
Springer-Lehrbuch

Grundkurs Theoretische Physik

Band 1

Klassische Mechanik

10. Auflage

ISBN: 978-3-642-29936-0

Band 2

Analytische Mechanik

8. Auflage

ISBN: 978-3-642-12949-0

Band 3

Elektrodynamik

9. Auflage

ISBN: 978-3-642-13448-7

Band 4

Spezielle Relativitätstheorie,

Thermodynamik

8. Auflage

ISBN: 978-3-642-24480-3

Band 5/1

Quantenmechanik – Grundlagen

8. Auflage

ISBN: 978-3-642-25402-4

Band 5/2

Quantenmechanik –

Methoden und Anwendungen

7. Auflage

ISBN: 978-3-642-24420-9

Band 6

Statistische Physik

6. Auflage

ISBN: 978-3-540-68870-9

Band 7

Viel-Teilchen-Theorie

7. Auflage

ISBN: 978-3-642-01605-9

Wolfgang Nolting

Grundkurs Theoretische Physik 5/1

Quantenmechanik – Grundlagen

8. Auflage

 Springer Spektrum

Professor Wolfgang Nolting
Humboldt-Universität Berlin
Berlin, Deutschland

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-25402-4

ISBN 978-3-642-25403-1 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-25403-1

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2000, 2002, 2004, 2009, 2013

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Lektorat: Dr. Vera Spillner

Einbandentwurf: deblik, Berlin

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE. Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media.

www.springer-spektrum.de

Allgemeines Vorwort

Die sieben Bände der Reihe „*Grundkurs Theoretische Physik*“ sind als direkte Begleiter zum Hochschulstudium Physik gedacht. Sie sollen in kompakter Form das wichtigste theoretisch-physikalische Rüstzeug vermitteln, auf dem aufgebaut werden kann, um anspruchsvollere Themen und Probleme im fortgeschrittenen Studium und in der physikalischen Forschung bewältigen zu können. Die Konzeption ist so angelegt, daß der erste Teil des Kurses,

Klassische Mechanik (Band 1)

Analytische Mechanik (Band 2)

Elektrodynamik (Band 3)

Spezielle Relativitätstheorie, Thermodynamik (Band 4),

als Theorieteil eines „*Integrierten Kurses*“ aus Experimentalphysik und Theoretischer Physik, wie er inzwischen an zahlreichen deutschen Universitäten vom ersten Semester an angeboten wird, zu verstehen ist. Die Darstellung ist deshalb bewußt ausführlich, manchmal sicher auf Kosten einer gewissen Eleganz, und in sich abgeschlossen gehalten, so daß der Kurs auch zum Selbststudium ohne Sekundärliteratur geeignet ist. Es wird nichts vorausgesetzt, was nicht an früherer Stelle der Reihe behandelt worden ist. Dies gilt insbesondere auch für die benötigte Mathematik, die vollständig so weit entwickelt wird, daß mit ihr theoretisch-physikalische Probleme bereits vom Studienbeginn an gelöst werden können. Dabei werden die mathematischen Einschübe immer dann eingefügt, wenn sie für das weitere Vorgehen im Programm der Theoretischen Physik unverzichtbar werden. Es versteht sich von selbst, daß in einem solchen Konzept nicht alle mathematischen Theorien mit absoluter Strenge bewiesen und abgeleitet werden können. Da muß bisweilen ein Verweis auf entsprechende mathematische Vorlesungen und vertiefende Lehrbuchliteratur erlaubt sein. Ich habe mich aber trotzdem um eine halbwegs abgerundete Darstellung bemüht, so daß die mathematischen Techniken nicht nur angewendet werden können, sondern dem Leser zumindest auch plausibel erscheinen.

Die mathematischen Einschübe werden natürlich vor allem in den ersten Bänden der Reihe notwendig, die den Stoff bis zum Physik-Vordiplom beinhalten. Im zweiten Teil des Kurses, der sich mit den modernen Disziplinen der Theoretischen Physik befaßt,

Quantenmechanik: Grundlagen (Band 5/1)

Quantenmechanik: Methoden und Anwendungen (Band 5/2)

Statistische Physik (Band 6)

