
Springer-Lehrbuch

Peter Knabner · Wolf Barth

Lineare Algebra

Grundlagen und Anwendungen

 Springer Spektrum

Peter Knabner
Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Lehrstuhl Angewandte Mathematik 1
Erlangen
Deutschland

Wolf Barth
Universität Erlangen-Nürnberg
Department Mathematik
Emmy-Noether-Zentrum
Erlangen
Deutschland

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-32185-6

DOI 10.1007/978-3-642-32186-3

ISBN 978-3-642-32186-3 (eBook)

Mathematics Subject Classification (2010): 15-01, 15Axx, 34-01, 90C05, 51-01, 65Fxx, 90C20, 65Txx, 91Bxx

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2013

Dieses Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
www.springer-spektrum.de

Vorwort

Jedes neue Lehrbuch der Linearen Algebra muss sich angesichts einer Vielzahl hervorragender, auch aktueller Lehrbücher über dieses Gebiet, insbesondere im deutschen Sprachraum, nach seiner Existenzberechtigung fragen lassen. Warum wir der Meinung sind, dass dies für das hier vorgelegte Werk durchaus der Fall ist, trotz seines Umfangs und trotz seines an einigen Stellen nicht geringen Anspruchs, ergibt sich aus unserem Verständnis des Gebiets und der heutigen Lehrsituation an den deutschen Universitäten, insbesondere im Rahmen einer durch Bachelor und Master strukturierten Ausbildung: Für uns ist das Ziel der Linearen Algebra die Einübung in die Theorie linearer Strukturen. Dabei liegt der Schwerpunkt auf endlichdimensionalen \mathbb{R} -Vektorräumen, aber auch K -Vektorräume über allgemeinen Körper K sollen dabei weitgehend behandelt werden. Auch unendlichdimensionale Vektorräume in Theorie und Anwendung sollen soweit wie möglich eine Rolle spielen. Angesichts der heutigen Bedeutung der Linearen Algebra als grundlegendes Werkzeug und Sprache für im Wesentlichen alle Teile der Mathematik, insbesondere auch die der Angewandten Mathematik und die darauf fußenden Ausstrahlungen in Naturwissenschaften, Ingenieurwissenschaften und Wirtschaftswissenschaften, sehen wir in der Linearen Algebra nicht primär eine Ausbildung in Algebra und auch nicht ausschließlich in Geometrie, wobei Letztere ein sehr wesentliches Anwendungs- und Beispielfeld darstellt.

Die Klientel in einer Linearen-Algebra-Vorlesung an einer deutschen Universität ist heute typischerweise sehr differenziert, mit zum Teil auch sehr unterschiedlichen Ansprüchen an Inhalt und Rigorosität ihrer Mathematikausbildung. Trotz dieser immer größer werdenden Spannweite sind wir nicht den Weg des kleinsten gemeinsamen Nenners gegangen und haben ein möglichst elementares und möglichst kompaktes Lehrbuch vorgelegt, sondern haben darauf bestanden ein, wie wir finden, vernünftiges Abstraktionsniveau zu bewahren. Das Abstraktionsniveau des Buches besteht durchgängig aus endlichdimensionalen \mathbb{K} -Vektorräumen $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ bis hin zu unendlichdimensionalen \mathbb{K} -Vektorräumen und auch soweit wie möglich K -Vektorräumen. Die Beispielebenen des Buches sind der Tupelraum \mathbb{R}^n , der Matrizenraum und lineare Gleichungssysteme. Um dennoch die Zugänglichkeit zu erleichtern, sind wir von einem strikten deduktiven Aufbau der Theorie abgewichen und haben induktive Elemente in die Darstellung eingebaut. Die maßvolle Mischung aus induktivem und deduktivem Vorgehen wird in dem Anfangskapitel auch durch die Randmarkierungen RLGS (Rückführung auf lineare Gleichungssysteme), bei Entwicklung der Theorie durch Rückgriffe auf Parametrisierung und Fragen von Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme, bzw. beim deduktiven Schritt durch ALGS (Anwendung auf lineare Gleichungssysteme) bei der Spezialisierung allgemeiner Theorie auf diesen Fall angedeutet. Insgesamt wird eine (sehr gemäßigte) Redundanz in Kauf genommen, insofern zum Teil Sachverhalte alternativ mit verschiedenen Beweismethoden beleuchtet werden.

