

Springer-Lehrbuch

Peter Schmäser

Theoretische Physik für Studierende des Lehramts 1

Quantenmechanik



Springer Spektrum

Prof. Dr. Peter Schmüser
Institut für Experimentalphysik der Universität Hamburg und DESY
Notkestr. 85
22607 Hamburg
Deutschland
Peter.Schmueser@desy.de

ISSN 0937-7433

ISBN 978-3-642-25396-6

ISBN 978-3-642-25397-3 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-642-25397-3

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Springer Spektrum

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung, die nicht ausdrücklich vom Urheberrechtsgesetz zugelassen ist, bedarf der vorherigen Zustimmung des Verlags. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Bearbeitungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Planung und Lektorat: Vera Spillner, Birgit Münch

Einbandabbildung: Doppelspaltexperiment

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier

Springer Spektrum ist eine Marke von Springer DE.

Springer DE ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media

www.springer-spektrum.de

Vorwort

An der Universität Hamburg wird seit dem Jahr 2002 eine eigenständige zweisemestrige Vorlesung *Theoretische Physik für Studierende des Lehramts* angeboten mit dem Ziel, zukünftigen Physiklehrern/innen die Grundlagen der theoretischen Physik zu vermitteln und dabei besonders die Gebiete zu betonen, die für den Unterricht in der Oberstufe des Gymnasiums und in den Physikleistungskursen von besonderem Wert sind. Das vorliegende zweibändige Lehrbuch ist aus den Vorlesungen und Übungen hervorgegangen, die ich – in enger Absprache mit anderen Professoren des Departments Physik, dem Institut für Lehrerbildung in Hamburg, dem Lehrerprüfungsamt, Physiklehrern und Studierenden – speziell für die Lehramtsstudierenden konzipiert und mehrfach gehalten habe. Da die *moderne Physik* im Curriculum der Oberstufe eine herausragende Rolle spielt, bestand Einigkeit darin, dass die Quantenmechanik und die Relativitätstheorie einen zentralen Platz einnehmen sollten. Dazu kommt die Elektrodynamik, die die theoretische Grundlage elektrischer Maschinen sowie der Radiotechnik und Optik ist. Die Vorlesungen bauen auf dem Physik-Kurs des Grundstudiums auf. In Hamburg werden in der Physik I und II die Mechanik, Wärmelehre, Elektrizität, Magnetismus und Optik behandelt. Die Physik III ist eine Einführung in die Quanten- und Atomphysik.

Die zwei Bände des Lehrbuchs sind folgendermaßen aufgebaut: in den Hauptkapiteln wird der für das Examen relevante Stoff in möglichst einfacher und klarer Form dargestellt. Die didaktischen Anmerkungen am Ende der Kapitel haben das Ziel, den zukünftigen Lehrern/innen Verständnishilfen zu geben und auch Hinweise, wie sie die physikalischen Konzepte in der Schule vermitteln könnten. Zu diesem Zweck gibt es auch eine Vielzahl von Abbildungen. Mathematische Ergänzungen und kompliziertere theoretische Herleitungen sind in den Anhängen zu finden. Diese Anhänge sollen interessierten Studierenden helfen, die Theorie besser zu verstehen und Rechnungen selbst durchführen zu können. Das dort präsentierte Material gehört aber in Hamburg nicht zum Examenstoff.

Die Quantentheorie ist schon mehr als 80 Jahre alt, sie bereitet aber immer wieder große Verständnisschwierigkeiten, weil viele ihrer Aussagen unserer Erfahrung und Intuition widersprechen.

Wenn man jedoch heute diese Theorie lehren oder lernen will, befindet man sich in einer viel besseren Lage als die Professoren und Studenten vor 80 oder auch 40 Jahren. Viele der von Bohr, Schrödinger, Heisenberg, Einstein und anderen vorgeschlagenen „Gedankenexperimente“, die damals heftig und kontrovers diskutiert wurden, sind durch enorme Fortschritte in der Experimentiertechnik inzwischen Wirklichkeit geworden. Messungen können dazu dienen, eine Entscheidung zwischen verschiedenartigen theoretischen Ideen und Interpretationen zu treffen, was um 1925–1935 kaum möglich war. Die fremdartigen, der Anschauung zuwiderlaufenden Aussagen der Theorie lassen sich Stück für Stück durch ausgeklügelte Experimente bestätigen: Teilchen-Welle-Komplementarität, Verschränkung, Nichtlokalität der Quantenmechanik. Auf mich üben die modernen Experimente zur Quantenmechanik eine große Faszination aus, und mir liegt viel daran, diese Faszination auch den Lesern des Buches zu vermitteln. Aus diesem Grund nimmt die Darstellung moderner Experimente einen breiten Raum ein. Hinzu kommt, dass die Quantentheorie die Grundlage fast aller neuen Technologien ist und somit außer ihrem erkenntnistheoretischen Wert auch eine enorme praktische Bedeutung hat.