Viel-Teilchen-Theorie (Band 7),

sind sie weitgehend überflüssig geworden, insbesondere auch deswegen, weil im Physik-Studium inzwischen die Mathematik-Ausbildung Anschluß gefunden hat. Der frühe Beginn der Theorie-Ausbildung bereits im ersten Semester gestattet es, die *Grundlagen der Quantenmechanik* schon vor dem Vordiplom zu behandeln. Der Stoff der letzten drei Bände kann natürlich nicht mehr Bestandteil eines „*Integrierten Kurses*“ sein, sondern wird wohl überall in reinen Theorie-Vorlesungen vermittelt. Das gilt insbesondere für die „*Viel-Teilchen-Theorie*“, die bisweilen auch unter anderen Bezeichnungen wie „*Höhere Quantenmechanik*“ etwa im achten Fachsemester angeboten wird. Hier werden neue, über den Stoff des Grundstudiums hinausgehende Methoden und Konzepte diskutiert, die insbesondere für korrelierte Systeme aus vielen Teilchen entwickelt wurden und für den erfolgreichen Übergang zu wissenschaftlichem Arbeiten (Diplom, Promotion) und für das Lesen von Forschungsliteratur inzwischen unentbehrlich geworden sind.

In allen Bänden der Reihe „*Grundkurs Theoretische Physik*“ sollen zahlreiche Übungsaufgaben dazu dienen, den erlernten Stoff durch konkrete Anwendungen zu vertiefen und richtig einzusetzen. Eigenständige Versuche, abstrakte Konzepte der Theoretischen Physik zur Lösung realer Probleme aufzubereiten, sind absolut unverzichtbar für den Lernenden. Ausführliche Lösungsanleitungen helfen bei größeren Schwierigkeiten und testen eigene Versuche, sollten aber nicht dazu verleiten, „*aus Bequemlichkeit*“ eigene Anstrengungen zu unterlassen. Nach jedem größeren Kapitel sind Kontrollfragen angefügt, die dem Selbsttest dienen und für Prüfungsvorbereitungen nützlich sein können.

Ich möchte nicht vergessen, an dieser Stelle allen denen zu danken, die in irgendeiner Weise zum Gelingen dieser Buchreihe beigetragen haben. Die einzelnen Bände sind letztlich auf der Grundlage von Vorlesungen entstanden, die ich an den Universitäten in Münster, Würzburg, Osnabrück, Valladolid (Spanien), Warangal (Indien) sowie in Berlin gehalten habe. Das Interesse und die konstruktive Kritik der Studenten bedeuteten für mich entscheidende Motivation, die Mühe der Erstellung eines doch recht umfangreichen Manuskripts als sinnvoll anzusehen. In der Folgezeit habe ich von zahlreichen Kollegen wertvolle Verbesserungsvorschläge erhalten, die dazu geführt haben, das Konzept und die Ausführung der Reihe weiter auszubauen und aufzuwerten.

Die ersten Auflagen dieser Buchreihe sind im Verlag Zimmermann-Neufang entstanden. Ich kann mich an eine sehr faire und stets erfreuliche Zusammenarbeit erinnern. Danach erschien die Reihe bei Vieweg. Die Übernahme der Reihe durch den Springer-Verlag im

Januar 2001 hat dann zu weiteren professionellen Verbesserungen im Erscheinungsbild des „*Grundkurs Theoretische Physik*“ geführt. Herrn Dr. Kölsch und seinem Team bin ich schon jetzt für viele Vorschläge und Anregungen sehr dankbar. Meine Manuskripte scheinen in guten Händen zu liegen.

Berlin, im April 2001

Wolfgang Nolting

Vorwort zu Band 5/1

Der thematische Aufbau des „*Grundkurs Theoretische Physik*“ wurde einem Studiengang in *Theoretischer Physik* angepaßt, der im ersten Semester mit der *Klassischen Mechanik* beginnt und im sechsten Semester mit der *Statistischen Physik* endet, so wie es an immer mehr deutschen Hochschulen heutzutage praktiziert wird. In den ersten vier Bänden wurden mit der *Klassischen Mechanik* (Band 1), der *Analytischen Mechanik* (Band 2), der *Elektrodynamik* (Band 3), der *Speziellen Relativitätstheorie* (Band 4) und der phänomenologischen *Thermodynamik* (Band 4) die sog. *klassischen Disziplinen* behandelt, die in der Regel vor dem Vordiplom angeboten werden und den entsprechenden Prüfungsstoff darstellen. Da in den Anfangssemestern insbesondere der richtige Einsatz passender Mathematik in die *Theoretische Physik* Schwierigkeiten macht, wurde dem Erlernen des mathematischen Rüstzeugs in den ersten vier Bänden ein relativ breiter Raum zugestanden.

