
Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Mathematik Primarstufe und Sekundarstufe I + II

Herausgegeben von
Prof. Dr. Friedhelm Padberg
Universität Bielefeld

Bisher erschienene Bände (Auswahl):

Didaktik der Mathematik

- P. Bardy: Mathematisch begabte Grundschul Kinder – Diagnostik und Förderung (P)
M. Franke: Didaktik der Geometrie (P)
M. Franke/S. Ruwisch: Didaktik des Sachrechnens in der Grundschule (P)
K. Hasemann/H. Gasteiger: Anfangsunterricht Mathematik (P)
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe (P)
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Primarstufe, Band 2 (P)
F. Käpnick: Mathematiklernen in der Grundschule (P)
G. Krauthausen: Digitale Medien im Mathematikunterricht der Grundschule (P)
G. Krauthausen/P. Scherer: Einführung in die Mathematikdidaktik (P)
G. Krummheuer/M. Fetzner: Der Alltag im Mathematikunterricht (P)
F. Padberg/C. Benz: Didaktik der Arithmetik (P)
P. Scherer/E. Moser Opitz: Fördern im Mathematikunterricht der Primarstufe (P)
A.-S. Steinweg: Algebra in der Grundschule –
Muster und Strukturen/Gleichungen/funktionale Beziehungen (P)

G. Hinrichs: Modellierung im Mathematikunterricht (P/S)

R. Danckwerts/D. Vogel: Analysis verständlich unterrichten (S)
G. Greefrath: Didaktik des Sachrechnens in der Sekundarstufe (S)
K. Heckmann/F. Padberg: Unterrichtsentwürfe Mathematik Sekundarstufe I (S)
F. Padberg: Didaktik der Bruchrechnung (S)
H.-J. Vollrath/H.-G. Weigand: Algebra in der Sekundarstufe (S)
H.-J. Vollrath/J. Roth: Grundlagen des Mathematikunterrichts in der Sekundarstufe (S)
H.-G. Weigand/T. Weth: Computer im Mathematikunterricht (S)
H.-G. Weigand et al.: Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I (S)

Mathematik

- F. Padberg: Einführung in die Mathematik I – Arithmetik (P)
F. Padberg: Zahlentheorie und Arithmetik (P)

K. Appell/J. Appell: Mengen – Zahlen – Zahlbereiche (P/S)
A. Filler: Elementare Lineare Algebra (P/S)
S. Krauter/C. Bescherer: Erlebnis Elementargeometrie (P/S)
H. Kütting/M. Sauer: Elementare Stochastik (P/S)
T. Leuders: Erlebnis Arithmetik (P/S)
F. Padberg: Elementare Zahlentheorie (P/S)
F. Padberg/R. Danckwerts/M. Stein: Zahlbereiche (P/S)

A. Büchter/H.-W. Henn: Elementare Analysis (S)
G. Wittmann: Elementare Funktionen und ihre Anwendungen (S)
P: Schwerpunkt Primarstufe
S: Schwerpunkt Sekundarstufe

Weitere Bände in Vorbereitung

Hans-Georg Weigand · Andreas Filler
Reinhard Hölzl · Sebastian Kuntze
Matthias Ludwig · Jürgen Roth
Barbara Schmidt-Thieme · Gerald Wittmann

Didaktik der Geometrie für die Sekundarstufe I

2., verbesserte Auflage



Springer Spektrum

Prof. Dr. Hans-Georg Weigand
Universität Würzburg, Deutschland
weigand@mathematik.uni-wuerzburg.de

Prof. Dr. Andreas Filler
Humboldt-Universität zu Berlin, Deutschland
filler@math.hu-berlin.de

Prof. Dr. Reinhard Hölzl
Pädagogische Hochschule Zentralschweiz, Luzern, Schweiz
reinhard.hoelzl@phz.ch

Prof. Dr. Sebastian Kuntze
Pädagogische Hochschule Ludwigsburg, Deutschland
kuntze@ph-ludwigsburg.de

Prof. Dr. Matthias Ludwig
Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt, Deutschland
ludwig@math.uni-frankfurt.de

Prof. Dr. Jürgen Roth
Universität Koblenz-Landau, Deutschland
roth@uni-landau.de

Prof. Dr. Barbara Schmidt-Thieme
Universität Hildesheim, Deutschland
bschmidt-thieme@imai.uni-hildesheim.de

Prof. Dr. Gerald Wittmann
Pädagogische Hochschule Freiburg, Deutschland
gerald.wittmann@ph-freiburg.de

ISBN 978-3-642-37967-3
DOI 10.1007/978-3-642-37968-0

ISBN 978-3-642-37968-0 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer Berlin Heidelberg 2009, 2014