In der Einleitung wird die Teilchen-Welle-Komplementarität anhand des Doppelspaltexperiments und seiner modernen Varianten sehr eingehend dargestellt, und zwar ohne großen mathematischen Formalismus. Natürlich werden auch die Spektrallinien der Atome und der photoelektrische Effekt angesprochen, deren Erklärung wichtige Meilensteine auf dem Weg zur Quantenmechanik waren. Die theoretische Beschreibung der Hohlraumstrahlung durch Max Planck war der Beginn des Quantenzeitalters, sie ist aber für den Anfänger nicht so leicht zu verstehen, deshalb wird die Planck'sche Strahlungsformel erst später (in Kap. 8) hergeleitet.

Das Hauptziel der Kapitel 2 bis 8 ist eine systematische Darstellung der Quantenmechanik auf der Basis der Schrödinger-Gleichung. Abstraktere Formulierungen (z. B. Hilbertraum) werden weitgehend vermieden, um Lehramtsstudierenden, die nicht Mathematik als zweites Fach studieren, den Zugang zur Theorie zu erleichtern. Die Form der Schrödinger-Gleichung wird in Kap. 2 plausibel gemacht. Die Operatoren für Ort, Impuls und Energie werden eingeführt sowie die Wellenfunktion als Wahrscheinlichkeitsamplitude. In Kap. 3 werden die typischen eindimensionalen Beispiele vorgerechnet: Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden, Potentialtopf endlicher Tiefe, harmonischer Oszillator, freie Teilchen und Wellenpakete, Potentialschwelle, Tunneleffekt. Die theoretischen Konzepte und der Formalismus der Quantenmechanik sind Inhalt von Kap. 4: formale Definition der Operatoren, Eigenfunktionen und Eigenwerte, Erwartungswerte, vertauschbare Operatoren und gleichzeitige Messbarkeit, nicht vertauschbare Operatoren und Unschärferelation, die Rolle des Messprozesses. Bahndrehimpuls und Spin werden in Kap. 5 behandelt. Das Wasserstoffatom wird in Kap. 6 vorgerechnet, wobei die Radialgleichung nur für den Grundzustand gelöst wird, während die Wellenfunktionen der Anregungszustände im Anhang konstruiert werden. Die bildliche Darstellung der Elektronenwolke ist ein wichtiger Bestandteil von Kap. 6. In den historischen und didaktischen Anmerkungen werden die früheren Atommodelle, ihre Leistungen und ihre Begrenzungen besprochen. In Kap. 7 werden identische Teilchen, Pauli-Prinzip, Heliumatom, Periodisches System der Elemente und Hybridwellenfunktionen besprochen.

In den didaktischen Anmerkungen wird diskutiert, wie eine Welt ohne Pauli-Prinzip aussehen könnte. Die Absorption und stimulierte Emission von Strahlung wird in Kap. 8 in stark vereinfachter Form behandelt, und es werden die Planck'sche Strahlungsformel und die Einstein-Koeffizienten hergeleitet. Das erste Vertiefungskapitel (Kap. 9) widmet sich hochaktuellen Themen der Quantenmechanik: Verschränkung, Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon, Bell'sche Ungleichung, Nichtlokalität, Schrödinger-Katze, Dekohärenz, Übergang von der Quanten- zur klassischen Physik. Relevante Experimente werden ausführlich diskutiert. Im zweiten Vertiefungskapitel (Kap. 10) sowie im Anhang E wird die zeitunabhängige Störungsrechnung zur Berechnung der Feinstruktur des H-Atoms angewandt. Die zeitabhängige Störungsrechnung wird benutzt, um Strahlungsübergänge zu berechnen und damit die mehr qualitativen Betrachtungen in Kap. 8 auf eine solide Grundlage zu stellen. Aus Platzgründen werden Streuprozesse in diesem Buch nicht behandelt.