Auch für die Behandlung der *Quantenmechanik* werden wir neue mathematische Konzepte einführen müssen, jedoch dürften hier die besonderen Anforderungen eher im *Begrifflichen* liegen. Die *Quantenmechanik* benutzt neuartige Denkmodelle, die der klassischen Physik fremd sind und deren Verständnis und Anwendung dem „*Anfänger*“ durchaus Schwierigkeiten bereiten können. Es ist deshalb in diesem Fall noch wichtiger als ohnehin schon, sich anhand von Übungsbeispielen, die in diesem fünften Band in besonders großer Zahl angeboten werden, mit den zunächst ungewohnten Prinzipien der *Quantenmechanik* vertraut zu machen.

Die Fülle des Stoffes hat es notwendig gemacht, die Darstellung der *Quantenmechanik* auf zwei Bände zu verteilen, wobei sich der erste Teil mehr mit den elementaren Grundlagen beschäftigt. Es wird in einem ausgedehnten ersten Kapitel mit einer induktiven Begründung der *Quantenmechanik* begonnen, d. h. mit einer kritischen Betrachtung der *vorquantenmechanischen Zeit*, also mit einer Analyse der Probleme, die sich der Physik zu Beginn dieses Jahrhunderts boten. Sicher kann man über den Wert einer solchen historischen Einführung geteilter Meinung sein, mir scheint sie aber ein wirkliches Verstehen von *Quantenmechanik* unterstützen zu können. Da ich mich zu diesem induktiven Weg entschlossen habe, wird er auch dem Konzept der Buchreihe entsprechend einerseits kompakt, andererseits aber auch so detailliert dargestellt, daß die wichtigen Zusammenhänge ohne Fremdliteratur verstanden werden können.

Im Mittelpunkt des zweiten Kapitels steht mit der *Schrödinger-Gleichung* die zentrale Bewegungsgleichung der *Quantenmechanik*, die an die Stelle der klassischen (*Newtonschen*, *Lagrangeschen*, *Hamiltonschen*) Bewegungsgleichungen tritt. Die Schrödinger-Gleichung kann nicht mathematisch streng begründet werden, sondern muß mehr oder weniger über Analogiebetrachtungen eingeführt werden. Dazu kann die *Hamilton-Jacobi-Theorie* (Kap. 3 in Band 2) benutzt werden, nach der die *Quantenmechanik* als übergeordnete Theorie zu verstehen ist, wobei der *Klassischen Mechanik* im Rahmen der *Quantenmechanik* die Rolle zugeordnet wird, die die geometrische Optik in der allgemeinen Lichtwellentheorie spielt. *Der Teilchen-Welle-Dualismus* der Materie, der als ganz entscheidende Erkenntnis der Physik in diesem Jahrhundert zu verstehen ist, wird sich über eine solche „*Extrapolation*“ der *Klassischen Mechanik* bereits andeuten.

Das Kap. 2 wird verdeutlichen, warum der Zustand eines Systems durch eine „*Wellenfunktion*“ beschrieben wird, deren statistischer Charakter eng mit klassisch unverständlichen, typisch quantenmechanischen Phänomenen wie der *Heisenbergschen Unbestimmtheitsrelation* verknüpft ist. Dieser statistische Charakter gestattet der *Quantenmechanik* im Gegensatz zur *Klassischen Physik* nur Wahrscheinlichkeitsaussagen. Typische Bestimmungsgrößen sind deshalb *Aufenthaltswahrscheinlichkeiten*, *Mittelwerte* und *Schwankungen*.

Die *Schrödingersche Wellenmechanik* ist nur eine von mehreren Darstellungsmöglichkeiten der *Quantenmechanik*. Die vollständigen abstrakten Grundlagen sollen im dritten Kapitel erarbeitet werden. Während in Kap. 1 die *Quantenmechanik* induktiv begründet wird, was schließlich zur Schrödinger-Formulierung in Kap. 2 führt, soll in Kap. 3 der umgekehrte, deduktive Weg beschritten werden. Fundamentale Begriffe wie *Zustand* und *Observable* werden axiomatisch als *Elemente* und *Operatoren* eines *Hilbert-Raums* eingeführt. „*Messung*“ bedeutet „*Operation*“ an dem „*Zustand*“ des Systems, der sich dabei in der Regel ändert. Es erklärt sich damit, warum die beschreibende Mathematik eine *Operator-Theorie* ist, die an dieser Stelle des Grundkurses eingeführt und geübt werden muß. Kap. 3 schließt mit dem *Korrespondenzprinzip*, durch das noch einmal eine Brücke zur *Klassischen Physik* geschlagen wird.

Wir werden mit Kap. 4 unsere allgemeinen Überlegungen zunächst unterbrechen, um das Verständnis der abstrakten Theorie durch einige wichtige Anwendungen auf *einfache Potentialprobleme* zu vertiefen. Es werden einige neuartige, typisch quantenmechanische Phänomene (*Tunneleffekt*) als unmittelbare Resultate der Modellrechnungen verständlich werden. Damit wird der erste Teil der *Quantenmechanik*-Einführung abschließen. Anwendungen, Vertiefungen und Erweiterungen des erlernten Stoffes werden dann im zweiten Teil (Band 5/2) angeboten.