Ausgangspunkt des ersten Kapitels ist der \mathbb{R}^n , woraus aber schnell der allgemeine Begriff des \mathbb{R} -Vektorraums entwickelt wird und auch noch weitere, insbesondere endlichdimensionale, Beispiele behandelt werden. Um dieses minimale Maß an Konkretheit zu bewahren, werden in Kapitel 1 und 2 nur \mathbb{R} -Vektorräume bzw. ihre Konkretisierungen behandelt. Die Erweiterung der Theorie auf allgemeine K -Vektorräume, d. h. insbesondere

auch die Bereitstellung der Theorie für \mathbb{C} -Vektorräume, erfolgt dann erst in einem zweiten Schritt in Kapitel 3. Ab Kapitel 4 werden dann entweder allgemeine K -Vektorräume oder (bei unitärer Struktur) \mathbb{K} -Vektorräume einheitlich zugrunde gelegt.

Um darüber hinaus für die Studierenden aus verschiedenen Fachrichtungen ansprechende Anwendungsbezüge aufweisen zu können, sind Inhalte aufgenommen worden, die zum Teil über den Standardkanon Lineare Algebra hinausgehen (und durchaus als Vorschlag zu dessen Reform gesehen werden sollen):

Für Lehramtsstudierende Mathematik (aber nicht nur für diese) werden ausführlich verschiedene Aspekte der Analytischen Geometrie betrachtet, entweder in Form von immer wieder eingestreuten „Beispielen (Geometrie)“, oder aber in durchgängigen Abschnitten oder ganzen Kapiteln. Dazu gehört eine Behandlung der Affinen Geometrie (Abschnitte 1.7, 2.8), eine ausführliche Behandlung der Quadriken (Abschnitt 5.3) und insbesondere der Polyedertheorie mit Zielrichtung Lineare Optimierung (Kapitel 6).

Für Mathematikstudierende mit einer möglichen Vertiefung Analysis oder auch Physikstudierende wird Wert gelegt auf unendlichdimensionale Vektorräume und auf Spektralanalyse, wobei die SCHUR- und ebenso die JORDAN-Normalform auch in ihren reellen Varianten einen breiten Teil einnehmen. Auch wird den Querverbindungen zur Analysis große Bedeutung beigemessen, um den Übergang in eine (auch nicht-lineare) Funktionalanalysis möglichst einfach zu gestalten (Abschnitte 4.4, 4.5, 4.7.3, Kapitel 7). Dazu gehört auch eine durchgängige Behandlung von Systemen linearer Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten mit vollständigen Lösungsdarstellungen.

Für Mathematikstudierende mit einer möglichen Vertiefung Algebra werden neben der allgemeinen K -Vektorraum-Theorie auch algebraische Strukturen allgemein und als Anwendung die Kodierungstheorie angesprochen. Dieser Anwendungsaspekt wird insofern nicht vertieft, als hier ein hervorragendes aktuelles Lehrbuch (HUPPERT und WILLEMS 2006) vorliegt, das speziell diese Anwendungen pflegt.

Für Studierende der Wirtschaftsmathematik wurden Inhalte aufgenommen, wie die Anfangsgründe der linearen und quadratischen Optimierung (Abschnitte 4.7.2, 6.4–6.7) oder auch eine durchgehende Behandlung linearer Differenzgleichungen.

Für Studierende der Mathematik mit möglicher Vertiefung Numerische Mathematik oder Optimierung und insbesondere Studierende der Technomathematik wurden Inhalte wie LR-Zerlegung, Pseudoinverse, Singulärwertzerlegung und auch quadratische und lineare Optimierung einbezogen (Abschnitt 2.4.2–2.4.3, 2.5.2, 4.6, 4.7.2, 6.6, 6.7, aber auch Kapitel 7).