Das vorliegende Buch ist erfahrungsgemäß zu umfangreich für eine einsemestrigere Veranstaltung mit 4 SWS Vorlesung und 2 SWS Übung (dies trifft wohl auf alle Lehrbücher zu). Man wird daher eine Auswahl treffen und Schwerpunkte setzen müssen.

Die Ausarbeitung des Lehrbuchs erfolgte im Rahmen einer Seniorprofessur der Wilhelm und Else Heraeus-Stiftung für die Weiterentwicklung der Lehrerbildung im Fach Physik. Ich danke der WE Heraeus-Stiftung sehr herzlich für die großzügige Förderung. Prof. Klaus Fredenhagen, Prof. Siegfried Großmann und Prof. Erich Lohrmann haben frühere Versionen des Manuskripts sorgfältig gelesen und viele hilfreiche Anmerkungen und Verbesserungsvorschläge gemacht. Ihnen gebührt besonderer Dank. Eine vorläufige Version der *Quantenmechanik* ist von den Profs. Jan Louis und Joachim Bartels in ihren Vorlesungen für Lehramtskandidaten verwendet worden. Für viele Gespräche und nützliche Hinweise möchte ich mich bei ihnen bedanken. Eine ganz besondere Anerkennung gebührt Dr. Paul-Dieter Gall, der sehr engagiert an der Erstellung der Übungsaufgaben und der Lösungen mitgearbeitet hat und mit großer Sorgfalt die verschiedenen Versionen des Manuskripts gelesen und auf Fehler geprüft hat. Schließlich bedanke ich mich bei Iris Kerkhoff und Dr. Bernd Steffen für ihre Hilfe bei der Erstellung von Abbildungen.

Hamburg, Oktober 2011

Peter Schmüser

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Ein Jahrhundert Quantenphysik	1
1.1.1	Der Transistor und die Computer-Revolution	2
1.1.2	Der Laser	3
1.1.3	Kernspin-Tomografie	3
1.1.4	Die Atomuhr und die Messung der Zeit	4
1.2	Teilchen und Wellen	4
1.2.1	Das Doppelspaltexperiment	5
1.2.2	Wellen- und Quantennatur des Lichts	8
1.2.3	Interferenzexperimente mit Neutronen	11
1.2.4	Welchen Weg wählt das Teilchen?	12
1.2.5	Interferenzen mit großen Molekülen	15
1.2.6	Bose-Einstein-Kondensation und kohärente Materiewellen .	16
1.3	Atombau und Spektrallinien	18
1.4	Didaktische Anmerkungen	20
1.4.1	Die Unanschaulichkeit der Quantentheorie	20
1.4.2	Die Erweiterung unserer Anschauung durch neue Instrumente	21
2	Die Schrödinger-Gleichung	23
2.1	Die Grundgleichungen der Quantentheorie	23
2.2	Energie- und Impulsoperator	24
2.3	Die Form der Schrödinger-Gleichung	25
2.3.1	Die zeitabhängige Schrödinger-Gleichung	25
2.3.2	Die zeitunabhängige Schrödinger-Gleichung	27
2.3.3	Eigenfunktionen und Eigenwerte	28
2.4	Die Wahrscheinlichkeitsinterpretation	28
2.5	Das Unschärfeprinzip	30
2.6	Didaktische Anmerkungen	31