Ich habe einen Dank allen denen auszusprechen, die mir durch konstruktive Kritik und viele Diskussionen bei der Abfassung des Manuskripts geholfen haben. So hat mich Herr PD Dr. V. Eyert durch einige interessante Übungsvorschläge sehr unterstützt. Das vorliegende Buch ist zunächst beim Verlag Zimmermann-Neufang erschienen. Seit Januar 2001

wird der gesamte Grundkurs vom Springer-Verlag herausgegeben. Für die offenkundige Sorgfalt des Verlages und für faire Zusammenarbeit bin ich sehr dankbar.

Berlin, im Juli 2001

Wolfgang Nolting

Vorwort zur 8. Auflage von Band 5/1

Am eigentlichen Konzept des „*Grundkurs Theoretische Physik*“ und damit auch an dem des ersten Teils des fünften Bandes der Reihe („*Quantenmechanik-Grundlagen*“) hat sich natürlich mit der vorliegenden neuen Auflage nichts geändert. Der Grundkurs ist nach wie vor auf ein Physik-Studienprogramm zugeschnitten, das bereits im ersten Semester mit der Theoretischen Physik beginnt, so wie es die meisten neuen Bachelor/Master-Studienordnungen an deutschen Hochschulen vorsehen. Die „Quantenmechanik“ wird damit in der Regel im vierten und fünften Semester angeboten.

Techniken und Konzepte werden auch in diesem Band des Grundkurses weiterhin so detailliert vermittelt, dass im Prinzip ein Selbststudium ohne aufwendige Zusatzliteratur möglich sein sollte. In diesem Zusammenhang spielen die zahlreichen Übungsaufgaben, die nach jedem wichtigen Teilabschnitt angeboten werden, eine für den Lerneffekt unverzichtbare Rolle. Dabei sollten die ausführlichen Musterlösungen nicht von der selbstständigen Bearbeitung der Aufgaben abhalten, sondern eher als Kontrolle der eigenen Bemühungen dienen.

Für die jetzt vorliegende 8. Auflage des ersten Teils von Band 5 wurde das Angebot der Übungsaufgaben überarbeitet und durch eine Reihe von neuen Aufgaben stark erweitert. Zudem wurden kleinere Korrekturen und Ergänzungen im Text vollzogen, die dem besseren Verständnis dienen dürften. Eine intensive Suche nach ärgerlichen Druckfehlern war erfolgreich und wird diese nun (hoffentlich!) auf ein Minimum reduzieren.

Wie schon bei den früheren Auflagen haben ich sehr von Kommentaren und diversen Verbesserungsvorschlägen zahlreicher Kollegen und vor allem Studierender profitiert. Dafür möchte ich mich an dieser Stelle ganz herzlich bedanken. Besonders erwähnen sollte ich frühere und jetzige Mitarbeiter meiner Arbeitsgruppe an der Humboldt-Universität zu Berlin, die mir durch konstruktive Kritik und Unterstützung bei der Lösung von inhaltlichen, redaktionellen und organisatorischen Problemen sehr geholfen haben. Die Zusammenarbeit mit dem Springer-Verlag, insbesondere mit Frau Dr. V. Spillner, verlief, wie auch früher schon, absolut reibungslos, produktiv und damit sehr erfreulich.

Berlin, im April 2013

Wolfgang Nolting

Inhaltsverzeichnis

1	Induktive Begründung der Wellenmechanik	1
1.1	Grenzen der klassischen Physik	4
1.1.1	Aufgaben	7
1.2	Das Planck'sche Wirkungsquantum	8
1.2.1	Wärmestrahlungsgesetze	8
1.2.2	Das Versagen der klassischen Physik	11
1.2.3	Die Planck'sche Formel	14
1.2.4	Aufgaben	18
1.3	Atome, Elektronen, Atomkerne	18
1.3.1	Teilbarkeit der Materie	18
1.3.2	Elektronen	23
1.3.3	Rutherford-Streuung	33
1.3.4	Aufgaben	38
1.4	Lichtwellen, Lichtquanten	41
1.4.1	Interferenz, Beugung	42
1.4.2	Fraunhofer-Beugung	45
1.4.3	Beugung am Kristallgitter	49
1.4.4	Lichtquanten, Photonen	54
1.4.5	Aufgaben	59
1.5	Semiklassische Modellvorstellungen zum Atomaufbau	61
1.5.1	Versagen des klassischen Rutherford-Modells	61