Der Text baut (auch) auf algorithmische Zugänge auf und behandelt algorithmische Fragen ohne ein Lehrbuch der Numerischen Linearen Algebra zu sein. Immerhin werden aber einige Verfahren bis hin zum MATLAB Code entwickelt, darunter 4 der 10 als wichtigste Algorithmen des 20ten Jahrhunderts ausgewählten Verfahren (DONGARRA und SULLIVAN 2000).

Durchgängig wurde großer Wert darauf gelegt, die erarbeitete Theorie und Algorithmik nicht nur mit möglichen innermathematischen Weiterentwicklungen zu verknüpfen, sondern insbesondere auch den in keiner Weise einfachen oder gar selbstverständlichen Schritt der Anwendung auf Fragen der Realwissenschaften einzuüben. Dazu dient früh der Abschnitt 1.6, durchgängig nummerierte Abschnitte zur Mathematischen Modellierung und drei durchgehende, immer weiter entwickelte Beispiele aus der Mechanik, der

Elektrizitätslehre und der Ökonomie (zusätzlich gibt es ein durchgängiges Beispiel, das historische Fragestellungen behandelt).

Die gerade angesprochene „Zergliederung“ soll andeuten, dass trotz des hohen Umfangs des Textes eine Ausgliederung einer in zwei Semestern lehrbaren Teilmenge leicht möglich sein sollte, widerspricht aber doch in gewisser Weise der Intention der Autoren. Wir verstehen einen (mathematischen) Text im lateinischen Wortsinn als ein dicht zusammengefügtes Gewebe, das erst durch seine „Verwebung“ seine Tragweite eröffnet. Andererseits ist uns die Notwendigkeit einer Auswahl bewusst, auch die Gefahr, dass sich gerade ein Studienanfänger in einem solch umfangreichen Text „verlieren“ kann. Daher haben wir versucht durch eine Reihe von Satzhilfsmitteln Hilfestellung zu leisten (s. Hinweise zum Gebrauch des Buchs). Eine mehrfach erprobte, weitgehend vollständige Behandlung des Textes in einem ersten Studienjahr ist etwa dadurch möglich, dass in den Vorlesungen die „Anwendungsteile“ ausgeklammert werden, diese dann allerdings den Gegenstand eines begleitenden Proseminars bilden. Andererseits können auch diese Teile Inhalt einer auf eine Grundvorlesung aufbauende „Angewandten Linearen Algebra“ sein.

Wir sehen es nicht als die Aufgabe eines Lehrbuchs an, die existierende Lehrbuchliteratur zu referieren oder gar zu bewerten. Gewiss haben wir in viele der existierenden Lehrbücher geschaut und sind in vielen Aspekten beeinflusst worden. Der erstgenannte Autor möchte seine Wertschätzung speziell für STRANG 2003, HUPPERT und WILLEMS 2006, und LAX 2007 nicht verleugnen. Dort, wo wir uns eng an eine Vorlage gehalten haben, ist dies vermerkt. Sollte es einmal versäumt worden sein, da die Lektüre über die Jahre „vergessen“ wurde, bitten wir dies zu entschuldigen. Selbstverständlich stehen wir auf den Schultern unserer Vorgänger, auch der vielen nicht zitierten Lehrbücher.

Das Buch ist hervorgegangen aus einer Vielzahl von Vorlesungen, die insbesondere der zweitgenannte Autor an der Friedrich-Alexander-Universität Erlangen-Nürnberg seit 1990 sehr regelmäßig durchgeführt hat. Hinzu kamen wiederkehrend entsprechende Lehrveranstaltungen für Studierende in der nicht-vertieften Lehramtsausbildung. So entstand auch ein Großteil der Aufgabensammlung. Auf diesen „Urtext“ aufbauend, der an sich schon das Ergebnis eines jahrelangen Weiterentwicklungsprozesses war, hat dann der erstgenannte Autor in einer ganzen Reihe von Erweiterungs- und Umarbeitungsschritten, die aber den Kerntext inhaltlich unberührt gelassen haben, den vorliegenden Text entwickelt.

