

Springer-Lehrbuch

Herbert Balke

Einführung in die Technische Mechanik

Festigkeitslehre

3., aktualisierte Auflage

 Springer Vieweg

Herbert Balke
Technische Universität Dresden
Institut für Festkörpermechanik
01062 Dresden

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-40980-6

ISBN 978-3-642-40981-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-40981-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Vieweg

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2008, 2010, 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Vieweg ist eine Marke von Springer DE.

Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.springer-vieweg.de

Vorwort zur dritten Auflage

Die anhaltende Nachfrage machte eine dritte Auflage des Buches erforderlich. Bei dieser Gelegenheit wurde ein neues Kapitel über die wesentlichen Quellen für die grundlegenden mechanischen Bilanzen angefügt. Die Quellen belegen die Zusammenführung der statischen Gleichgewichtsprinzipien, einschließlich der unverzichtbaren Momentenbilanz nach ARCHIMEDES, und des Bewegungsgesetzes von NEWTON in den Grundgesetzen der Mechanik kontinuierlicher Körper durch EULER. Die in den Grundgesetzen umgesetzten konzeptionellen Ideen sind in meiner dreibändigen „Einführung in die Technische Mechanik“ durchgängig berücksichtigt worden.

Die dritte Auflage habe ich benutzt, um noch vorhandene Flüchtigkeitsfehler zu korrigieren und einige textliche Verbesserungen vorzunehmen.

Mein Dank gilt allen Lesern, die mir mit ihren konstruktiven Hinweisen und Diskussionen behilflich waren. Die Herstellung des reproduktionsreifen Manuskriptes lag wieder in den bewährten Händen von Frau K. Wendt. Hierfür bedanke ich mich ganz herzlich. Nicht zuletzt bin ich dem Springer-Verlag für die erwiesene Geduld und die gute Zusammenarbeit verbunden.

Dresden, im Frühjahr 2014

H. Balke

Vorwort zur ersten Auflage

Die „Festigkeitslehre“ schließt, wie die schon vorliegende „Kinetik“, an die „Statik“ des dreibändigen Lehrbuches „Einführung in die Technische Mechanik“ an. Ihr vordergründiges Ziel besteht in der Entwicklung der Fähigkeit, Bauteile zu dimensionieren und Tragfähigkeitsnachweise zu führen.

Inhalt und Umfang des Buches entsprechen im Wesentlichen meiner zweisemestrigen Vorlesung im Grundstudium der Studiengänge Maschinenbau, Verfahrenstechnik und Werkstoffwissenschaft an der Technischen Universität Dresden, orientieren sich aber ebenso am Stoff für vergleichbare Studiengänge anderer Technischer Hochschulen und Universitäten. So fließen die Hauptbestandteile des Buches auch in die Lehre der Technischen Mechanik für den interdisziplinären Studiengang Mechatronik unserer Universität ein.

Konzeptionell beruht die Festigkeitslehre in diesem Buch auf den statischen Grundgesetzen, d. h. der Kräftebilanz und der Momentenbilanz als Bedingungen für das Gleichgewicht belasteter Körper einschließlich beliebiger Körperteile, den kinematischen Beziehungen und den Materialgleichungen. Das Konzept ist mit Berücksichtigung von Trägheitslasten widerspruchsfrei auf ki-

netische Probleme erweiterbar. Es ermöglicht, durch begleitende Beispiele unterstützt, von einfachen Situationen schrittweise zu komplexeren Anordnungen überzugehen und so das für Ingenieure unverzichtbare Abstraktions- und Modellierungsvermögen zu entwickeln. Das Konzept vermittelt einen direkten Anschluss zur modernen Kontinuumsmechanik als Grundlage computergestützter Berechnungsmethoden sowie zu einer allgemeineren Feldtheorie, die neben den mechanischen auch thermodynamische und elektromagnetische Erscheinungen umfasst. Eine solche Theorie erlangt zunehmend Bedeutung, da immer häufiger technische Strukturen aus Werkstoffen mit physikalisch gekoppelten Eigenschaften, so genannte smarte oder intelligente Materialien, zum Einsatz kommen.

Ein nachhaltiges Eindringen in die Inhalte der Festigkeitslehre ist nur durch selbstständige Bearbeitung entsprechender Übungsaufgaben möglich. Deshalb wird dem Leser empfohlen, die Probleme der ausgeführten Beispiele zunächst ohne Zuhilfenahme der angegebenen Ergebnisse zu lösen.

