Einführung in die Höhere Festigkeitslehre

Reinhold Kienzler · Roland Schröder

Einführung in die Höhere Festigkeitslehre

2., überarbeitete Auflage

Springer Vieweg

Reinhold Kienzler
Universität Bremen
Bremen, Deutschland

Roland Schröder
Universität Bremen
Bremen, Deutschland

ISBN 978-3-642-24381-3 ISBN 978-3-642-24382-0 (eBook)
https://doi.org/10.1007/978-3-642-24382-0

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über http://dnb.d-nb.de abrufbar.

Springer Vieweg

Springer Vieweg ist ein Imprint der eingetragenen Gesellschaft Springer-Verlag GmbH, DE und ist ein Teil von Springer Nature
Die Anschrift der Gesellschaft ist: Heidelberger Platz 3, 14197 Berlin, Germany

Vorbemerkung zur zweiten Auflage

Die zweite Auflage der „Einführung in die Höhere Festigkeitslehre“ gliedert sich in zwei Teile. Der erste Teil beschränkt sich auf kartesische Koordinaten und Tensoren und wurde im Wesentlichen von der ersten Auflage übernommen. Die Autoren danken den Kollegen und Studenten, die uns auf Druckfehler und Unschärfen hingewiesen haben. Diese konnten eliminiert werden.

Da der Umgang mit der Indexschreibweise allein schon „gewöhnungsbedürftig“ ist und nur in Ausnahmefällen – in der Ebene – ein Polarkoordinatensystem verwendet wurde, hatten wir uns in der ersten Auflage (Kapitel 1 bis 5) dazu entschlossen, auf die Einführung krummliniger und schiefwinkliger Koordinatensysteme zu verzichten, um so die Grundlagen schärfer herausarbeiten zu können.

Erst im zweiten Teil (Kapitel 6 bis 8) werden die Grundlagen der Tensorrechnung in der nötigen Ausführlichkeit dargestellt und ko- und kontravariante Komponenten von Vektoren und Tensoren eingeführt, um die Behandlung von Problemen in allgemeinen Koordinatensystemen zu ermöglichen.

Im Rahmen der Tensoralgebra des sechsten Kapitels können wir uns zunächst auf geradlinige Koordinatensysteme beschränken, die aber nicht mehr orthonormiert sein müssen sondern schiefwinklig und nicht normiert sein können, da das Verhalten von Vektoren und Tensoren an einem Punkt (und nicht auch in der Umgebung dieses Punktes) untersucht wird. Es werden sowohl eine kovariante Basis als auch eine kontravariante Basis eingeführt und die kovarianten und kontravarianten Komponenten von Vektoren und Tensoren angegeben. Auch und gerade im allgemeinen Koordinatensystem spielt das Transformationsverhalten dieser Objekte beim Übergang von einem Koordinatensystem auf ein anderes eine große Rolle. Die entsprechenden Gleichungen werden abgeleitet.

Im siebten Kapitel werden dann auch krummlinige Koordinatensysteme zugelassen und im Rahmen der Tensoranalysis das Ableitungsverhalten von tensoriellen Größen untersucht. Es stellt sich heraus, dass mittels der kovarianten Ableitung koordinateninvariante Differenzialgleichungen gewonnen werden können. Ist man an der Formulierung in einem speziell gewählten Koordinatensystem interessiert, müssen die allgemein gültigen Gleichungen diesem Koordinatensystem angepasst werden. Dies wird am Beispiel der Zylinderkoordinaten explizit ausgearbeitet. Für Kugelkoordinaten und weitere Koordinatensysteme finden sich die entsprechenden Gleichungen in den Übungen.

Damit sind die notwendigen Voraussetzungen geschaffen, um die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie in allgemeinen Koordinatensystemen zu formulieren. Dies geschieht im achten Kapitel, wobei wir uns an der Vorgehensweise des ersten Teils orientieren: Spannungszustand, Verzerrungszustand, Elastizitätsgesetz und Lösungsansätze. Abschließend werden die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie in Zylinder- und Kugelkoordinaten zusammengestellt.

Weite Teile des Buchmanuskripts entstanden während mehrfacher, meist zweiwöchiger Aufenthalte am Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach

(MFO), in das sich RK „in Klausur“ zurückgezogen hatte. Wir danken dem MFO für die einmalige und inspirierende Atmosphäre und dessen Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern für die fantastische Betreuung

Das Manuskript der zweiten Auflage wurde von Herrn M.Sc. M. Meyer-Coors gründlich durchgesehen. Wir danken ihm für zahlreiche Hinweise und Korrekturen. Weiterhin bedanken wir uns bei Herrn Dr.-Ing. P. Schneider für zusätzliche Verbesserungsvorschläge.

