	66	7 Grundzüge der Maß- und Integrations- theorie – vom Messen und Mitteln .....	209
Aufgaben .....	68	7.1 Inhaltsproblem und Maßproblem .....	210
4 Qualitative Theorie – jenseits von analytischen und mehr als numerische Lösungen .....	71	7.2 Mengensysteme .....	212
4.1 Maximales Existenzintervall und stetige Abhängigkeit der Lösungen von den Daten .....	72	7.3 Inhalte und Maße .....	216
4.2 Stabilität und Fluss .....	74	7.4 Messbare Abbildungen, Bildmaße .....	227
4.3 Stabilität von linearen Systemen und Linearisierung .....	81	7.5 Das Maß-Integral .....	236
4.4 Der Satz von Poincaré-Bendixson .....	85	7.6 Nullmengen, Konvergenzsätze .....	244
4.5 Bifurkation: Verzweigung von Gleichgewichtspunkten .....	86	7.7 $\mathcal{L}^p$ -Räume .....	247
Zusammenfassung .....	88	7.8 Maße mit Dichten .....	251
Aufgaben .....	91	7.9 Produktmaße, Satz von Fubini .....	258
		Zusammenfassung .....	264
		Aufgaben .....	266
		8 Lineare Funktionalanalysis – Operatoren statt Matrizen .....	273
		8.1 Lineare beschränkte Operatoren .....	274
		8.2 Grundlegende Prinzipien der Funktionalanalysis .....	288
		8.3 Funktionale und Dualräume .....	295
		Zusammenfassung .....	308
		Aufgaben .....	309

<b>9 Fredholm-Gleichungen – kompakte Störungen der Identität</b> .....	<b>313</b>	<b>14 Numerik linearer Gleichungssysteme – Millionen von Variablen im Griff</b> .....	<b>483</b>
9.1 Kompakte Mengen und Operatoren .....	314	14.1 Gauß-Elimination und QR-Zerlegung .....	484
9.2 Die Riesz-Theorie .....	320	14.2 Splitting-Methoden .....	499
9.3 Die Fredholm'sche Alternative .....	325	14.3 Mehrgitterverfahren .....	512
Zusammenfassung .....	336	14.4 Krylov-Unterraum-Methoden .....	521
Aufgaben .....	337	Zusammenfassung .....	541
		Aufgaben .....	543
<b>10 Hilberträume – fast wie im Anschauungsraum</b> .....	<b>341</b>	<b>15 Numerische Eigenwertberechnung – Einschließen und Approximieren</b> .....	<b>547</b>
10.1 Funktionale in Hilberträumen .....	342	15.1 Eigenwerteinschließungen .....	548
10.2 Fouriertheorie .....	349	15.2 Potenzmethode und Varianten .....	555
10.3 Spektraltheorie kompakter, selbstadjungierter Operatoren .....	358	15.3 Jacobi-Verfahren .....	561
Zusammenfassung .....	369	15.4 QR-Verfahren .....	568
Aufgaben .....	370	Zusammenfassung .....	578
		Aufgaben .....	579
<b>11 Warum Numerische Mathematik? – Modellierung, Simulation und Optimierung</b> .....	<b>373</b>	<b>16 Lineare Ausgleichsprobleme – im Mittel das Beste</b> .....	<b>583</b>
11.1 Chancen und Gefahren .....	374	16.1 Existenz und Eindeutigkeit .....	584
11.2 Ordnungssymbole und Genauigkeit .....	378	16.2 Lösung der Normalgleichung .....	591
11.3 Kondition und Stabilität .....	384	16.3 Lösung des Minimierungsproblems .....	593
Zusammenfassung .....	391	16.4 Störungstheorie .....	603
Aufgaben .....	394	Zusammenfassung .....	605
		Aufgaben .....	608
<b>12 Interpolation – Splines und mehr</b> .....	<b>397</b>	<b>17 Nichtlineare Gleichungen und Systeme – numerisch gelöst</b> .....	<b>611</b>
