Springer-Lehrbuch

Peter Knabner · Wolf Barth

Lineare Algebra

Grundlagen und Anwendungen

Springer Spektrum

Peter Knabner
Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Lehrstuhl Angewandte Mathematik 1
Erlangen
Deutschland

Wolf Barth
Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Emmy-Noether-Zentrum
Erlangen
Deutschland

ISSN 0937-7433
ISBN 978-3-642-32185-6 ISBN 978-3-642-32186-3 (eBook)
DOI 10.1007/978-3-642-32186-3

Mathematics Subject Classification (2010): 15-01, 15Axx, 34-01, 90C05, 51-01, 65Fxx, 90C20, 65Txx, 91Bxx

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Spektrum

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Jedes neue Lehrbuch der Linearen Algebra muss sich angesichts einer Vielzahl hervorragender, auch aktueller Lehrbücher über dieses Gebiet, insbesondere im deutschen Sprachraum, nach seiner Existenzberechtigung fragen lassen. Warum wir der Meinung sind, dass dies für das hier vorgelegte Werk durchaus der Fall ist, trotz seines Umfangs und trotz seines an einigen Stellen nicht geringen Anspruchs, ergibt sich aus unserem Verständnis des Gebiets und der heutigen Lehrsituation an den deutschen Universitäten, insbesondere im Rahmen einer durch Bachelor und Master strukturierten Ausbildung: Für uns ist das Ziel der Linearen Algebra die Einübung in die Theorie linearer Strukturen. Dabei liegt der Schwerpunkt auf endlichdimensionalen $\mathbb{R}$-Vektorräumen, aber auch K-Vektorräume über allgemeinen Körper K sollen dabei weitgehend behandelt werden. Auch unendlichdimensionale Vektorräume in Theorie und Anwendung sollen soweit wie möglich eine Rolle spielen. Angesichts der heutigen Bedeutung der Linearen Algebra als grundlegendes Werkzeug und Sprache für im Wesentlichen alle Teile der Mathematik, insbesondere auch die der Angewandten Mathematik und die darauf fußenden Ausstrahlungen in Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften und Wirtschaftswissenschaften, sehen wir in der Linearen Algebra nicht primär eine Ausbildung in Algebra und auch nicht ausschließlich in Geometrie, wobei Letztere ein sehr wesentliches Anwendungs- und Beispielfeld darstellt.

Die Klientel in einer Linearen-Algebra-Vorlesung an einer deutschen Universität ist heute typischerweise sehr differenziert, mit zum Teil auch sehr unterschiedlichen Ansprüchen an Inhalt und Rigorosität ihrer Mathematikausbildung. Trotz dieser immer größer werdenden Spannbreite sind wir nicht den Weg des kleinsten gemeinsamen Nenners gegangen und haben ein möglichst elementares und möglichst kompaktes Lehrbuch vorgelegt, sondern haben darauf bestanden ein, wie wir finden, vernünftiges Abstraktionsniveau zu bewahren. Das Abstraktionsniveau des Buches besteht durchgängig aus endlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ bis hin zu unendlichdimensionalen $\mathbb{K}$-Vektorräumen und auch soweit wie möglich K-Vektorräumen. Die Beispielebenen des Buches sind der Tupelraum $\mathbb{R}^n$, der Matrizenraum und lineare Gleichungssysteme. Um dennoch die Zugänglichkeit zu erleichtern, sind wir von einem strikten deduktiven Aufbau der Theorie abgewichen und haben induktive Elemente in die Darstellung eingebaut. Die maßvolle Mischung aus induktivem und deduktivem Vorgehen wird in dem Anfangskapitel auch durch die Randmarkierungen RLGS (Rückführung auf lineare Gleichungssysteme), bei Entwicklung der Theorie durch Rückgriffe auf Parametrisierung und Fragen von Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme, bzw. beim deduktiven Schritt durch ALGS (Anwendung auf lineare Gleichungssysteme) bei der Spezialisierung allgemeiner Theorie auf diesen Fall angedeutet. Insgesamt wird eine (sehr gemäßigte) Redundanz in Kauf genommen, insofern zum Teil Sachverhalte alternativ mit verschiedenen Beweismethoden beleuchtet werden.

Ausgangspunkt des ersten Kapitels ist der $\mathbb{R}^n$, woraus aber schnell der allgemeine Begriff des $\mathbb{R}$-Vektorraums entwickelt wird und auch noch weitere, insbesondere endlichdimensionale, Beispiele behandelt werden. Um dieses minimale Maß an Konkretheit zu bewahren, werden in Kapitel 1 und 2 nur $\mathbb{R}$-Vektorräume bzw. ihre Konkretisierungen behandelt. Die Erweiterung der Theorie auf allgemeine K-Vektorräume, d. h. insbesondere auch die Bereitstellung der Theorie für $\mathbb{C}$-Vektorräume, erfolgt dann erst in einem zweiten Schritt in Kapitel 3. Ab Kapitel 4 werden dann entweder allgemeine K-Vektorräume oder (bei unitärer Struktur) $\mathbb{K}$-Vektorräume einheitlich zugrunde gelegt.