In gewohnter Weise hat Frau B. Neumeister wieder mit viel Sorgfalt und Geduld das Manuskript erstellt. Hierfür sind wir ihr in höchstem Maße dankbar. Schließlich bedanken wir uns beim Springer-Verlag, insbesondere bei Frau Kollmar-Thoni, für die gute Zusammenarbeit.

Bremen im Herbst 2018

R. Kienzler R. Schröder

Vorbemerkung zur ersten Auflage

In der vorliegenden „Einführung in die Höhere Festigkeitslehre“ werden die Grundgleichungen der linearen Elastizitätstheorie in kartesischen Koordinaten unter Verwendung der Tensorschreibweise abgeleitet. Sie bilden einerseits die Grundlage der Berechnung und Bemessung von zwei- und dreidimensionalen Konstruktionen des Ingenieurwesens, dies sowohl für analytische Lösungen, analytische Abschätzungen und Näherungen als auch für numerische Berechnungen. Insbesondere ist hier die weitverbreitete und vielseitig einsetzbare Finite-Elemente-Methode (FEM) zu nennen.

Andererseits bietet die sichere Beherrschung der Grundgleichungen die Basis zur Ableitung verallgemeinerter Formulierungen, z.B. ihre Darstellung in krummlinigen und/oder schiefwinkligen Koordinatensystemen, die Erweiterung auf eine geometrisch nicht-lineare Theorie, Berücksichtigung von nicht-linearem Materialverhalten (Plastizität, Viskoelastizität usw.).

Durch die Beschränkung auf kartesische Koordinaten und Tensoren werden zwar die Vorteile der Indexschreibweise unmittelbar sichtbar, der eigentliche Vorteil einer koordinaten-invarianten Formulierung der Grundgleichungen geht jedoch verloren. Die Feldgleichungen und Randbedingungen lassen sich in einem dem Problem angepassten Koordinatensystem (z.B. Zylinderkoordinaten, Kugelkoordinaten) leichter formulieren und lösen. Trotzdem wurde in dieser Einführung bewusst auf die Verwendung krummliniger und schiefwinkliger Koordinatensysteme verzichtet, um das Verständnis der Grundlagen nicht durch zu viel Tensorformalismus zu verschleiern. An entsprechender Stelle wird auf weiterführende Literatur verwiesen.

Nach dem Besuch der Grundvorlesungen in Technischer Mechanik ist es in der Regel noch ein weiter Weg, bis die Kenntnisse erworben sind, um Fachbücher und Veröffentlichungen zur Elastizitätstheorie und zu verwandten Gebieten lesen und verstehen zu können. Meist sind diese in Tensorschreibweise abgefasst, die im Grundkurs oft noch nicht verwendet wird. Diese Lücke soll das Buch „Einführung in die Höhere Festigkeitslehre“ überbrücken helfen, indem die Studenten nach dem Grundkurs „abgeholt“ und behutsam in die Indexschreibweise eingeführt werden. Um den Anschluss an andere Lehrbücher und Schreibweisen zu erleichtern, werden die Gleichungen auch in symbolischer Schreibweise dargestellt.

Das Buch baut auf dem Kenntnisstand des Grundkurses der Technischen Mechanik 1 und 2, also Statik und Elastostatik, auf, die an allen Universitäten in etwa gleichem Umfang in den ersten beiden Semestern eines Ingenieurstudiengangs gelesen werden. Im Buch wird regelmäßig auf den Grundkurs verwiesen. Um die entsprechenden Stellen konkreter angeben zu können, haben wir uns dazu entschlossen, uns regelmäßig auf die beiden Bücher „Technische Mechanik Band 1: Statik“ und „Technische Mechanik Band 2: Elastostatik“ der Autoren GROSS, HAUGER, SCHRÖDER und WALL zu beziehen. Natürlich lässt sich der so angesprochene Stoff auch mit eigenen Skripten oder mit anderen Lehrbüchern zum Grundkurs Mechanik wiederholen, da die Inhalte ähnlich gegliedert und bis auf geringfügige Varianten gleich dargestellt sind. Im Buch werden die entsprechenden Stellen mit [GHSW 1 oder 2: Kapitel (evtl. Unterkapitel)] zitiert.

