
Theoretische Mechanik

Achim Feldmeier

Theoretische Mechanik

Analysis der Bewegung –
eine physikalisch-mathematische
Einführung

 Springer Spektrum

Achim Feldmeier
Universität Potsdam
Potsdam-Golm, Deutschland

ISBN 978-3-642-37717-4
DOI 10.1007/978-3-642-37718-1

ISBN 978-3-642-37718-1 (eBook)

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Dr. Vera Spillner, Stella Schmoll

Redaktion: Dr. Michael Zillgitt

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Für Gudrun

Vorwort

Die klassische Mechanik handelt von Newtons II. Axiom $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$.
Gesucht ist die Bahn $\vec{r}(t)$ der Masse m bei einer Krafteinwirkung \vec{F} .

Die *Kinematik* behandelt den einfachsten Fall $\ddot{\vec{r}} = 0$.
Sie führt auf Scheinbeschleunigungen, z. B. die Coriolisbeschleunigung.

Die Gleichung $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$ wird auf drei äquivalente Weisen umformuliert:

- in die *Euler-Lagrange*-Gleichung

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0,$$

- in die *Hamilton*-Gleichungen

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

- in die *Liouville*-Gleichung im Phasenraum

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Die zwei klassischen, lösbaren Probleme der Mechanik sind

- das Keplerproblem als Beispiel einer nichtlinearen Zentralkraft,
- der harmonische Oszillator mit einer Quadratform für die Energie.

Zum Grundstoff einer Mechanikvorlesung gehören noch Drehungen (des starren Körpers), bei welcher Gelegenheit Tensoren eingeführt werden, und der Lagrangeformalismus erster Art für Systeme mit Zwangsbedingungen.

Kapitel 1 über Vektoranalysis setzt beim Leser einige Bereitschaft zu längeren Rechnungen voraus, die sich teils wohl erst *im* Kurs entwickelt. Darum, und weil die Vektoranalysis zwar ein Initiationsritus der Physik ist, mangelnde Vertrautheit

mit ihr aber wenigstens in der Mechanik den Umgang mit dem Stoff kaum erschwert – sie wird in größerem Umfang erst beim Liouvilleschen Satz und beim Euler-Lagrange-Formalismus erster Art gebraucht –, betrachte ich dieses Kapitel als semesterbegleitend.

Kapitel 10 über Störungen stellt zwei etwas aufwendigere Rechnungen vor, die Herleitung der Greenfunktion des Oszillators sowie der Resonanznenner bei der Kolmogorowtransformation im KAM-Theorem. Beides gehört nicht zum traditionellen Lehrstoff, erscheint mir aber interessant und modern.

Weil es aus Vorlesungen entstand, ist das Buch nicht auf Vollständigkeit bedacht, sondern will nur einen Querschnitt geben. Sein Inhalt sollte das in einer vierstündigen Vorlesung Mögliche um nicht mehr als ein Viertel überschreiten.

Das Erscheinungsbild des Textes mag verwundern:
Fast alle Sätze sind kürzer als eine Zeile.
Dies bedeutet nicht, dass der Text in Skriptform ist.
Sondern ich versuche, Text wie Herleitungen stark zu gliedern.
Die meisten Gedanken sollten sich ja in einer Zeile ausdrücken lassen.

Mathematische Logik, analytische Philosophie, Informatik, Linguistik und Mikrobiologie arbeiten mit syntaktischen Transformationen von Zeichenketten. Vielleicht kann das Buch einen ersten Eindruck vom Reiz dieses in der Physik so genannten *Umformens* vermitteln; und vielleicht ist das auch schon *Denken*.

Ich bedanke mich bei den Hörerinnen und Hörern dieser Vorlesung, die durch ihre Rückfragen zur Schärfung der Argumente beigetragen haben. Mein Dank gilt Herrn Timo Felbinger und Herrn Professor Martin Wilkens für fachliche Gespräche und Hilfe, Frau Dr. Spillner, Herrn Dr. Zillgitt, Frau Barth und Frau Schmoll vom Springer-Verlag für die sehr gute Betreuung des Buches, und ganz besonders meiner Frau für ihre Geduld bei der Abfassung.

Kritik und Anregungen sind willkommen unter: afeld@uni-potsdam.de

Achim Feldmeier

Die ganze Methode der Differentialrechnung ist in dem Satze, daß $dx^n = nx^{n-1} dx, \dots$ absolvirt. Man bedarf weiter nichts zu erlernen \dots ; in wenig Zeit, vielleicht in einer halben Stunde \dots , kann man die ganze Theorie inne haben.

G.W.F. Hegel, Wissenschaft der Logik, Teil 1 (1832), Gesammelte Werke Bd. 21, Hrsg. Hogemann u. Jaeschke, Meiner, Hamburg, 1985, S. 273f

Inhaltsverzeichnis

1	Vektoranalysis	1
1.1	Skalar- und Kreuzprodukt	1
1.2	Summationskonvention	3
1.3	Krummlinige Orthogonalkoordinaten	5
1.4	Koordinatensysteme	7
1.5	Felder und Vektordifferentiation	10
1.6	Gradient	12
1.7	Gradient in krummlinigen Koordinaten	16
1.8	Linienintegral	17
1.9	Oberflächenintegral	20
1.10	Rotor und der Satz von Stokes	21
1.11	Divergenz und der Satz von Gauß	28
1.12	div und rot mit metrischen Faktoren	32
1.13	Nabla-Operator	34
1.14	rot grad	35
1.15	div rot	36
1.16	Erster Helmholtzscher Wirbelsatz	37
1.17	Vektorgradient	39
1.18	Tensoren	41
1.19	Vektortransport	43
2	Kinematik	47
2.1	Geschwindigkeit und Beschleunigung	47
2.2	Galileitransformation	48
2.3	Inertialsysteme	49
2.4	Variablen x , \dot{x} und Orts-Geschwindigkeits-Raum	50
2.5	Bahnbeschleunigung	51
2.6	Eulerformel für rotierende Vektoren	54
2.7	Scheinbeschleunigungen	56
2.8	Eine Meeresströmung	59
2.9	Trägheitskräfte	60