3	Anwendungen der Schrödinger-Gleichung	33
3.1	Der Potentialtopf mit unendlich hohen Wänden	33
3.2	Der Potentialtopf mit endlicher Tiefe	35
3.3	Der harmonische Oszillator	37
3.4	Freie Teilchen, Wellenpakete	39
3.4.1	Ebene Wellen	39
3.4.2	Ein einfaches Wellenpaket	40
3.4.3	Gaußförmiges Wellenpaket	41
3.5	Die Potentialstufe	43
3.6	Der Tunneleffekt	45
3.7	Didaktische Anmerkungen	48
3.7.1	Quantisierung der Energie	48
3.7.2	Der Tunneleffekt in der Schule	49
4	Theoretische Konzepte und Formalismus der Quantenmechanik	55
4.1	Hamilton-Operator	55
4.2	Impuls- und Ortsoperator	56
4.3	Dirac-Notation und Skalarprodukt	57
4.4	Das Superpositionsprinzip	58
4.5	Erwartungswerte	60
4.5.1	Erwartungswerte als gewichtetes Mittel der Eigenwerte ...	60
4.5.2	Erwartungswerte des Orts- und Impulsoperators	61
4.6	Vertauschbare und nicht vertauschbare Operatoren	62
4.6.1	Definition des Kommutators	62
4.6.2	Vertauschbare Operatoren und gleichzeitige Messbarkeit ..	63
4.6.3	Nicht vertauschbare Operatoren und Unschärferelation	63
4.6.4	Energie-Zeit-Unschärfe	64
4.7	Der Messprozess in der Quantenmechanik	65
4.8	Korrespondenzprinzip und Ehrenfest-Theorem	66
4.9	Anwendungsbeispiele und didaktische Anmerkungen	67
4.9.1	Polarisiertes Licht im Quantenbild	67
4.9.2	Berechnung von Erwartungswerten	69
4.9.3	Das Superpositionsprinzip bei einer Saite	71
5	Die Drehimpulsoperatoren	75
5.1	Der Operator des Bahndrehimpulses	75
5.2	Drehimpuls-Vertauschungsregeln	76
5.2.1	Vertauschbarkeit mit dem Hamilton-Operator	76
5.2.2	Nichtvertauschbarkeit der Drehimpulskomponenten	76
5.3	Der Drehimpuls in Kugelkoordinaten	78
5.3.1	Umrechnung von \hat{L}^2 und \hat{L}_z in Kugelkoordinaten	78
5.3.2	Die Bahndrehimpuls-Eigenfunktionen	78
5.4	Algebraische Behandlung des Drehimpulses	79
5.5	Der Spinoperator	82

5.6	Addition von Drehimpulsen	84
5.6.1	Addition von zwei Spins $1/2$	84
5.6.2	Addition von Bahndrehimpuls und Spin	85
5.7	Magnetische Momente	87
5.7.1	Bohr'sches Atommodell	87
5.7.2	Magnetische Momente in der Quantentheorie	88
5.7.3	Magnetische Momente der Nukleonen	89
5.8	Didaktische Anmerkungen	89
5.8.1	Drehimpulse in der klassischen und Quantenphysik	89
5.8.2	Stern-Gerlach-Experiment	90
5.8.3	Magnetische Kernresonanz, Kernspin-Tomografie	91
6	Das Wasserstoff-Atom	95
6.1	Die Schrödinger-Gleichung für das H-Atom	95
6.1.1	Die Winkelgleichungen	96
6.1.2	Die Radialgleichung	97
6.2	Bildliche Darstellung des H-Atoms	100
6.2.1	Abhängigkeit der Ladungsdichte vom Radius	100
6.2.2	Räumliche Verteilung der Ladungsdichte	101
6.3	Historische und didaktische Anmerkungen	103
6.3.1	Das Atommodell von Rutherford	103
6.3.2	Das Atommodell von Bohr	104
7	Atome mit vielen Elektronen	111
7.1	Identische Fermionen und Ausschließungsprinzip	111
7.2	Das Helium-Atom	112
7.2.1	Modell der unabhängigen Elektronen	112
7.2.2	Anwendung des Pauli-Prinzips	114
7.2.3	Energieniveaus und Spektren von Helium	115
7.3	Schalenstruktur der Atome	117
7.4	Atomorbitale, Hybridwellenfunktionen	118
7.4.1	Atomorbitale	118
7.4.2	Hybridfunktionen	119
7.5	Didaktische Anmerkungen: „Was die Welt im Innersten auseinanderhält“	121
8	Emission und Absorption von Strahlung	125
8.1	Identische Bosonen und Symmetrieprinzip	126
8.1.1	Zwei Bosonen	126
8.1.2	Drei und mehr Bosonen	127
8.2	Spontane und stimulierte Emission, Absorption	128
8.2.1	Spontane Emission	128
8.2.2	Stimulierte Emission und Absorption	129