In gleicher Weise gehen wir bei Hinweisen zu den erforderlichen mathematischen Grundlagen vor, die bis auf ganz wenige Ausnahmen Gegenstand des Grundkurses Ingenieurmathematik ist. Hier beziehen wir uns auf die Bände 1, 2 und 3 der „Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler" von PAPULA, das auch viele Übungsaufgaben enthält, was hilfreich ist, wenn eine Methode noch nicht richtig „sitzt". Die entsprechenden Stellen werden mit [Papula 1, 2 oder 3: Kapitel (evtl. Unterkapitel)] zitiert. Auch hier lassen sich die entsprechenden Stellen in anderen Lehrbüchern schnell finden, in komprimierter Form beispielsweise im „Taschenbuch der Mathematik" von BRONSTEIN und SEMENDJAJEW.

Hin und wieder werden mehrere Gleichungen im Text mit einer gemeinsamen Gleichungsnummer versehen. Wenn dann an einer anderen Stelle des Buches auf eine einzelne Gleichung Bezug genommen wird, wird diese z.B. mit (2.4.19b) angegeben, wobei stillschweigend angenommen wird, dass die zweite Gleichung von (2.4.19) angesprochen ist.

Jedes Kapitel (außer der Einleitung) enthält Bemerkungen, Beispiele und Übungsaufgaben. Die Bemerkungen geben Hinweise, die für das Verständnis der folgenden Ausführungen nicht unbedingt erforderlich sind. Sie enthalten Zusatzinformationen, erinnern an bekannte Dinge aus dem Grundkurs oder verweisen auf weiterführende Sachverhalte mit entsprechenden Literaturangaben.

In den Beispielen wird die Anwendung des vermittelten Stoffes ausführlich dargestellt, so dass die Vorgehensweise bei der Lösung von Problemstellungen schrittweise nachvollzogen werden kann. Man scheue sich nicht, die Lösung durch „Mitrechnen" auf separatem Papier selbst mit zu erarbeiten.

Es ist allgemein bekannt, dass das vollständige Durchdringen der Lehrinhalte in der Mechanik nicht durch Nachvollziehen von Musterlösungen sondern nur durch selbständiges Üben möglich ist. Deshalb finden sich am Ende der Kapitel eine Zusammenstellung von Übungsaufgaben. Einige Übungen wiederholen lediglich Fragestellungen vorangegangener Beispiele. Durch deren Bearbeitung kann man sicherstellen, dass man den Stoff auch wirklich verstanden hat und man im Stande ist, verwandte Aufgaben auch selbständig lösen zu können. Andere Übungen verlangen ein wenig eigenes Nachdenken und etwas Fertigkeit beim Hantieren mit den bereitgestellten Formeln. Einige wenige Übungen sind tatsächlich anspruchsvoll und man sollte sich nicht dadurch entmutigen lassen, wenn die Lösung nicht gleich gelingt. Bei der Identifikation von Übungen als „anspruchsvoll" sollte man allerdings zurückhaltend sein.

Am Ende des Buches sind die Lösungen der Übungsaufgaben zusammengestellt. Die Autoren sind sich bewusst, dass dieses Angebot eine Versuchung für nicht charakterfeste Leser darstellt. Eigentlich sind die Angaben nur als Überprüfung des **vorab** selbständigen Lösungsversuchs gedacht. Für „einfache" Übungen wird nur das Ergebnis angegeben, die Lösungsvorschläge für „anspruchsvollere"

Übungen enthalten ausführlichere Hinweise, während die Lösungen der „schwereren“ Übungen vollständig dargestellt werden.