Um darüber hinaus für die Studierenden aus verschiedenen Fachrichtungen ansprechende Anwendungsbezüge aufweisen zu können, sind Inhalte aufgenommen worden, die zum Teil über den Standardkanon Lineare Algebra hinausgehen (und durchaus als Vorschlag zu dessen Reform gesehen werden sollen):

Für Lehramtsstudierende Mathematik (aber nicht nur für diese) werden ausführlich verschiedene Aspekte der Analytischen Geometrie betrachtet, entweder in Form von immer wieder eingestreuten „Beispielen (Geometrie)“, oder aber in durchgängigen Abschnitten oder ganzen Kapiteln. Dazu gehört eine Behandlung der Affinen Geometrie (Abschnitte 1.7, 2.8), eine ausführliche Behandlung der Quadriken (Abschnitt 5.3) und insbesondere der Polyedertheorie mit Zielrichtung Lineare Optimierung (Kapitel 6).

Für Mathematikstudierende mit einer möglichen Vertiefung Analysis oder auch Physikstudierende wird Wert gelegt auf unendlichdimensionale Vektorräume und auf Spektralanalyse, wobei die SCHUR- und ebenso die JORDAN-Normalform auch in ihren reellen Varianten einen breiten Teil einnehmen. Auch wird den Querverbindungen zur Analysis große Bedeutung beigemessen, um den Übergang in eine (auch nicht-lineare) Funktionalanalysis möglichst einfach zu gestalten (Abschnitte 4.4, 4.5, 4.7.3, Kapitel 7). Dazu gehört auch eine durchgängige Behandlung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit vollständigen Lösungsdarstellungen.

Für Mathematikstudierende mit einer möglichen Vertiefung Algebra werden neben der allgemeinen K-Vektorraum-Theorie auch algebraische Strukturen allgemein und als Anwendung die Kodierungstheorie angesprochen. Dieser Anwendungsaspekt wird insofern nicht vertieft, als hier ein hervorragendes aktuelles Lehrbuch (HUPPERT und WILLEMS 2006) vorliegt, das speziell diese Anwendungen pflegt.

Für Studierende der Wirtschaftsmathematik wurden Inhalte aufgenommen, wie die Anfangsgründe der linearen und quadratischen Optimierung (Abschnitte 4.7.2, 6.4–6.7) oder auch eine durchgehende Behandlung linearer Differenzengleichungen.

Für Studierende der Mathematik mit möglicher Vertiefung Numerische Mathematik oder Optimierung und insbesondere Studierende der Technomathematik wurden Inhalte wie LR-Zerlegung, Pseudoinverse, Singulärwertzerlegung und auch quadratische und lineare Optimierung einbezogen (Abschnitt 2.4.2–2.4.3, 2.5.2, 4.6, 4.7.2, 6.6, 6.7, aber auch Kapitel 7).

Der Text baut (auch) auf algorithmische Zugänge auf und behandelt algorithmische Fragen ohne ein Lehrbuch der Numerischen Linearen Algebra zu sein. Immerhin werden aber einige Verfahren bis hin zum MATLAB Code entwickelt, darunter 4 der 10 als wichtigste Algorithmen des 20ten Jahrhunderts ausgewählten Verfahren (DONGARRA und SULLIVAN 2000).

Durchgängig wurde großer Wert darauf gelegt, die erarbeitete Theorie und Algorithmik nicht nur mit möglichen innermathematischen Weiterentwicklungen zu verknüpfen, sondern insbesondere auch den in keiner Weise einfachen oder gar selbstverständlichen Schritt der Anwendung auf Fragen der Realwissenschaften einzuüben. Dazu dient früh der Abschnitt 1.6, durchgängig nummerierte Abschnitte zur Mathematischen Modellierung und drei durchgehende, immer weiter entwickelte Beispiele aus der Mechanik, der

Elektrizitätslehre und der Ökonomie (zusätzlich gibt es ein durchgängiges Beispiel, das historische Fragestellungen behandelt).