Allein dieser Prozess hat sich mit Unterbrechung über die letzten fünf Jahre hingezogen und wäre ohne die umfangreiche Unterstützung durch eine Vielzahl von Personen nicht möglich gewesen, denen an dieser Stelle herzlich gedankt sei. Der vielschichtige Umarbeitungsprozess des TeX-Textes wurde von den Sekretärinnen des Lehrstuhls Angewandte Mathematik über die Jahre durchgeführt, wobei hier neben Frau Astrid Bigott und Frau Silke Berghof insbesondere Frau Cornelia Kloß hervorgehoben sei. Ohne ihre immerwährende Genauigkeit, Schnelligkeit und die Ruhe bewahrende Übersicht wäre die Erstellung dieses Textes nicht möglich gewesen. Bei fortschreitend komplexer werdendem Umarbeitungsprozess war es auch notwendig weitere Hilfspersonen einzubinden. Deren Anleitung und Koordinierung wurden von Herrn Dipl.-Math. Florian Frank durchgeführt, einer weiteren tragenden Säule des Unternehmens unterstützt durch Herrn Dipl.-Math. Fabian Klingbeil. Als studentische Hilfskräfte waren u. a. beteiligt: Ludwig Dietel, Jasmin Gressmann, Fabian Langer, Benjamin Steber und Alexander Vibe. Wesentliche inhaltliche Hilfestellung kam durch die Assistenten der jeweiligen Lehrveranstaltungen:

Dipl.-Technomath. Fabian Brunner, Dr. Volker Grimm, Dr. Joachim Hoffmann, Dr. Tycho van Noorden und Dr. Alexander Prechtel. Schließlich wurden wichtige Korrekturarbeiten durchgeführt in großem Umfang von Dipl.-Math. Matthias Herz, aber auch von Dr. Vadym Aizinger, Dr. Serge Kräutle, Dipl.-Biomath. Torsten Müller, Dr. Maria Neuss-Radu, Dipl.-Math. Nadja Ray, Dr. Raphael Schulz und Dr. Nicolae Suciu.

Zwischenstadien des Textes wurden von den Professoren Günter Leugering, Alexander Martin und Karl-Hermann Neeb benutzt und hilfreich kommentiert.

Erlangen, im Juli 2012

Peter Knabner, Wolf P. Barth

Hinweise zur Benutzung des Buchs

Gerade ein so umfangreicher Text kann einem Studienanfänger Schwierigkeiten bereiten, wenn er sich aus zeitlichen Gründen nicht in der Lage sieht, den Text vollständig seinem Aufbau gemäß durcharbeiten, was die optimale Situation wäre. Daher sind einige satztechnische Strukturierungshilfsmittel eingebaut worden, die es zum einen erleichtern sollen den Kerntext zu erkennen und zum anderen die Teile zu identifizieren, die für die spezifische Studienrichtung von hervorgehobener Bedeutung sind.

Der Kerntext Lineare Algebra ist, wie bei jedem Mathematiklehrbuch, der durch „Definition“ und „Satz/Beweis“ formalisierte Teil des Textes. Auch hier gibt es eine, auch durch unterschiedliche Umrahmungen ersichtliche Strukturierung, durch (in aufsteigender Wichtigkeit) „Lemma“ oder „Korollar“, „Satz“, „Theorem“ und schließlich „Hauptsatz“. Diese höchste Stufe wird auch in den umfangreichen Index aufgenommen.

Jeder Abschnitt (bis auf die Abschnitte aus Kapitel 8) wird von einer Zusammenfassung abgeschlossen, die noch einmal auf die wesentlichen Begriffe, Zusammenhänge und Beispiele hinweist.

Viele über den Kerntext hinausgehende Überlegungen finden sich in den „Bemerkungen“. Dabei handelt es sich entweder um Erläuterungen oder aber um Erweiterungen und Ausblicke. Für deren Beweis, oder auch in den laufenden Text eingeschobene Beweisüberlegungen, wird Kleindruck verwendet. Dies heißt nicht, dass der Kerntext nicht auf die Bemerkungen zurückgreift, bedeutet aber, dass ihre Erarbeitung auch auf den „Bedarfsfall“ eingeschränkt werden kann. Auch auf der Ebene der Bemerkungen oder im Fließtext werden manche Begriffe (ohne die Definitionsumgebung) definiert. Dies ist dann durch *Kursivdruck* des Begriffs zu erkennen. Auch auf Aussagen die dort entwickelt werden, kann (immer wieder) zurückgegriffen werden. Solche Situationen werden durch kleine Umrahmungen leichter auffindbar gemacht.