Nach einer kurzen Einleitung, in der die Aufgaben der Höheren Festigkeitslehre umrissen werden, behandelt das zweite Kapitel den Spannungszustand. Dieses Kapitel ist durch seine ausführliche Darstellung recht umfangreich. Nachdem im ersten Abschnitt durch die Einführung von Spannungsvektor und Spannungstensor die Index-Schreibweise motiviert wurde, wird im zweiten Abschnitt das „Handwerkszeug“ zum Umgang mit der Index-Schreibweise vermittelt. Obwohl der unmittelbare Nutzen dieses etwas trockenen Stoffes noch nicht recht zu erkennen ist, empfiehlt es sich, diesen Abschnitt besonders sorgfältig („mit Papier und Bleistift“) durchzuarbeiten, da für den Rest des Buches der sichere Umgang mit KRONECKER-Symbol und Permutationstensor vorausgesetzt wird. Bei Zweifel oder Unsicherheit scheue man sich nicht, alle Summen ausführlich hin zu schreiben. Nachdem der Tensorcharakter der „Spannungsmatrix“ festgestellt ist, werden verschiedene Eigenschaften des Spannungstensors abgeleitet, die in dieser Form für alle Tensoren zweiter Stufe gelten. Indem diese Sachverhalte sehr gründlich besprochen werden, können die erzielten Ergebnisse in den anderen Kapiteln unmittelbar übernommen und damit erheblich kürzer abgehandelt werden.

Im dritten Kapitel wird der Verzerrungszustand direkt im Rahmen der linearisierten Theorie abgeleitet. Wir beschreiten also nicht (wie in vielen Lehrbüchern zu finden) den „Umweg“, die Kinematik zunächst für große Deformationen zu formulieren und den so gewonnenen nicht-linearen Verzerrungstensor anschließend zu linearisieren. Die nicht-lineare Theorie wird im Rahmen dieser Einführung auch an anderer Stelle nicht benötigt. Den Verzerrungs-Verschiebungsgleichungen werden noch die Kompatibilitätsbedingungen an die Seite gestellt.

Den Beweis des Satzes von CESARO haben wir in eine (sehr anspruchsvolle) Übungsaufgabe verbannt, um den Fluss des Stoffes nicht unnötig zu unterbrechen, den Leser aber trotzdem mit dem Beweisgang bekannt zu machen.

Das vierte Kapitel widmet sich dem Elastizitätsgesetz. Da anisotrope Werkstoffe zunehmend an Bedeutung gewinnen (man denke an faserverstärkte Strukturen in der Luft- und Raumfahrt oder an piezoelektrische Materialien in der Informationstechnologie), wird das Elastizitätsgesetz zunächst für anisotropes Materialverhalten formuliert und darauf folgend der Einfluss von Materialsymmetrien besprochen. Man gelangt so Schritt für Schritt über Monotropie, Orthotropie und transversale Isotropie zur Isotropie. Weitere Symmetrieformen werden in den Übungen behandelt. Leser, die (zunächst nur) an isotropem Werkstoffverhalten interessiert sind, können diesen Abschnitt überspringen, ohne an Verständnis für die folgenden Abschnitte einzubüßen. Ein Abschnitt behandelt den Einfluss von Temperaturänderungen auf das Werkstoffverhalten. Hier wird (aber nur ansatzweise) versucht, die Brücke zur Technischen Thermodynamik zu schlagen.

Kapitel 5 befasst sich mit Lösungsansätzen der Elastizitätstheorie. Die Terme, die von der Temperaturänderung herrühren, werden weitgehend mitgenommen, da sie den Gang der Ableitungen nicht erschweren und bei konstanter Temperatur einfach weggelassen werden können. Um Enttäuschungen vorzubeugen, sei vermerkt, dass hier nicht auf Lösungen von konkreten Problemen eingegangen wird, sondern generelle analytische Ansätze vorgestellt werden, damit man die Struktur der Grundgleichungen besser durchdringen kann. Nach der Lektüre der vorliegenden Einführung wird man sich in allen Lehrbüchern zur Festigkeitslehre und Elastizitätstheorie schnell zurechtfinden und die Lösung von vielen konkreten Beispielen leicht nachvollziehen oder selbständig lösen können, was das eigentliche Anliegen dieses Buches ist.

Alle Kapitel behandeln zunächst die dreidimensionale Theorie. Jedem Kapitel ist aber auch ein Abschnitt beigestellt, der die Besonderheit von ebenen, also zweidimensionalen Problemen herausstellt. Ebene Probleme sind einer analytischen Behandlung eher zugänglich als dreidimensionale.

Wenn diese Einführung auch keine numerischen Lösungsverfahren behandelt, soll nochmals betont werden, dass die analytischen Verfahren in keiner Weise in Konkurrenz zu numerischen Verfahren stehen. Vielfach ist es gar nicht möglich, geschlossene analytische Lösungen für Probleme, insbesondere mit komplizierten Berandungen, anzugeben. Das Buch soll aber Fähigkeiten vermitteln, wie durch einfache analytische Abschätzungen die Sinnhaftigkeit von numerischen Ergebnissen überprüft werden kann.