1.5.2	Bohr'sches Atommodell	65
1.5.3	Korrespondenzprinzip	72
1.5.4	Aufgaben	77
	Kontrollfragen	77
2	Schrödinger-Gleichung	81
2.1	Materiewellen	83
2.1.1	Wirkungswellen in der Hamilton-Jacobi-Theorie	84
2.1.2	Die de Broglie-Wellen	88
2.1.3	Das Doppelspaltexperiment	91
2.1.4	Aufgaben	93
2.2	Die Wellenfunktion	94
2.2.1	Statistische Interpretation	94
2.2.2	Die freie Materiewelle	98
2.2.3	Wellenpakete	102
2.2.4	Wellenfunktion im Impulsraum	107
2.2.5	Periodische Randbedingungen	109
2.2.6	Mittelwerte, Schwankungen	111
2.2.7	Aufgaben	112
2.3	Der Impulsoperator	117
2.3.1	Impuls- und Ortsdarstellung	117
2.3.2	Nicht-Vertauschbarkeit von Operatoren	120
2.3.3	Korrespondenzregel	122
2.3.4	Aufgaben	125
	Kontrollfragen	128
3	Grundlagen der Quantenmechanik (Dirac-Formalismus)	131
3.1	Begriffe	134
3.1.1	Zustand	134
3.1.2	Präparation eines reinen Zustands	135

3.1.3	Observable	140
3.2	Mathematischer Formalismus	141
3.2.1	Hilbert-Raum	141
3.2.2	Hilbert-Raum der quadratintegrablen Funktionen ($\mathcal{H} = L^2$)	147
3.2.3	Dualer Raum, bra- und ket-Vektoren	149
3.2.4	Uneigentliche (Dirac-)Vektoren	151
3.2.5	Lineare Operatoren	155
3.2.6	Eigenwertproblem	159
3.2.7	Spezielle Operatoren	164
3.2.8	Lineare Operatoren als Matrizen	170
3.2.9	Aufgaben	175
3.3	Physikalische Interpretation	188
3.3.1	Postulate der Quantenmechanik	189
3.3.2	Messprozess	191
3.3.3	Verträgliche, nicht-verträgliche Observable	195
3.3.4	Dichtematrix (Statistischer Operator)	198
3.3.5	Unbestimmtheitsrelation	203
3.3.6	Aufgaben	205
3.4	Dynamik der Quantensysteme	209
3.4.1	Zeitentwicklung der Zustände (Schrödinger-Bild)	210
3.4.2	Zeitentwicklungsoperator	213
3.4.3	Zeitentwicklung der Observablen (Heisenberg-Bild)	217
3.4.4	Wechselwirkungsdarstellung (Dirac-Bild)	220
3.4.5	Quantentheoretische Bewegungsgleichungen	223
3.4.6	Energie-Zeit-Unschärferelation	226
3.4.7	Aufgaben	228
3.5	Korrespondenzprinzip	231
3.5.1	Heisenberg-Bild und klassische Poisson-Klammer	232
3.5.2	Orts- und Impulsdarstellung	235
3.5.3	Aufgaben	241
	Kontrollfragen	245

4	Einfache Modellsysteme	251
4.1	Allgemeine Aussagen zu eindimensionalen Potentialproblemen	254
4.1.1	Lösung der eindimensionalen Schrödinger-Gleichung	254
4.1.2	Wronski-Determinante	258
4.1.3	Eigenwertspektrum	260
4.1.4	Parität	265
4.1.5	Aufgaben	267
4.2	Potentialtopf	268
4.2.1	Gebundene Zustände	268
4.2.2	Streuzustände	273
4.2.3	Aufgaben	278
4.3	Potentialbarrieren	283
4.3.1	Potentialstufe	283
4.3.2	Potentialwall	289
4.3.3	Tunneleffekt	292
4.3.4	Beispiel: α -Radioaktivität	293
4.3.5	Kronig-Penney-Modell	297
4.3.6	Aufgaben	303
4.4	Harmonischer Oszillator	307
4.4.1	Erzeugungs- und Vernichtungsoperator	309
4.4.2	Eigenwertproblem des Besetzungszahloperators	311
4.4.3	Spektrum des harmonischen Oszillators	315
4.4.4	Ortsdarstellung	317
4.4.5	Sommerfeld'sche Polynommethode	321
4.4.6	Mehrdimensionaler harmonischer Oszillator	325
4.4.7	Aufgaben	327
	Kontrollfragen	334
	Lösungen der Übungsaufgaben	339
	Sachverzeichnis	535