Die gerade angesprochene „Zergliederung“ soll andeuten, dass trotz des hohen Umfangs des Textes eine Ausgliederung einer in zwei Semestern lehrbaren Teilmenge leicht möglich sein sollte, widerspricht aber doch in gewisser Weise der Intention der Autoren. Wir verstehen einen (mathematischen) Text im lateinischen Wortsinn als ein dicht zusammengefügtes Gewebe, das erst durch seine „Verwebung“ seine Tragweite eröffnet. Andererseits ist uns die Notwendigkeit einer Auswahl bewusst, auch die Gefahr, dass sich gerade ein Studienanfänger in einem solch umfangreichen Text „verlieren“ kann. Daher haben wir versucht durch eine Reihe von Satzhilfsmitteln Hilfestellung zu leisten (s. Hinweise zum Gebrauch des Buchs). Eine mehrfach erprobte, weitgehend vollständige Behandlung des Textes in einem ersten Studienjahr ist etwa dadurch möglich, dass in den Vorlesungen die „Anwendungsteile“ ausgeklammert werden, diese dann allerdings den Gegenstand eines begleitenden Proseminars bilden. Andererseits können auch diese Teile Inhalt einer auf eine Grundvorlesung aufbauende „Angewandten Linearen Algebra“ sein.

Wir sehen es nicht als die Aufgabe eines Lehrbuchs an, die existierende Lehrbuchliteratur zu referieren oder gar zu bewerten. Gewiss haben wir in viele der existierenden Lehrbücher geschaut und sind in vielen Aspekten beeinflusst worden. Der erstgenannte Autor möchte seine Wertschätzung speziell für STRANG 2003, HUPPERT und WILLEMS 2006, und LAX 2007 nicht verleugnen. Dort, wo wir uns eng an eine Vorlage gehalten haben, ist dies vermerkt. Sollte es einmal versäumt worden sein, da die Lektüre über die Jahre „vergessen“ wurde, bitten wir dies zu entschuldigen. Selbstverständlich stehen wir auf den Schultern unserer Vorgänger, auch der vielen nicht zitierten Lehrbücher.

Das Buch ist hervorgegangen aus einer Vielzahl von Vorlesungen, die insbesondere der zweitgenannte Autor an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg seit 1990 sehr regelmäßig durchgeführt hat. Hinzu kamen wiederkehrend entsprechende Lehrveranstaltungen für Studierende in der nicht-vertieften Lehramtsausbildung. So entstand auch ein Großteil der Aufgabensammlung. Auf diesen „Urtext“ aufbauend, der an sich schon das Ergebnis eines jahrelangen Weiterentwicklungsprozesses war, hat dann der erstgenannte Autor in einer ganzen Reihe von Erweiterungs- und Umarbeitungsschritten, die aber den Kerntext inhaltlich unberührt gelassen haben, den vorliegenden Text entwickelt.

Allein dieser Prozess hat sich mit Unterbrechung über die letzten fünf Jahre hingezogen und wäre ohne die umfangreiche Unterstützung durch eine Vielzahl von Personen nicht möglich gewesen, denen an dieser Stelle herzlich gedankt sei. Der vielschichtige Umarbeitungsprozess des TeX-Textes wurde von den Sekretärinnen des Lehrstuhls Angewandte Mathematik über die Jahre durchgeführt, wobei hier neben Frau Astrid Bigott und Frau Silke Berghof insbesondere Frau Cornelia Kloß hervorgehoben sei. Ohne ihre immerwährende Genauigkeit, Schnelligkeit und die Ruhe bewahrende Übersicht wäre die Erstellung dieses Textes nicht möglich gewesen. Bei fortschreitend komplexer werdendem Umarbeitungsprozess war es auch notwendig weitere Hilfspersonen einzubinden. Deren Anleitung und Koordinierung wurden von Herrn Dipl.-Math. Florian Frank durchgeführt, einer weiteren tragenden Säule des Unternehmens unterstützt durch Herrn Dipl.-Math. Fabian Klingbeil. Als studentische Hilfskräfte waren u. a. beteiligt: Ludwig Dietel, Jasmin Gressmann, Fabian Langer, Benjamin Steber und Alexander Vibe. Wesentliche inhaltliche Hilfestellung kam durch die Assistenten der jeweiligen Lehrveranstaltungen:

Dipl.-Technomath. Fabian Brunner, Dr. Volker Grimm, Dr. Joachim Hoffmann, Dr. Tycho van Noorden und Dr. Alexander Prechtel. Schließlich wurden wichtige Korrekturarbeiten durchgeführt in großem Umfang von Dipl.-Math. Matthias Herz, aber auch von Dr. Vadym Aizinger, Dr. Serge Kräutle, Dipl.-Biomath. Torsten Müller, Dr. Maria Neuss-Radu, Dipl.-Math. Nadja Ray, Dr. Raphael Schulz und Dr. Nicolae Suciu.

Zwischenstadien des Textes wurden von den Professoren Günter Leugering, Alexander Martin und Karl-Hermann Neeb benutzt und hilfreich kommentiert.