Das Buch ist aus Vorlesungen mit dem gleichen Titel entstanden, die vor Studierenden der Produktionstechnik – Maschinenbau, Verfahrenstechnik – des fünften bzw. sechsten Semesters gehalten wurden. Wir sind den Studierenden für Anregung und Kritik während der zurückliegenden Jahre dankbar und würden uns auch in Zukunft über Verbesserungsvorschläge und Hinweise auf Fehler von Leserseite freuen.

Das Manuskript wurde von den Mitarbeitern des Fachgebiets Technische Mechanik – Strukturmechanik gründlich durchgesehen. Wir danken deshalb Dr.-Ing. F. Jablonski, Dipl.-Phys. K. Kutschan, Dipl.-Ing. R. Malekmohammadi, Dr.-Ing. M. Mehrafza, Dr.-Ing. I. Ott, Dr.-Ing. R. Ristau, Dipl.-Ing. L. Rohde und Dipl.-Ing. K. Schuischel für viele wertvolle Hinweise zur Verbesserung der Darstellung. Unser besonderer Dank gilt Frau B. Neumeister für ihre unermüdliche Geduld und Mühe bei der Manuskripterstellung. Schließlich bedanken wir uns beim Springer-Verlag für die gute Zusammenarbeit.

Bremen im Juni 2009

R. Kienzler R. Schröder

Inhaltsverzeichnis

Vorbemerkung zur zweiten Auflage .... **V**

Vorbemerkung zur ersten Auflage .... **VII**

Inhaltsverzeichnis .... **XI**

Liste der meist verwendeten Symbole .... **XVII**

Teil I GRUNDGLEICHUNGEN DER LINEAREN ELASTIZITÄTS-THEORIE IN KARTESISCHEN KOORDINATEN

1 Einleitung **3**
Literaturverzeichnis 5

2 Spannungszustand **7**
2.1 Belastung, Spannungsvektor, Spannungstensor 8
Belastung 8
Spannungsvektor 10
Spannungstensor 14
Symmetrie des Spannungstensors 20
2.2 EINSTEINsche Summationskonvention, KRONECKER-Symbol und LEVI-CIVITÀ-Tensor 22
EINSTEINsche Summationskonvention 22
KRONECKER-Symbol 24
LEVI-CIVITÀ-Tensor 26
2.3 Transformation des Spannungstensors 29
2.4 Hauptachsentransformation 39
Eigenwertproblem 39
Invarianten 40
Eigenvektoren 42
Hauptschubspannungen 45
2.5 Aufspalten des Spannungstensors 59
2.6 Ebener Spannungszustand 63
Transformationsgleichungen 64
Hauptachsentransformation 65
Spannungstrajektorien 67
2.7 Gleichgewichtsbedingungen 69
Betrachtung am infinitesimalen Element 70
Globale Betrachtung am materiellen Körper 72
Randbedingungen 74

2.8 Zusammenfassung ... 76
Übungsaufgaben ... 76
Literaturverzeichnis ... 83

3 Verzerrungszustand ... 85
3.1 Verschiebungen und Verzerrungen ... 86
Verschiebungen und Verschiebungsgradient ... 86
Verzerrungs- und Rotationstensor ... 87
Transformationsverhalten, Hauptachsen ... 89
Aufspalten des Verzerrungstensors ... 91
Randbedingungen ... 92
3.2 Kompatibilitätsbedingungen ... 96
3.3 Ebener Verzerrungszustand ... 101
Transformationsverhalten ... 102
Hauptachsentransformation ... 103
Kompatibilitätsbedingungen ... 103
Randbedingungen ... 103
3.4 Zusammenfassung ... 106
Übungsaufgaben ... 106
Literaturverzeichnis ... 108

4 Elastizitätsgesetz ... 111
4.1 Vorbemerkungen, Begriffe und Bezeichnungen ... 112
Stoffgesetz ... 112
Elastizitätsgesetz ... 112
Elastizitätsmodul, Elastizitätstensor ... 113
Elastizitätsmatrix ... 114
Nachgiebigkeitstensor, Nachgiebigkeitsmatrix ... 115
4.2 Elastisches Potenzial, Formänderungsenergie ... 116
Stab ... 116
Dreidimensionaler Körper ... 120
Positive Definitheit ... 124
4.3 Materialsymmetrien ... 125
Symmetrie bezüglich einer Ebene ... 126
Symmetrie bezüglich zweier aufeinander senkrecht stehender Ebenen ... 128
Rotationssymmetrie bezüglich einer Achse ... 131
Rotationssymmetrie bezüglich zweier Achsen ... 136
4.4 Verallgemeinertes HOOKEsches Gesetz für den isotropen Körper ... 138
Isotrope Tensoren ... 138
Elastizitätsgesetz ... 140
Formänderungsenergie ... 143
4.5 Isotropes Elastizitätsgesetz für ebene Probleme ... 146
Ebener Verzerrungszustand (EVZ) ... 146