Meinen verehrten Lehrern, den Herren Professoren H. Göldner, F. Holzweißig, G. Landgraf und A. Weigand, bin ich dafür verpflichtet, dass sie meine Begeisterung für das Fach „Technische Mechanik“ geweckt haben. Besonderer Dank gilt Herrn Prof. H. Göldner, der als Hauptinitiator der Studienrichtung „Angewandte Mechanik“ an der Technischen Universität Dresden nicht nur die organisatorischen Voraussetzungen für mein vertieftes Mechanikstudium geschaffen, sondern auch mit seiner langjährigen Lehrtätigkeit inhaltliche Akzente gesetzt und damit die Stoffauswahl in meinem Buch beeinflusst hat.

In diesem Zusammenhang sei auf den in elf Auflagen erschienenen „Leitfaden der Technischen Mechanik“ von H. Göldner und F. Holzweißig verwiesen, dessen bewährte Stoffdarlegung anhand von Beispielen auch von mir bevorzugt wurde. Die im „Leitfaden“ wie in vielen einführenden Mechaniklehrbüchern immer wieder anzutreffende Vermischung einer Kontinuumselastostatik mit einer Punktkinetik wurde jedoch in meiner dreibändigen Einführung in die Technische Mechanik bewusst vermieden, weil sie wegen ihrer konzeptionellen Widersprüchlichkeit das Verständnis der Mechanik als Ganzes erschwert. Stattdessen dient die in der Technik praktizierte Kontinuums-hypothese durchgängig als allgemein gültige Grundannahme.

Im Entstehungszeitraum des Buches konnte ich zahlreiche fachliche Kontakte nutzen. So haben mich die mir von Herrn Prof. R. Kreißig und Herrn Prof. J. Naumann (Technische Universität Chemnitz) freundlicherweise gewährten Gespräche in der Wahl meines Konzeptes bestärkt.

Mit Herrn Prof. V. Ulbricht stand und stehe ich in einer ständigen Diskussion über die inhaltliche Abstimmung unserer beiden abwechselnd laufenden Großvorlesungen zur Technischen Mechanik. Das gemeinsame Bemühen um

methodische und didaktische Verbesserungen der Lehrveranstaltung hat sich auch vorteilhaft auf die Erarbeitung des Buchmanuskriptes ausgewirkt.

Die in der Lehre langjährig erfahrenen Herren Prof. S. Sähn, Dr.-Ing. habil. V. Hellmann, Doz. Dr.-Ing. habil. D. Weber und Dr.-Ing. J. Brummund haben das gesamte Manuskript kritisch gelesen und mir zahlreiche nützliche Anmerkungen übermittelt.

Der Hinweis auf die Analogie zwischen elastostatischen Stabilitätsproblemen und thermodynamischen Phasenumwandlungen stammt von Herrn Dr. rer. nat. H.-A. Bahr, die grafische Darstellung der dazugehörigen Diagramme von Herrn Dipl.-Ing. P. Neumeister. Die numerischen Rechnungen zur Veranschaulichung des Prinzips von DE SAINT VENANT wurden von Herrn Dr.-Ing. V. B. Pham ausgeführt.

Bei der Nachrechnung der Beispiele haben mich die Herren Dipl.-Ing. C. Häusler, A. Liskowsky und P. Neumeister unterstützt. An der Textkorrektur waren Frau Dr.-Ing. K. Thielsch, Frau Dr.-Ing. B. Hildebrandt sowie die Herren Dipl.-Ing. G. Haasemann, M. Hofmann, M. Kästner und A. Liskowsky beteiligt. Die Kontrolllesung der vorletzten Manuskriptversion besorgten die Herren Dipl.-Ing. C. Häusler und P. Neumeister. Dabei hat mich Herr Dipl.-Ing. P. Neumeister noch zu einigen Verbesserungen im letzten Kapitel ange-regt. Allen genannten Personen bin ich zu Dank verpflichtet.

Der größte Teil meiner Bildvorlagen wurde von Frau C. Fischer in eine elektronische Form gebracht. Die Herstellung des reproduktionsreifen Manuskriptes lag wieder in den bewährten Händen von Frau K. Wendt. Bei der Text- und Zeichenverarbeitung von Herrn Dipl.-Ing. C. Häusler unterstützt, hat sie mit unermüdlichem Einsatz nicht nur den Schriftsatz realisiert, sondern auch meine zahlreichen ergänzenden Bildvorlagen in die elektronische Fassung eingearbeitet. Hierfür bedanke ich mich ganz herzlich. Nicht zuletzt bin ich dem Springer-Verlag für die erwiesene Geduld und die gute Zusammenarbeit verbunden.