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch | Barbara Gerlach

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Inhaltsverzeichnis

Einleitung.....	7
I Ziele des Geometrieunterrichts (H.-G. Weigand).....	13
1 Lernziele, Kompetenzen und Leitlinien.....	13
2 Allgemeine Ziele des Geometrieunterrichts	17
2.1 Geometrie und die Erschließung der Welt.....	17
2.2 Grundlagen wissenschaftlichen Denkens und Arbeitens.....	21
2.3 Geometrie und Problemlösen	22
3 Inhaltsspezifische Ziele des Geometrieunterrichts.....	24
3.1 Verständnis geometrischer Begriffe und ihrer Eigenschaften	25
3.2 Lernen geometrischer Denk- und Arbeitsweisen.....	27
3.3 Erkennen der Beziehung zwischen Geometrie und Wirklichkeit ..	28
4 Zur Unterrichtskultur	30
II Beweisen und Argumentieren (G. Wittmann).....	35
1 Beweisen in der Geometrie.....	36
1.1 Was ist ein Beweis?.....	36
1.2 Funktionen des Beweisens.....	37
1.3 Beweis und Beweisfindung	40
1.4 Beweistypen	43
2 Beweisen und Argumentieren im Unterricht	44
2.1 Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern	45
2.2 Mathematisch argumentieren.....	47
2.3 Inhaltlich-anschauliche Beweise	51
III Konstruieren (M. Ludwig und H.-G. Weigand).....	55
1 Konstruktive Zugänge zur Geometrie.....	55
1.1 Spannen von Seilen und Bändern	55
1.2 Falten.....	57
1.3 Zeichnen	58
2 Die Werkzeuge	59
2.1 Die Klassiker: Zirkel und Lineal	59
2.2 Die Praktischen: Parallelzeichner und Geodreieck.....	60
2.3 Die Modernen: Computer	62
3 Konstruieren als mathematische Tätigkeit.....	62
3.1 Bedeutung von Zirkel-und-Lineal-Konstruktionen	63
3.2 Was versteht man unter Konstruieren?.....	64
3.3 Konstruktionsbeschreibungen.....	66

4	Vom Einfachen zum Komplexen	68
4.1	Grund- und Standardkonstruktionen	68
4.2	Das Modulkonzept	70
5	Didaktische Bedeutung von Konstruktionsaufgaben	71
5.1	Konstruieren als Problemlösen	71
5.2	Warum Zirkel- und Lineal-Konstruktionen?	74
5.3	Konstruktionen mit dem Computer	76
IV	Problemlösen (G. Wittmann)	81
1	Problemlösen im Geometrieunterricht	82
1.1	Was ist ein Problem?	82
1.2	Schritte im Problemlöseprozess	85
1.3	Ziele des Problemlösens	86
2	Problemlösen lehren und lernen	90
2.1	Allgemeine heuristische Strategien	90
2.2	Inhaltsspezifische heuristische Strategien	94
2.3	Hilfen im Lösungsprozess	97
V	Begriffslernen und Begriffslehren (H.-G. Weigand)	99
1	Zum Prozess der Begriffsbildung	99
1.1	Mentale Modelle	100
1.2	Phänomene als Ausgangspunkte	101
2	Lernen geometrischer Begriffe	103
2.1	Aufbau angemessener Vorstellungen	103
2.2	Erwerb von Kenntnissen	109
2.3	Aneignung von Fähigkeiten	110
3	Das Definieren geometrischer Begriffe	111
3.1	Logische Aspekte von Definitionen	111
3.2	Definitionen im Geometrieunterricht	113
3.3	Genetische und charakterisierende Definitionen	114
4	Strategien des Begriffslehrens	115
4.1	Kurzfristiges Lehren geometrischer Begriffe	116
4.2	Mittelfristiges Lehren geometrischer Begriffe	117
4.3	Langfristiges Lehren geometrischer Begriffe	119
VI	Ebene Figuren und Körper (J. Roth und G. Wittmann)	123
1	Lehren und Lernen von Figuren und Körpern	123
1.1	Interne und externe Bezüge	123
1.2	Bedeutung operativer Begriffsbildungen	124
2	Dreiecke	126
2.1	Dreiecke als Grundbausteine	126
2.2	Dreiecksgrundformen	128