Textteile, die eher isoliert stehen und daher ohne Nachteil für das weitere Verständnis übergangen werden können, sind mit * gekennzeichnet. Aussagen, die aufgrund des induktiven Aufbaus direkte Weiterentwicklungen (von \mathbb{R} nach \mathbb{C} oder von \mathbb{C} nach \mathbb{R}) sind, tragen die gleiche Nummer mit einer hochgestellten I. Eine Sonderstellung hat Hauptsatz 1.85, der ständig erweitert wird (zusätzliche Versionen I bis IV).

Die verschiedenen Textteile sind durch unterschiedliche Schlusszeichen gekennzeichnet: Beweise durch \square , Bemerkungen durch \triangle , Beispiele durch \circ .

Der Text enthält drei durchgängige Beispiele („Beispiel 2(1)“ etc.), die sich an verschiedene Anwendungsinteressen richten und darüber hinaus eine Vielzahl von Geometrieanwendungen („Beispiel (Geometrie)“) bzw. Abschnitte, die sich schwerpunktmäßig auf geometrische Inhalte konzentrieren. Je nach Interessenlage können diese Beispiele betont oder übergangen werden, das theoretische Verständnis wird dadurch nicht berührt. Einige der „Stories“, die das Buch erzählen möchte, erschließen sich aber gerade über diese Beispiele.

Die Anhänge stellen verschiedene Hilfsmittel bereit, die zum Teil zur mathematischen Propädeutik gehören, wie Anhang A über Logisches Schließen und Mengenlehre oder Anhang B.1 über das Zahlensystem, oder die den Umgang mit den Notationen erleichtern sollen (Anhang B.2). Hilfsmittel über Polynome (Anhang B.3) oder eine Zusammenfas-

sung der Analysis (Anhang C), wie sie zum Ende eines ersten Studienseesters bekannt sein sollte, werden ebenfalls angeboten.

Die Aufgaben sind in die (offensichtlichen) Kategorien (K(alkül)), (T(heorie)) und (G(eometrie)) unterteilt.

Weitere aktuelle Informationen finden sich auf <http://www.math.fau.de/knabner/LA>.

Voraussichtlich zu Beginn 2013 erscheint ein Aufgabenband, der für die meisten hier abgedruckten Aufgaben Musterlösungen enthält und darüberhinaus eine Vielzahl weiterer Aufgaben. Insbesondere liefert er einen Leitfaden durch den hiesigen Text anhand von Aufgaben.

Inhaltsverzeichnis

1	Der Zahlenraum \mathbb{R}^n und der Begriff des reellen Vektorraums	1
1.1	Lineare Gleichungssysteme	1
1.1.1	Beispiele und Spezialfälle	1
1.1.2	Die Eliminationsverfahren von GAUSS und GAUSS-JORDAN	15
	Aufgaben	28
1.2	Vektorrechnung im \mathbb{R}^n und der Begriff des \mathbb{R} -Vektorraums	30
1.2.1	Vektoren im \mathbb{R}^n , Hyperebenen und Gleichungen	30
1.2.2	Tupel-Vektorräume und der allgemeine \mathbb{R} -Vektorraum	44
	Aufgaben	52
1.3	Lineare Unterräume und das Matrix-Vektor-Produkt	53
1.3.1	Erzeugendensystem und lineare Hülle	53
1.3.2	Das Matrix-Vektor-Produkt	60
	Aufgaben	72
1.4	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension	73
1.4.1	Lineare (Un-)Abhängigkeit und Dimension	73
1.4.2	Lineare Gleichungssysteme und ihre Unterräume I: Dimensionsformeln	86
	Aufgaben	95
1.5	Das euklidische Skalarprodukt im \mathbb{R}^n und Vektorräume mit Skalarprodukt	97
1.5.1	Skalarprodukt, Norm und Winkel	97
1.5.2	Orthogonalität und orthogonale Projektion	104
	Aufgaben	123
1.6	Mathematische Modellierung: Diskrete lineare Probleme und ihre Herkunft	125
	Aufgaben	131
1.7	Affine Räume I	133
	Aufgaben	143
2	Matrizen und lineare Abbildungen	145
2.1	Lineare Abbildungen	145
2.1.1	Allgemeine lineare Abbildungen	145
2.1.2	Bewegungen und orthogonale Transformationen	154