Ebener Spannungszustand (ESZ) 148
Gemeinsame Darstellung von EVZ und ESZ 149
4.6 Lineare Thermoelastizität 151
Abgrenzung der Theorie 151
Verallgemeinertes Stoffgesetz 152
Isotropes Materialverhalten 152
Formänderungsenergie 153
4.7 Zusammenfassung 160
Übungsaufgaben 164
Literaturverzeichnis 166

5 Lösungsansätze der linearen Elastizitätstheorie 167
5.1 Zusammenstellung der Grundgleichungen, Randwertprobleme 168
Erstes Randwertproblem 168
Zweites Randwertproblem 169
Gemischtes Randwertproblem 169
Superposition 170
Eindeutigkeit der Lösung 170
5.2 LAMÉ-NAVIER-Gleichungen – Auflösen nach den Verschiebungen 172
5.3 BELTRAMI-MICHELL-Gleichungen – Auflösen nach den Spannungen 175
5.4 Lösung mit Verschiebungspotenzialen 178
Skalar- und Vektorpotenzial 178
LAMÉsches Dehnungspotenzial 179
GALERKIN-Vektor 180
PAPKOVICH-NEUBER-Potenziale 180
5.5 Lösungen mit Spannungsfunktion 181
AIRYsche Spannungsfunktion 182
Spannungsfunktionen von MAXWELL und MORERA 183
Spannungsfunktionen von BELTRAMI und FINZI 183
Abschließende Bemerkungen 184
5.6 Schematische Darstellung der Grundgleichungen 184
5.7 Ebene Probleme 186
Ebener Verzerrungszustand (EVZ) 186
Ebener Spannungszustand (ESZ) 186
Zusammenstellung der Grundgleichungen 189
Auflösen nach den Verschiebungen 190
Auflösung nach den Spannungen 192
Folgen aus der Kompatibilitätsbedingung 194
AIRYsche Spannungsfunktion 195
Weitere Lösungsmethoden 197
5.8 Zusammenfassung 198
Übungsaufgaben 198
Literaturverzeichnis 200

Teil II GRUNDGLEICHUNGEN DER LINEAREN ELASTIZITÄTS-THEORIE IN BELIEBIGEN KOORDINATEN

6 Tensoralgebra **205**
6.1 Vorbemerkungen 206
6.2 Orthonormierte und schiefwinklige, nicht-normierte Basen 208
Kartesisches Basissystem 208
Beliebiges Basissystem 209
Koordinatenabbildung 212
Strecken, Skalarprodukt 216
6.3 Kovariante und kontravariante Basis 218
Duale Basen 218
Herauf- und Herunterziehen von Indizes der Basisvektoren 219
Zusammenhang zwischen $[\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3]$ und g 223
6.4 Kovariante und kontravariante Komponenten eines Vektors 225
Herauf- und Herunterziehen der Indizes von Vektoren 225
Physikalische Komponenten 228
6.5 Transformationsverhalten 229
Transformation der kovarianten Basis 229
Transformation der kontravarianten Basis 230
Transformation von Vektoren 231
6.6 Tensoren beliebiger Stufe 235
Dyadisches Produkt 235
Tensoren zweiter Stufe 236
Transformation der Metrikkoeffizienten 238
Rechenregeln 239
LEVI-CIVITÀ-Tensor 242
6.7 Zusammenfassung 245
Übungsaufgaben 246
Literaturverzeichnis 248

7 Tensoranalysis **249**
7.1 Geradlinige Koordinaten 250
Koordinatenflächen und Koordinatenlinien 250
Ortsvektor und vollständiges Differenzial 250
Transformation der Basissysteme 252
Partielle Ableitung von Vektoren und Tensoren 252
7.2 Krummlinige Koordinaten 253
Lokale Basis 254
Bogen-, Flächen- und Volumenelement 255
7.3 Partielle Ableitungen – CHRISTOFFEL-Symbole 267
Ableitung der Basisvektoren 268
Zusammenhang zwischen CHRISTOFFEL-Symbol und Metriktensor 269