12.1 Der Weierstraß'sche Approximationssatz und die Bernstein-Polynome .....	398	17.1 Bisektion, Regula Falsi, Sekantenmethode und Newton-Verfahren .....	612
12.2 Die Lagrange'sche Interpolationsformel ...	401	17.2 Die Theorie der Iterationsverfahren .....	621
12.3 Newton'sche Interpolationsformel .....	407	17.3 Das Newton-Verfahren und seine Varianten .....	630
12.4 Splines .....	416	17.4 Die Dynamik von Iterationsverfahren – Ordnung und Chaos .....	642
12.5 Trigonometrische Polynome .....	422	Zusammenfassung .....	647
Zusammenfassung .....	431	Aufgaben .....	650
Aufgaben .....	435		
<b>13 Quadratur – numerische Integrationsmethoden</b> .....	<b>439</b>	<b>18 Numerik gewöhnlicher Differenzialgleichungen – Schritt für Schritt zur Trajektorie</b> .....	<b>655</b>
13.1 Grundlegende Definitionen .....	440	18.1 Grundlagen .....	656
13.2 Interpolatorische Quadraturformeln .....	443	18.2 Einschrittverfahren .....	658
13.3 Eine Fehlertheorie mit Peano-Kernen .....	453	18.3 Mehrschrittverfahren .....	673
13.4 Von der Trapezregel durch Extrapolation zu neuen Ufern .....	459	18.4 Unbedingt positivitatserhaltende Verfahren .....	687
13.5 Gauß-Quadratur .....	464	Zusammenfassung .....	695
13.6 Was es noch gibt: Adaptive Quadratur, uneigentliche Integrale und optimale Quadraturverfahren .....	473	Aufgaben .....	697
Zusammenfassung .....	477		
Aufgaben .....	480		

<b>19 Wahrscheinlichkeitsräume – Modelle für stochastische Vorgänge</b> . . . . .	<b>701</b>	<b>22 Stetige Verteilungen und allgemeine Betrachtungen – jetzt wird es analytisch</b> . . . . .	<b>813</b>
19.1 Grundräume und Ereignisse . . . . .	702	22.1 Verteilungsfunktionen und Dichten . . . . .	814
19.2 Zufallsvariablen . . . . .	705	22.2 Transformationen von Verteilungen . . . . .	822
19.3 Das Kolmogorov'sche Axiomensystem . . . . .	707	22.3 Kenngrößen von Verteilungen . . . . .	833
19.4 Verteilungen von Zufallsvariablen, Beispiel-Klassen . . . . .	709	22.4 Wichtige stetige Verteilungen . . . . .	841
19.5 Folgerungen aus den Axiomen . . . . .	714	22.5 Bedingte Verteilungen und bedingte Dichten . . . . .	846
19.6 Elemente der Kombinatorik . . . . .	719	22.6 Charakteristische Funktionen (Fourier-Transformation) . . . . .	853
19.7 Urnen- und Fächer-Modelle . . . . .	724	Zusammenfassung . . . . .	859
Zusammenfassung . . . . .	728	Aufgaben . . . . .	861
Aufgaben . . . . .	731		
		<b>23 Konvergenzbegriffe und Grenzwertsätze – Stochastik für große Stichproben</b> . . . . .	<b>867</b>
<b>20 Bedingte Wahrscheinlichkeit und Unabhängigkeit – Meister Zufall hängt (oft) ab</b> . . . . .	<b>735</b>	23.1 Konvergenz fast sicher, stochastisch und im $p$ -ten Mittel . . . . .	868
20.1 Modellierung mehrstufiger stochastischer Vorgänge . . . . .	736	23.2 Das starke Gesetz großer Zahlen . . . . .	872
20.2 Bedingte Wahrscheinlichkeiten . . . . .	739	23.3 Verteilungskonvergenz . . . . .	878