	Aufgaben	163
2.2	Lineare Abbildungen und ihre Matrizendarstellung	164
2.2.1	Darstellungsmatrizen	164
2.2.2	Dimension und Isomorphie	172
	Aufgaben	179
2.3	Matrizenrechnung	181
2.3.1	Matrizenmultiplikation	181
2.3.2	Tensorprodukt von Vektoren und Projektionen	188
2.3.3	Invertierbare Matrizen	198
2.3.4	Das GAUSS-Verfahren vom Matrizenstandpunkt	205
2.3.5	Transponierte, orthogonale und symmetrische Matrix	210
	Aufgaben	229
2.4	Lösbare und nichtlösbare lineare Gleichungssysteme	230
2.4.1	Lineare Gleichungssysteme und ihre Unterräume II	230
2.4.2	Ausgleichsrechnung und Pseudoinverse	233
2.4.3	GAUSS-Verfahren und LR-Zerlegung I	246
	Aufgaben	255
2.5	Permutationsmatrizen und die LR-Zerlegung einer Matrix	257
2.5.1	Permutationen und Permutationsmatrizen	257
2.5.2	GAUSS-Verfahren und LR-Zerlegung II	264
	Aufgaben	273
2.6	Die Determinante	274
2.6.1	Motivation und Existenz	274
2.6.2	Eigenschaften	280
2.6.3	Orientierung und Determinante	294
	Aufgaben	299
2.7	Das Vektorprodukt	300
	Aufgaben	308
2.8	Affine Räume II	309
	Aufgaben	317
3	Vom \mathbb{R}-Vektorraum zum K-Vektorraum: Algebraische Strukturen	319
3.1	Gruppen und Körper	319
	Aufgaben	332
3.2	Vektorräume über allgemeinen Körpern	334
	Aufgaben	342
3.3	Euklidische und unitäre Vektorräume	344
	Aufgaben	356
3.4	Der Quotientenvektorraum	357
	Aufgaben	368
3.5	Der Dualraum	370
	Aufgaben	381

4	Eigenwerte und Normalformen von Matrizen	383
4.1	Basiswechsel und Koordinatentransformationen	383
	Aufgaben	394
4.2	Eigenwerttheorie	396
4.2.1	Definitionen und Anwendungen	396
4.2.2	Diagonalisierbarkeit und Trigonalisierbarkeit	417
	Aufgaben	435
4.3	Unitäre Diagonalisierbarkeit: Die Hauptachsentransformation	437
	Aufgaben	450
4.4	Blockdiagonalisierung aus der SCHUR-Normalform	452
4.4.1	Der Satz von CAYLEY-HAMILTON	452
4.4.2	Blockdiagonalisierung mit dem Satz von CAYLEY-HAMILTON	461
4.4.3	Algorithmische Blockdiagonalisierung – Die SYLVESTER-Gleichung	469
	Aufgaben	476
4.5	Die JORDANSche Normalform	477
4.5.1	Kettenbasen und die JORDANSche Normalform im Komplexen	477
4.5.2	Die reelle JORDANSche Normalform	493
4.5.3	Beispiele und Berechnung	501
	Aufgaben	511
4.6	Die Singulärwertzerlegung	513
4.6.1	Herleitung	513
4.6.2	Singulärwertzerlegung und Pseudoinverse	523
	Aufgaben	528
4.7	Positiv definite Matrizen und quadratische Optimierung	530
4.7.1	Positiv definite Matrizen	530
4.7.2	Quadratische Optimierung	540
4.7.3	Extremalcharakterisierung von Eigenwerten	550
	Aufgaben	554
4.8	Ausblick: Das Ausgleichsproblem und die QR-Zerlegung	556
5	Bilinearformen und Quadriken	561
5.1	α -Bilinearformen	561
5.1.1	Der Vektorraum der α -Bilinearformen	561
5.1.2	Orthogonales Komplement	570
	Aufgaben	580
5.2	Symmetrische Bilinearformen und hermitesche Formen	582
	Aufgaben	590
5.3	Quadriken	591
5.3.1	Die affine Normalform	594
5.3.2	Die euklidische Normalform	603
	Aufgaben	606
5.4	Alternierende Bilinearformen	608
	Aufgaben	614