7.4 Kovariante Ableitungen 272
Partielle Differenziation und kovariante Ableitung 272
Kovariante Ableitungen von Tensoren höherer Stufe 274
Lemma von RICCI 274
7.5 Vektoranalytische Ausdrücke in krummlinigen Koordinaten 278
Nabla-Operator 278
Gradient 278
Divergenz 279
Rotation 279
LAPLACE-Operator 280
GAUßscher Integralsatz 284
7.6 Der RIEMANN-CHRISTOFFELsche-Krümmungstensor 286
Vertauschung der Reihenfolge von kovarianten Ableitungen 286
Eigenschaft des RIEMANN-CHRISTOFFEL-Tensors 287
BIANCHI-Identität 288
7.7 Zusammenfassung 289
Übungsaufgaben 290
Literaturverzeichnis 294

8 Grundgleichungen der Elastizitätstheorie in krummlinigen Koordinaten 295
8.1 Spannungszustand 296
Spannungsvektor und Spannungstensor 296
Hauptachsentransformation 298
Gleichgewichtsbedingungen 299
Randbedingungen 302
Ebener Spannungszustand 303
8.2 Verzerrungszustand 308
Verschiebungen und Verzerrungen 308
Randbedingungen 312
Kompatibilitätsbedingungen 312
Ebener Verzerrungszustand 315
8.3 Elastizitätsgesetz 317
Isotropes Materialverhalten 318
Isotropes Materialverhalten für ebene Probleme 320
8.4 Grundgleichungen, Lösungsansätze 320
Isotropes Materialverhalten 321
AIRYsche Spannungsfunktion 324
8.5 Grundgleichungen in Zylinder- und Kugelkoordinaten 325
Zylinderkoordinaten 325
Kugelkoordinaten 328
8.6 Zusammenfassung 332
Übungsaufgaben 332
Literaturverzeichnis 334

LÖSUNG DER ÜBUNGSAUFGABEN zu Teil I **335**
Zu Kapitel 2: Spannungszustand 335
Zu Kapitel 3: Verzerrungszustand 368
Zu Kapitel 4: Elastizitätsgesetz 380
Zu Kapitel 5: Lösungsansätze 397
Literaturverzeichnis 405

LÖSUNG DER ÜBUNGSAUFGABEN zu Teil II **407**
Zu Kapitel 6: Tensoralgebra 407
Zu Kapitel 7: Tensoranalysis 414
Zu Kapitel 8: Grundgleichungen 446
Literaturverzeichnis 476

Sachwortverzeichnis **477**

Liste der meist verwendeten Symbole

Allgemeines

Koordinatensysteme

x, y, z x_1, x_2, x_3	kartesische Koordinatensysteme im Raum
$x_{1'}, x_{2'}, x_{3'}$	ein gegenüber dem Ausgangskoordinatensystem (x_1, x_2, x_3) gedrehtes kartesisches Koordinatensystem
x, y x_1, x_2	kartesisches Koordinatensystem in der Ebene
r, φ	ebene Polarkoordinaten
$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$	orthonormierte kartesische Basis
ξ^1, ξ^2, ξ^3	beliebiges Koordinatensystem
$\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3$	beliebige kovariante Basis im Raum
$\vec{g}^1, \vec{g}^2, \vec{g}^3$	beliebige kontravariante Basis im Raum
r, φ, z	Zylinderkoordinaten
r, ϑ, φ	Kugelkoordinaten

Kartesische Tensoren

λ	Tensor nullter Stufe (Skalar)
$\vec{a}$	Tensor erster Stufe (Vektor) wird als Spaltenvektor aufgefasst
$\vec{a}^{\mathrm{T}}$	transponierter Vektor, wird als Zeilenvektor aufgefasst
a_i	Komponente eines Vektors. Die Bezeichnungen $\vec{a}$ und a_i werden synonym verwendet
$(\vec{a})_i$	weist auf die i-te Komponente des Vektors $\vec{a}$ hin
$\lvert\vec{a}\rvert$	Betrag des Vektors $\vec{a}$
$\underline{\underline{b}}$	Tensor zweiter Stufe (Dyade)
b_{ij}	Komponente eines Tensors zweiter Stufe. Die Bezeichnungen $\underline{\underline{b}}$ und b_{ij} werden synonym verwendet
c_{ijk}	Komponenten eines Tensors dritter Stufe (Triade)
$\mathbb{E}$	Tensor vierter Stufe (Tetrade)
$E_{ijk\ell}$	Komponenten eines Tensors vierter Stufe. Die Bezeichnungen $\mathbb{E}$ und $E_{ijk\ell}$ werden synonym verwendet