20.3 Stochastische Unabhängigkeit . . . . .	744	23.4 Zentrale Grenzwertsätze . . . . .	887
20.4 Folgen unabhängiger Zufallsvariablen . . . . .	751	Zusammenfassung . . . . .	895
20.5 Markov-Ketten . . . . .	754	Aufgaben . . . . .	896
Zusammenfassung . . . . .	762		
Aufgaben . . . . .	764	<b>24 Grundlagen der Mathematischen Statistik – vom Schätzen und Testen</b> . . . . .	<b>901</b>
		24.1 Einführende Betrachtungen . . . . .	902
<b>21 Diskrete Verteilungsmodelle – wenn der Zufall zählt</b> . . . . .	<b>769</b>	24.2 Punktschätzung . . . . .	906
21.1 Diskrete Zufallsvariablen . . . . .	770	24.3 Konfidenzbereiche . . . . .	916
21.2 Erwartungswert und Varianz . . . . .	773	24.4 Statistische Tests . . . . .	927
21.3 Wichtige diskrete Verteilungen . . . . .	782	24.5 Optimalitätsfragen: Das Lemma von Neyman-Pearson . . . . .	944
21.4 Kovarianz und Korrelation . . . . .	788	24.6 Elemente der nichtparametrischen Statistik . . . . .	949
21.5 Bedingte Erwartungswerte und bedingte Verteilungen . . . . .	794	Zusammenfassung . . . . .	963
21.6 Erzeugende Funktionen . . . . .	800	Aufgaben . . . . .	965
Zusammenfassung . . . . .	803		
Aufgaben . . . . .	806	Hinweise zu den Aufgaben . . . . .	971
		Lösungen zu den Aufgaben . . . . .	982
		Bildnachweis . . . . .	989
		Index . . . . .	991



# Verzeichnis der Übersichten

<b>Approximation</b> und Interpolation .....	432	Integration von Formen auf <b>Mannigfaltigkeiten</b>	
<b>Banachräume</b> und ihre Dualräume .....	282	im $\mathbb{R}^n$ .....	204
<b>Differenzialformen</b> .....	185	<b>Mehrschrittverfahren</b> aus der Klasse der	
Zusammenhang iterativer und <b>direkter Verfahren</b> ..	485	Integrationsmethoden .....	686
<b>Diskrete Verteilungen</b> .....	789	Die <b>Newton-Verfahren</b> zur Lösung von Systemen	
Eigenwerteinschließungen und numerische Verfahren		$f(x) = 0$ .....	649
für <b>Eigenwertprobleme</b> .....	577	Der Satz von <b>Picard-Lindelöf</b> .....	22
<b>Fehlerabschätzung</b> und Vorkonditionierung .....	525	Interpolatorische <b>Quadraturformeln</b> auf	
<b>Fehlertypen</b> .....	390	äquidistanten Gittern .....	478
<b>Hilberträume</b> .....	364	Interpolatorische <b>Quadraturformeln</b> auf	
Zur <b>Holomorphie</b> äquivalente Eigenschaften .....	114	nichtäquidistanten Gittern .....	479
<b>Konsistenz</b> , Stabilität und Konvergenz .....	392	Einfache Verfahren für <b>skalare Gleichungen</b>	
<b>Konvergenzbegriffe</b> in der Analyse, der Maßtheorie		$f(x) = 0$ .....	648
und der Stochastik .....	885	Unterschiede zwischen <b>Splitting-Methoden</b> und	
Eine kleine <b>Literaturübersicht</b> zur numerischen		Projektionsverfahren .....	522
Mathematik .....	393	<b>Stetige Verteilungen</b> .....	847
<b>Lösungstheorie</b> und Numerik linearer Ausgangs-		<b>Tensoren</b> , Dachprodukt und Tangentialraum .....	173
probleme .....	606	<b>Urnen-</b> und <b>Fächer-Modelle</b> .....	728
<b>Mannigfaltigkeiten</b> in $\mathbb{R}^n$ .....	160		