6	Polyeder und lineare Optimierung	617
6.1	Elementare konvexe Geometrie	623
	Aufgaben	627
6.2	Polyeder	628
	Aufgaben	645
6.3	Beschränkte Polyeder	646
	Aufgaben	653
6.4	Das Optimierungsproblem	655
	Aufgaben	661
6.5	Ecken und Basislösungen	663
	Aufgaben	670
6.6	Das Simplex-Verfahren	671
	Aufgaben	678
6.7	Optimalitätsbedingungen und Dualität	680
	Aufgaben	691
7	Lineare Algebra und Analysis	693
7.1	Normierte Vektorräume	693
	7.1.1 Analysis auf normierten Vektorräumen	693
	7.1.2 Normen und Dimension	700
	Aufgaben	712
7.2	Normierte Algebren	713
	7.2.1 Erzeugte und verträgliche Normen	713
	7.2.2 Matrixpotenzen	723
	Aufgaben	744
7.3	HILBERT-Räume	746
	7.3.1 Der RIESZSche Darstellungssatz und der adjungierte Operator ...	746
	7.3.2 SCHAUDER-Basen	762
	Aufgaben	769
7.4	Ausblick: Lineare Modelle, nichtlineare Modelle, Linearisierung	770
	Aufgaben	773
8	Einige Anwendungen der Linearen Algebra	775
8.1	Lineare Gleichungssysteme, Ausgleichsprobleme und Eigenwerte unter Datenstörungen	775
	8.1.1 Lineare Gleichungssysteme	775
	8.1.2 Ausgleichsprobleme	784
	8.1.3 Eigenwerte	788
	Aufgaben	792
8.2	Klassische Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme und Eigenwerte	794
	8.2.1 Das Page-Rank-Verfahren von Google	794
	8.2.2 Linear-stationäre Iterationsverfahren für lineare Gleichungssysteme	799
	8.2.3 Gradientenverfahren	808
	8.2.4 Die Potenzmethode zur Eigenwertberechnung	813
	Aufgaben	816

8.3	Datenanalyse, -synthese und -kompression	819
8.3.1	Wavelets	821
8.3.2	Diskrete FOURIER-Transformation	828
	Aufgaben	835
8.4	Lineare Algebra und Graphentheorie	837
	Aufgaben	843
8.5	(Invers-)Monotone Matrizen und Input-Output-Analyse	844
	Aufgaben	858
8.6	Kontinuierliche und dynamische Systeme	859
8.6.1	Die Lösungsraumstruktur bei linearen Problemen	859
8.6.2	Stabilität: Asymptotisches Verhalten für große Zeiten	875
8.6.3	Approximation kontinuierlicher durch diskrete dynamische Systeme	891
8.6.4	Ausblick: Vom räumlich diskreten zum räumlich verteilten kontinuierlichen Modell	901
8.6.5	Stochastische Matrizen	906
	Aufgaben	913
A	Logisches Schließen und Mengenlehre	915
A.1	Aussagenlogik	915
A.2	Mengenlehre	920
A.3	Prädikatenlogik	924
A.4	Produkte von Mengen, Relationen und Abbildungen	926
A.5	Äquivalenz- und Ordnungsrelationen	933
B	Zahlenmengen und algebraische Strukturen	939
B.1	Von den PEANO-Axiomen zu den reellen Zahlen	939
B.2	Schreibweisen und Rechenregeln	946
B.3	(Formale) Polynome	949
C	Analysis in normierten Räumen	961
	Literaturverzeichnis	967
	Sachverzeichnis	969