3	Schwingungen	63
3.1	Newtons Axiome	63
3.2	Energiesatz für konservative Kräfte	64
3.3	Oszillatorgleichung	66
3.4	Energiesatz des Oszillators	67
3.5	Gedämpfter Oszillator	68
3.6	Getriebener Oszillator	69
3.7	Zwei gekoppelte Oszillatoren	70
3.8	Drei gekoppelte Oszillatoren	71
3.9	Doppelpendel	73
4	Gravitation	77
4.1	Raumwinkel	77
4.2	Poissongleichung	78
4.3	Zentralkraft	81
4.4	Drehimpulserhaltung	82
4.5	Flächensatz	84
4.6	Newtons Beweis des Flächensatzes	85
4.7	Potentialtopf	86
4.8	Keplerellipse	89
4.9	Gezeitenpotential	92
4.10	Eingeschränktes Dreikörperproblem	96
4.11	Hillsche Mondtheorie	96
5	Teilchensysteme	101
5.1	Impulssatz	101
5.2	Drehimpulserhaltung	103
5.3	Energie und Arbeit	104
5.4	Potential	105
6	Euler-Lagrange-Formalismus 2. Art	109
6.1	Prinzip der kleinsten Wirkung	109
6.2	Variablen x , \dot{x} und verallgemeinerte Koordinaten	110
6.3	Der Algorithmus	112
6.4	Schnellste und kürzeste Bahn	118
6.5	Aufgabenstellung der Variationsrechnung	120
6.6	Eulers originale Herleitung	122
6.7	Herleitung nach Lagrange	127
6.8	Moderne Herleitung	128
6.9	Höhere Differentialordnung	129
6.10	Mehrere Variablen	130
6.11	Die Oszillatorkette	131
6.12	Die Wellengleichung	133

7	Euler-Lagrange-Formalismus 1. Art	137
7.1	Zwangsbedingungen	137
7.2	Prinzip der virtuellen Arbeit	138
7.3	Herleitung der Euler-Lagrange-Gleichungen 1. Art	139
7.4	Virtuelle Arbeit und Zwangskraft	142
7.5	Euler-Lagrange 1. Art für verallgemeinerte Koordinaten	143
7.6	Euler-Lagrange 1. Art für nichtholonome Zwänge	144
7.7	Eulers originale Herleitung	146
7.8	Isoperimetrisches Problem	149
7.9	Lagrangesches Lemma	151
8	Hamiltonmechanik	153
8.1	Energieerhaltung	153
8.2	Impulserhaltung	155
8.3	Drehimpulserhaltung	156
8.4	Hamiltonsche Gleichungen	157
8.5	Phasenraum	160
8.6	Legendretransformation	160
8.7	Periodische und zyklische Koordinaten	162
8.8	Phasenraumtori	163
8.9	Wirkungs- und Winkelvariablen	165
8.10	Kanonische Transformationen	168
8.11	Erzeugende Funktionen	169
8.12	Exaktes Differential	173
8.13	Zeitentwicklung als kanonische Transformation	174
8.14	Hamilton-Jacobi-Gleichung	176
8.15	Definition der Poissonklammer	178
8.16	Poissonklammer und kanonische Koordinaten	179
8.17	Poissonklammer und Hamiltongleichungen	181
8.18	Poissonklammer und Integrale der Bewegung	182
9	Satz von Liouville	185
9.1	Phasenraumflüssigkeit	185
9.2	Herleitung des Satzes von Liouville	187
9.3	Beweis mit Volumendeformation	192
9.4	Beweis mit Jacobideterminante	194
9.5	Gerader elastischer Stoß	196
9.6	Poincaréinvarianten	197
10	Störungen	199
10.1	Deltafunktion	199
10.2	Fouriertransformation	201
10.3	Greenfunktion	203
10.4	Dispersionsrelation und Greenfunktion	207
10.5	Gestörte Phasenraumtori	208
10.6	Resonanznenner	209

11	Drehungen	217
	11.1 Drehungen um drei Achsen	217
	11.2 Orthogonale Matrizen	219
	11.3 Drehoperatoren und Drehgruppe	220
	11.4 Tensoren vom Rang 2	220
	11.5 Dualvektorraum und Tensoren	223
	11.6 Bra-kets nach Dirac	225
	11.7 Infinitesimale Drehungen	226
	11.8 Zahl der Drehungen im \mathbb{R}^n	229
12	Starrer Körper	231
	12.1 Translationsinvarianz von $\vec{\omega}$	231
	12.2 Rotationsenergie	232
	12.3 Trägheitstensor	233
	12.4 Transformationsverhalten von Tensoren	234
	12.5 Transformationsverhalten von Gleichungen	236
	12.6 Hauptachsentransformation	236
	12.7 Dreharme	238
	12.8 Invarianz von Kräftepaaren	239
	12.9 Die Eulerschen Kreiselgleichungen	241
	12.10 Der kräftefreie, symmetrische Kreisel	242
	Sachverzeichnis	245

Abkürzungen

bzgl. bezüglich
d. h. das heißt
i. a. im allgemeinen
s. siehe
s. u. siehe unten
S. Seite
u. a. unter anderem
vgl. vergleiche
DGL Differentialgleichung
ELG Euler-Lagrange-Gleichung
PvA Prinzip der virtuellen Arbeit