Dresden, im Frühjahr 2008

H. Balke

Inhaltsverzeichnis

Einführung	1
1 Zug, Druck und Schub	
1.1 Verschiebung, Dehnung und Gleitung.....	7
1.2 Spannung.....	8
1.3 Elastisches Material	14
1.4 Wärmedehnung	17
1.5 Dimensionierung bei einfachen Beanspruchungen	18
1.6 Beispiele	18
1.7 Ergänzungen zum einachsigen Spannungszustand.....	23
1.7.1 Berücksichtigung von Volumenkräften.....	23
1.7.2 Spannungen am schrägen Schnitt	25
1.7.3 Näherungen für den einachsigen Spannungszustand	26
2 Allgemeine Spannungs- und Verzerrungszustände	
2.1 Spannungsvektor.....	31
2.2 Zweiachsiger Spannungszustand	32
2.3 Dreiachsiger Spannungszustand.....	39
2.4 Verschiebungen und Verzerrungen.....	46
2.5 HOOKEsches Gesetz	52
2.6 Arbeit, Verzerrungsarbeit und -energie	55
3 Reine Torsion gerader Stäbe	
3.1 Torsion von Stäben mit Kreisquerschnitt.....	63
3.2 Torsion von Stäben mit Rechteckquerschnitt.....	68
3.3 Torsion dünnwandiger Stäbe mit offenem Querschnitt ...	70
3.4 Torsion dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Querschnitt.....	72
4 Reine Biegung gerader Balken	
4.1 Voraussetzungen	81
4.2 Spannungen bei gerader Biegung	82
4.3 Spannungen bei schiefer Biegung.....	87
4.3.1 Bekannte Hauptachsen im Schwerpunkt	88
4.3.2 Beliebige Schwerpunktsachsen.....	89
4.4 Spannungen infolge Biegemoment und Längskraft.....	95
4.5 Biegeverformung	98
4.5.1 Differenzialgleichung der elastischen Linie	98
4.5.2 Anwendungsfälle	100
4.5.3 Differenzialgleichung vierter Ordnung.....	110
4.5.4 Elastische Linie bei schiefer Biegung.....	112

4.5.5	Elastische Linie bei veränderlicher Steifigkeit.....	113
4.5.6	Biegung infolge Temperatur	113
5	Querkraftbiegung prismatischer Balken	
5.1	Balken mit gedrunenem Querschnitt	119
5.2	Balken mit dünnwandigen offenen Querschnitten	126
6	Festigkeithypothesen	
6.1	Problem der Festigkeitsbewertung.....	133
6.2	Beispiele für Festigkeithypothesen.....	133
7	Energiemethoden	
7.1	Einflusszahlen.....	143
7.2	Satz von CASTIGLIANO	148
7.3	Verzerrungsenergie der Balken und Stäbe.....	149
7.4	Symmetrie und Antisymmetrie	151
7.5	Anwendungsfälle	153
7.5.1	Gerade Biegung	153
7.5.2	Berücksichtigung von Biegung und Torsion.....	166
7.5.3	Längskrafteinfluss.....	168
8	Elastostatische Stabilitätsprobleme	
8.1	Gleichgewichtsarten konservativer Systeme vom Freiheitsgrad 1	173
8.1.1	Verzweigung und Stabilität der Gleichgewichtslösungen .	178
8.1.2	Imperfektionseinfluss	185
8.1.3	Durchschlagproblem	191
8.2	Diskrete konservative Systeme von höherem Freiheitsgrad	193
8.3	Knicken elastischer Stäbe	194
8.3.1	Gelenkig gelagerter Knickstab	195
8.3.2	Beiderseitig eingespannter Knickstab	204
8.3.3	Knickstäbe mit mehreren Bereichen.....	207
8.3.4	Begrenzung der elastischen Theorie infolge Plastizität ...	209
9	Rotationssymmetrische Spannungszustände	
9.1	Membrantheorie von Rotationsschalen	215
9.2	Kreiszyylinder und Kreisscheiben.....	219
9.2.1	Grundlagen	219
9.2.2	Ebener Spannungszustand	223
9.2.3	Ebener Verzerrungszustand	232
9.2.4	Konstante Axialdehnung.....	235
9.3	Rotationssymmetrisch belastete Kreisplatten.....	238
9.3.1	Voraussetzungen	238