Erlangen, im Juli 2012

Peter Knabner, Wolf P. Barth

Hinweise zur Benutzung des Buchs

Gerade ein so umfangreicher Text kann einem Studienanfänger Schwierigkeiten bereiten, wenn er sich aus zeitlichen Gründen nicht in der Lage sieht, den Text vollständig seinem Aufbau gemäß durchzuarbeiten, was die optimale Situation wäre. Daher sind einige satztechnische Strukturierungshilfsmittel eingebaut worden, die es zum einen erleichtern sollen den Kerntext zu erkennen und zum anderen die Teile zu identifizieren, die für die spezifische Studienrichtung von hervorgehobener Bedeutung sind.

Der Kerntext Lineare Algebra ist, wie bei jedem Mathematiklehrbuch, der durch „Definition“ und „Satz/Beweis“ formalisierte Teil des Textes. Auch hier gibt es eine, auch durch unterschiedliche Umrahmungen ersichtliche Strukturierung, durch (in aufsteigender Wichtigkeit) „Lemma“ oder „Korollar“, „Satz“, „Theorem“ und schließlich „Hauptsatz“. Diese höchste Stufe wird auch in den umfangreichen Index aufgenommen.

Jeder Abschnitt (bis auf die Abschnitte aus Kapitel 8) wird von einer Zusammenfassung abgeschlossen, die noch einmal auf die wesentlichen Begriffe, Zusammenhänge und Beispiele hinweist.

Viele über den Kerntext hinausgehende Überlegungen finden sich in den „Bemerkungen“. Dabei handelt es sich entweder um Erläuterungen oder aber um Erweiterungen und Ausblicke. Für deren Beweis, oder auch in den laufenden Text eingeschobene Beweisüberlegungen, wird Kleindruck verwendet. Dies heißt nicht, dass der Kerntext nicht auf die Bemerkungen zurückgreift, bedeutet aber, dass ihre Erarbeitung auch auf den „Bedarfsfall“ eingeschränkt werden kann. Auch auf der Ebene der Bemerkungen oder im Fließtext werden manche Begriffe (ohne die Definitionsumgebung) definiert. Dies ist dann durch *Kursivdruck* des Begriffs zu erkennen. Auch auf Aussagen die dort entwickelt werden, kann (immer wieder) zurückgegriffen werden. Solche Situationen werden durch kleine Umrahmungen leichter auffindbar gemacht.

Textteile, die eher isoliert stehen und daher ohne Nachteil für das weitere Verständnis übergangen werden können, sind mit * gekennzeichnet. Aussagen, die aufgrund des induktiven Aufbaus direkte Weiterentwicklungen (von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{C}$ oder von $\mathbb{C}$ nach $\mathbb{R}$) sind, tragen die gleiche Nummer mit einer hochgestellten I. Eine Sonderstellung hat Hauptsatz 1.85, der ständig erweitert wird (zusätzliche Versionen I bis IV).

Die verschiedenen Textteile sind durch unterschiedliche Schlusszeichen gekennzeichnet: Beweise durch $\square$, Bemerkungen durch $\triangle$, Beispiele durch $\circ$.

Der Text enthält drei durchgängige Beispiele („Beispiel 2(1)“ etc.), die sich an verschiedene Anwendungsinteressen richten und darüber hinaus eine Vielzahl von Geometrieanwendungen („Beispiel (Geometrie)“) bzw. Abschnitte, die sich schwerpunktmäßig auf geometrische Inhalte konzentrieren. Je nach Interessenlage können diese Beispiele betont oder übergangen werden, das theoretische Verständnis wird daduch nicht berührt. Einige der „Stories“, die das Buch erzählen möchte, erschließen sich aber gerade über diese Beispiele.

Die Anhänge stellen verschiedene Hilfsmittel bereit, die zum Teil zur mathematischen Propädeutik gehören, wie Anhang A über Logisches Schließen und Mengenlehre oder Anhang B.1 über das Zahlensystem, oder die den Umgang mit den Notationen erleichtern sollen (Anhang B.2). Hilfsmittel über Polynome (Anhang B.3) oder eine Zusammenfassung der Analysis (Anhang C), wie sie zum Ende eines ersten Studiensemesters bekannt sein sollte, werden ebenfalls angeboten.

Die Aufgaben sind in die (offensichtlichen) Kategorien (K(alkül)), (T(heorie)) und (G(eometrie)) unterteilt.

Weitere aktuelle Informationen finden sich auf http://www.math.fau.de/knabner/LA .

Voraussichtlich zu Beginn 2013 erscheint ein Aufgabenband, der für die meisten hier abgedruckten Aufgaben Musterlösungen enthält und darüberhinaus eine Vielzahl weiterer Aufgaben. Insbesondere liefert er einen Leitfaden durch den hiesigen Text anhand von Aufgaben.

Inhaltsverzeichnis