8.3	Strahlung im thermischen Gleichgewicht mit Materie	131
8.3.1	Die Planck'sche Strahlungsformel	131
8.3.2	Die Einstein-Koeffizienten	132
8.4	Anwendungsbeispiele und didaktische Anmerkungen	134
8.4.1	Der Laser	134
8.4.2	Spontane Emission: stimuliert durch Vakuumfluktuationen	135
9	Vertiefung 1: die nichtlokale Natur der Quantenmechanik	141
9.1	Verschränkung und Einstein-Podolsky-Rosen-Paradoxon	142
9.1.1	Verschränkung	142
9.1.2	Das EPR-Paradoxon	143
9.2	EPR-Experimente mit verschränkten Photonen	146
9.2.1	Das Experiment von Alain Aspect	146
9.2.2	Experimente mit verschränkten Laser-Photonen	151
9.2.3	Die Quantenmechanik ist richtig, und sie ist nichtlokal	152
9.3	Der Übergang Quantenphysik – klassische Physik	154
9.3.1	Schrödingers Katze	154
9.3.2	Dekohärenz	154
9.3.3	Der Messprozess aus neuerer Sicht	155
9.4	Didaktische Anmerkungen	158
10	Vertiefung 2: Störungsrechnung	163
10.1	Zeitunabhängige Störungsrechnung	163
10.1.1	Näherungslösung der Schrödinger-Gleichung	163
10.1.2	Energieverschiebung in der 1. Ordnung	164
10.2	Feinstruktur im H-Atom	165
10.2.1	Die relativistische kinetische Energie	165
10.2.2	Spin-Bahn-Kopplung	166
10.3	Emission und Absorption von Strahlung	168
10.3.1	Optische Übergänge in der Quantenmechanik	168
10.3.2	Zeitabhängige Störungsrechnung	169
10.3.3	Absorption von Strahlung	170
10.3.4	Stimulierte Emission von Strahlung	171
10.3.5	Auswahlregeln für optische Übergänge	172
A	Mathematische Hilfsmittel	177
A.1	Reelle und komplexe Zahlen	177
A.2	Zeigerdarstellung des komplexen Phasenfaktors	179
A.3	Grundregeln der Differential- und Integralrechnung	181
A.3.1	Differentialrechnung	181
A.3.2	Integralrechnung	184
A.3.3	Gaußfunktion und Fehlerfunktion	185
A.4	Fourier-Reihe und Fourier-Integral	186
A.4.1	Fourier-Reihe	186
A.4.2	Fourier-Integral	188

A.5	Funktionen von mehreren Variablen	191
A.5.1	Partielle Ableitungen	191
A.5.2	Mehrfachintegrale	192
A.6	Kugel- und Zylinderkoordinaten	192
B	Ergänzungen zu Kap. 1, 2 und 3	195
B.1	Kinematik der Compton-Streuung	195
B.2	Die Kontinuitätsgleichung	196
B.3	Der Potentialtopf mit endlicher Tiefe	198
B.4	Der kreisförmige Potentialtopf	200
B.5	Der 3D-Potentialtopf und die Zustandsdichte	202
B.5.1	Zustandsdichte für massive Teilchen	202
B.5.2	Zustandsdichte für Photonen	204
B.6	Wellenfunktionen des harmonischen Oszillators	204
B.7	Gaußförmiges Wellenpaket	206
C	Ergänzungen zu Kap. 4 und 5	209
C.1	Selbstadjungierte Operatoren	209
C.1.1	Ortsraum	209
C.1.2	Spinraum	210
C.2	Gleichzeitige Messbarkeit	211
C.3	Orts- und Impulsraum	212
C.4	Rotationsinvarianz von \hat{H} in einem Zentralpotential	214
C.5	Vertauschbarkeit von Hamilton- und Drehimpulsoperator	215
C.6	Der Drehimpuls in Kugelkoordinaten	215
C.7	Ergänzungen zur Drehimpulsalgebra	217
C.8	Addition von zwei Spins $1/2$	218
C.9	Addition von Bahndrehimpuls und Spin	219
D	Ergänzungen zu Kap. 6, 7 und 8	221
D.1	Die Radialgleichung des H-Atoms	221
D.2	Coulomb- und Austausch-Integral beim Helium	225
D.3	Fermi-Dirac- und Bose-Einstein-Statistik	226
E	Ergänzungen zu Kap. 9 und 10	227
E.1	Eigenschaften des Spinsingulettzustands	227
E.2	EPR-Paradoxon und Bell'sche Ungleichung	228
E.3	Einfluss der relativistischen Energie im H-Atom	230
E.4	Energieaufspaltung infolge der Spin-Bahn-Kopplung	231
E.5	Zeitabhängige Störungsrechnung	232
E.6	Auswahlregeln für optische Übergänge	234
F	Lösungen zu ausgewählten Aufgaben	237
	Literaturverzeichnis	251
	Sachverzeichnis	253