9.3.2	Grundgleichungen	240
9.3.3	Anwendungsfälle	246
10	Kerb- und Rissprobleme	
10.1	Das Prinzip von DE SAINT VENANT	253
10.2	Spannungsüberhöhungen und Formzahl	259
10.3	Grundidee der Bruchmechanik	262
11	Inelastisches Materialverhalten	
11.1	Elastoplastizität	269
11.2	Viskoelastizität	272
12	Zusammenfassung der Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie	
12.1	Globale und lokale Kräfte- und Momentenbilanzen	279
12.2	Kinematische Beziehungen	288
12.3	Linear-elastische Materialgleichungen	294
12.4	Elastostatische Randwertaufgaben	294
12.5	Elastokinetische Anfangsrandwertaufgaben	295
13	Historische Anmerkungen	
13.1	Zur Geschichte der statischen Bilanzen	304
13.2	Zur Geschichte der kinetischen Bilanzen	306
	Literaturverzeichnis zu Kapitel 13	311
	Ausgewählte Literatur	313
	Index	317

Einführung

Die Festigkeitslehre hat die Untersuchung der Tragfähigkeit belasteter Bauteile zum Inhalt. Sie schließt an die Statik an.

In der Statik wurden die als einfache Körper idealisierten Bauteile zunächst als starr angenommen. Die Grundgesetze der Statik, d. h. die Kräftebilanz und die Momentenbilanz als Bedingungen für das Gleichgewicht belasteter Körper und beliebiger Körperteile, verkürzt als Gleichgewichtsbedingungen, Gleichgewichtsbilanzen oder statische Bilanzen bezeichnet, erlaubten die Berechnung der Schnittreaktionen statisch bestimmter Tragwerke. In der Realität verursachen die angreifenden Lasten mittels der Schnittreaktionen Verformungen der als Kontinuum betrachteten Körper. Diese Verformungen, die Ausdruck der ungleichmäßig verteilten Verschiebungen der Körperpunkte sind, gehen mit den lokalen Beanspruchungen der Körper einher.

Als Beanspruchungen werden die spezifischen Größen Spannung und Verzerrung eingeführt. Erstere ist eine statische Größe und folglich in den Gleichgewichtsbedingungen zu bilanzieren. Letztere ergibt sich kinematisch aus dem Verschiebungszustand der Körperpunkte. Beide sind frei von Körperabmessungen und dürfen gewisse materialspezifische Grenzwerte nicht überschreiten. Sie stehen in einem materialtypischen Zusammenhang, der für viele wichtige Konstruktionsmaterialien innerhalb bestimmter Grenzen linear ist. Die Gleichung, die den materialtypischen Zusammenhang einschließlich seines Gültigkeitsbereiches beschreibt und als Materialgleichung bezeichnet wird, muss an die Ergebnisse von Experimenten angepasst werden.

In den meisten technischen Anwendungsfällen sind die Verschiebungen der gelagerten Körper sehr viel kleiner als die typischen Körperabmessungen. Es werden dann lineare Beziehungen zwischen Verschiebungen und Verzerrungen benutzt, wobei Verzerrungsbeträge bis zu etwa 5 % meist zugelassen werden können, sofern keine material- oder funktionsbedingten Einschränkungen vorliegen. Unter diesen Voraussetzungen sind die Verformungen in den Gleichgewichtsbedingungen bis auf Ausnahmen wie z. B. bei Stabilitätsuntersuchungen vernachlässigbar.

Die Gesamtheit der für den ganzen Körper und beliebige Teile desselben, darunter differenzielle Körperelemente, geltenden statischen Bilanzen sowie der lokal geltenden kinematischen Beziehungen und Materialgleichungen bildet die Grundlage für die Berechnung der im Körper vorliegenden Verteilungen („Felder“) von Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen. Dabei werden in einfacheren Fällen zur Gewinnung leicht handhabbarer analytischer Formeln spezielle statische oder kinematische Annahmen hinzugezogen, so bei der Betrachtung der Stäbe unter Zug bzw. Druck und Torsion sowie der Balken unter Biegung und Querkraftschub. Die genannten Voraussetzungen

und Annahmen erlauben die Untersuchung von sowohl statisch bestimmten als auch statisch unbestimmten Anordnungen.

Die Beurteilung der Bauteilfestigkeit bei Kombination verschiedener Beanspruchungen im Vergleich zu Versuchsdaten aus einfachen Experimenten erfordert besondere Festigkeitshypothesen, in denen u. U. inelastisches Materialverhalten berücksichtigt werden muss. Die Bereitstellung dieser Hypothesen ermöglicht zusammen mit der Berechnung von Spannungen und Verzerrungen die Lösung elementarer Dimensionierungsaufgaben.

Häufig interessieren nur die Verformungen an diskreten Punkten von Stabanordnungen einschließlich damit verbundener statisch unbestimmter Reaktionen. Diese lassen sich besonders effektiv unter Nutzung von Energiemethoden bestimmen, welche in anwendungsbereiter Form mitgeteilt werden.