3	Vierecke	133
3.1	Begriffsumfang der Vierecksbegriffe	133
3.2	Viereckseigenschaften und Haus der Vierecke	135
4	Körper	139
4.1	Lernen der Körpergrundformen	140
4.2	Körpermodelle und -netze	144
5	Raumvorstellung und Kopfgeometrie	147
5.1	Raumvorstellung	147
5.2	Kopfgeometrie	151
VII	Flächeninhalt und Volumen (S. Kuntze)	157
1	Messen als Leitidee für Flächeninhalts- und Volumenbestimmung ..	158
1.1	Ziele	158
1.2	Flächen- und Volumenmessung im Laufe der Schuljahre	159
1.3	Aspekte des Messens	159
1.4	Kontexte des Messens	161
2	Flächeninhaltsbegriff und Volumenbegriff	166
2.1	Flächeninhalte und Volumina als Größenbereiche	167
2.2	Flächeninhaltsbegriff	168
2.3	Auslegen bzw. Ausfüllen	173
2.4	Zerlegen und Ergänzen	174
2.5	Flächen- und Körperverwandlungen	177
2.6	Approximieren von Flächen- und Rauminhalten	179
2.7	Zusammenhänge: Flächeninhalts- und Volumenformeln	182
2.8	Funktionale Zusammenhänge bei Flächeninhaltsformeln	183
3	Ausblicke	184
VIII	Symmetrie und Kongruenz (B. Schmidt-Thieme und H.-G. Weigand)	186
1	Mathematische Grundlagen von Symmetrie und Kongruenz	186
1.1	Kongruenzabbildungen	186
1.2	Symmetrie	188
1.3	Kongruenz	188
2	Symmetrie als Umweltphänomen	189
3	Zum Lernen des Symmetriebegriffs	191
4	Der Symmetriebegriff zu Beginn der Sekundarstufe I	195
4.1	Symmetrische Figuren	195
4.2	Achsen Spiegelung	197
4.3	Anwendungen der Symmetrie	198
5	Kongruenz	202
5.1	Bedeutung von Abbildungen	202
5.2	Zugänge zum Kongruenzbegriff	203
5.3	Begründungen der Kongruenzsätze	205

5.4	Kongruenzbeweise versus Abbildungsbeweise	207
5.5	Symmetrie und Kongruenz im Raum	209
IX	Ähnlichkeit (R. Hölzl)	214
1	Ähnlichkeit in Figuren	215
1.1	Phänomen „Ähnlichkeit“	215
1.2	Die Strahlensätze	219
1.3	Die Umkehrung der Strahlensätze	222
2	Ähnlichkeitsabbildungen	224
2.1	Geometrische Abbildungen	224
2.2	Die zentrische Streckung	226
2.3	Die Ähnlichkeitssätze	228
3	Anwendungen der Ähnlichkeitslehre	229
3.1	Der Satz des Pythagoras	229
3.2	Die Seitenhalbierenden eines Dreiecks	232
3.3	Der Goldene Schnitt	233
3.4	Ausblick	236
X	Trigonometrie (A. Filler)	238
1	Bedeutung der Trigonometrie in der Sekundarstufe I	239
1.1	Bezüge zu früheren Inhalten des Mathematikunterrichts	239
1.2	Algebraisierung: Von Konstruktionen zu Berechnungen	240
1.3	Mit Dreiecken Konstruktions- und Vermessungsprobleme lösen	242
2	Einstiege in die Trigonometrie	243
2.1	Vergleich zweier Einstiege	243
2.2	Sinus, Kosinus und Tangens am rechtwinkligen Dreieck	245
3	Eigenschaften und Anwendungen von Sinus, Kosinus und Tangens	249
3.1	Näherungswerte bestimmen und auswerten	249
3.2	Exakte Bestimmung einiger Funktionswerte	250
3.3	Zusammenhänge zwischen Sinus, Kosinus und Tangens	251
3.4	Lösen von Übungs- und Anwendungsaufgaben	252
3.5	Berechnungen in beliebigen Dreiecken	254
3.6	Anwendungen der Trigonometrie in der Raumgeometrie	255
4	Trigonometrische Funktionen	257
4.1	Sinus, Kosinus und Tangens für beliebige Winkelgrößen	257
4.2	Graphen der trigonometrischen Funktionen	259
5	Ausblicke	261
XI	Geometrie und Geometrieunterricht (H.-G. Weigand)	264
1	Geometrie als „Erdmessung“	265
1.1	Geometrie als praktische Lebenshilfe	265
1.2	Geometrie und die Darstellung unserer Umwelt	265

2	Geometrie und die Macht des Denkens	266
2.1	Thales von Milet	266
2.2	Pythagoras von Samos	267
2.3	Platon	267
3	Die Elemente des Euklid	268
3.1	Definitionen	269
3.2	Postulate	269
3.3	Axiome	270
4	Hilberts Grundlagen der Geometrie	271
4.1	Zum Wesen mathematischer Objekte	271
4.2	Axiome	272
4.3	Euklid versus Hilbert	273
5	Der Geometrieunterricht – Hin zu Euklid	274
5.1	Praktischer Aspekt	274
5.2	Schule des Denkens	275
6	Der Geometrieunterricht – Weg von Euklid	276
6.1	Bewegliche Geometrie	276
6.2	Abbildungsgeometrie	277
6.3	Kongruenzgeometrie	278
6.4	Aktuelle Strömungen	279
	Literatur:	282
	Stichwortverzeichnis	300