Bauteilversagen kann auch ohne Überschreiten der Materialfestigkeit eintreten, wenn die belastete Anordnung oberhalb einer kritischen Last ihre Stabilität oder ursprüngliche Steifigkeit verliert. Die genannten Phänomene beruhen auf der Geometrieabhängigkeit der Gleichgewichtsbedingungen und Materialgleichungen. Sie sind Ausdruck der Nichtlinearität des Gesamtgleichungssystems. Die damit verbundene Verzweigung der Gleichgewichtslösungen und Unterschiedlichkeit der Gleichgewichtsarten werden an diskreten konservativen Systemen erläutert. Im Fall schlanker elastischer Druckstäbe liefern die Verzweigungslösungen die kritischen Knickkräfte.

Gestützt auf die gewonnenen Erfahrungen bei der Ermittlung der elementaren Spannungs- und Verformungsverteilungen in Stäben und Balken, werden die statischen Bilanzen, die kinematischen Beziehungen und die Materialgleichungen auf rotationssymmetrische Anordnungen, darunter Scheiben, dickwandige Zylinder und Platten, angewendet und die entsprechenden Felder berechnet.

Die ermittelten Ergebnisse für die Scheibe mit Kreisloch unter Zug verweisen beispielhaft auf die Bedeutung von Spannungsüberhöhungen sowie das Abklingverhalten von Gleichgewichtslastgruppen gemäß dem Prinzip von DE SAINT VENANT (1797–1886) und führen auf die Grundidee der Bruchmechanik.

Festigkeitshypothesen, die vor dem Versagen nur einen linear-elastischen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen berücksichtigen, sind in ihrer Anwendbarkeit begrenzt. Dies wird an den Fällen elastoplastischen und viskoelastischen Materialverhaltens demonstriert und unterstreicht die Bedeutung inelastischer Verzerrungen als mögliche Beanspruchungsparameter.

Der Inhalt des vorliegenden Buches wird hauptsächlich durch die linear-elastische Modellierung der Spannungs- und Verzerrungsfelder einfacher Anordnungen bestimmt. Die Herleitung der entsprechenden analytischen For-

meln dient der Entwicklung des Grundverständnisses im Umgang mit den Ausgangshypothesen und -gleichungen. Die gewonnenen Formeln ermöglichen die schnelle Lösung einfacher Festigkeitsprobleme sowie Abschätzungen in komplizierteren Situationen. Auch bei Anwendung kommerzieller Modellierungssoftware sind sie unverzichtbar für den Test der Computerprogramme und die qualitative Kontrolle der Ergebnisse.

Der modernen Modellierungssoftware, die zunehmende Nutzung erfährt, liegen die statischen Bilanzen, die kinematischen Beziehungen und die Materialgleichungen in allgemeiner Form zugrunde. Zweckmäßigerweise wird deshalb ergänzend auf diese allgemeinen Zusammenhänge eingegangen. Dabei werden kinetische Terme in geometrisch linearisierter Form berücksichtigt. Die Kenntnis der angegebenen Gleichungen stellt eine zwingende Voraussetzung für den verantwortungsvollen Umgang mit der auf diesen Gleichungen beruhenden Modellierungssoftware dar.

Die in der Festigkeitslehre berechneten Felder bilden die unverzichtbare Grundlage für die Beurteilung der Tragfähigkeit und Sicherheit von Bauteilen. Das beschriebene Konzept dient darüber hinaus als bewährte Ausgangsbasis für das Eindringen in eine allgemeinere nichtlineare Kontinuumsmechanik von Körpern aus beliebigen Materialien und die Formulierung weitergehender Feldprobleme deformierbarer Körper unter Berücksichtigung thermischer und elektromagnetischer Erscheinungen. Es ermöglicht damit die Nutzung der sich schnell entwickelnden Computersoftware zur numerischen Bearbeitung immer anspruchsvollerer Modelle.

Die für das Verständnis der Festigkeitslehre erforderlichen Voraussetzungen umfassen außer den schon in der Statik benötigten Hilfsmitteln Kenntnisse in folgenden mathematischen Teilgebieten: lineare Transformation von Koordinatensystemen, Hauptachsentransformation symmetrischer Matrizen, homogene lineare Gleichungssysteme, Funktionen von mehreren Variablen, partielle Ableitungen, Linien-, Flächen- und Volumenintegrale sowie gewöhnliche lineare Differenzialgleichungen. Der Rückgriff auf diese Kenntnisse wird jedoch so gering wie möglich gehalten und z. T. im Zusammenhang mit den jeweiligen mechanischen Problemen durch Erläuterungen unterstützt.