Beliebige Tensoren

$\vec{a} = a^i \vec{g}_i = a_i \vec{g}^i$	Tensor erster Stufe (Vektor) dargestellt in der kovarianten und kontravarianten Basis
$\underline{\underline{b}} = b^{ij} \vec{g}_i \otimes \vec{g}_j$ $= b_{ij} \vec{g}^i \otimes \vec{g}^j$ $= b_{i\bullet}^{\ j} \vec{g}^i \otimes \vec{g}_j$ $= b^i_{\bullet j} \vec{g}_i \otimes \vec{g}^j$	Tensor zweiter Stufe dargestellt in der rein kovarianten, rein kontravarianten und gemischt-varianten Basis. Die Darstellung lässt sich auf Tensoren höherer Stufe unmittelbar erweitern

Mathematische Symbole

$=$	ist gleich
$\cong$	ist ungefähr gleich
$\triangleq$	entspricht
$\equiv$	ist identisch
$:=$	ist gleich per definitionem
$\sim$	ist proportional zu
$\rightarrow$	wird zu
$\Rightarrow$	daraus folgt
$\Leftrightarrow$	ist äquivalent (dann und nur dann)
$\vert\ \vert$	Betrag
$\cup$	Vereinigung
$\cap$	Durchschnitt
$\varnothing$	Nullmenge
$O(\ )$	Glieder der Ordnung
$\vert_S$	ausgewertet am Rand S
$\vert_\Gamma$	ausgewertet entlang der Randkurve Γ

Verknüpfung

$\lambda = \vec{a} \cdot \vec{b} \rightarrow \lambda = a_i b_i = a^i b_i = a_i b^i$	Skalarprodukt
$\lambda = \underline{\underline{a}} : \underline{\underline{b}} \rightarrow \lambda = a_{ij} b_{ji} = a^{ij} b_{ji}$	doppeltes Skalarprodukt
$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} \rightarrow c_i = e_{ijk} a_j b_k = \varepsilon_{ijk} a^j b^k$	Vektorprodukt
$\underline{\underline{c}} = \vec{a} \otimes \vec{b} \rightarrow c_{ij} = a_i b_j$	dyadisches Produkt
$\lambda = [\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \rightarrow \lambda = e_{ijk} a_i b_j c_k = \varepsilon^{ijk} a_i b_j c_k$	Spatprodukt

$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$	Matrixdarstellung von $\underline{\underline{a}}$
$\det \underline{\underline{a}} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$	Determinante der Matrix $\underline{\underline{a}}$

Ableitungen

$\dfrac{d(\ )}{dx} = (\ )^{/}$	totale Ableitung bei Funktionen einer Veränderlichen, hier: x
$\dfrac{d(\ )}{dt} = (\dot{\ })$	Ableitung nach der Zeit
$\dfrac{\partial(\ )}{\partial x_i} = (\ )_{,i}$	Partielle Ableitung bei Funktionen mehrerer Veränderlicher x_i
$\left.\dfrac{\partial(\ )}{\partial \varepsilon}\right\|_{\theta}$	Partielle Ableitung nach z.B. der Verzerrung ε bei z.B. festgehaltener Temperaturänderung θ
$(\ )\big\|_i$	Kovariante Ableitung nach der krummlinigen Koordinate ξ^i

Differenzialoperatoren

$d(\ ) = (\ )_{,i}\, dx_i$	totales Differenzial
$\vec{\nabla}(\ ) = (\ )_{,i}\, \underset{i}{\vec{e}} = (\ )\big\|_i\, \vec{g}^i$	Nabla-Operator
$\vec{f} = \operatorname{grad} \lambda = \vec{\nabla}\lambda \rightarrow f_i = \lambda_{,i}$	Gradient eines Skalars
$\lambda = \operatorname{div} \vec{v} = \vec{\nabla} \bullet \vec{v} \rightarrow \lambda = v_{i,i} = \vec{v}^i\big\|_i$	Divergenz eines Vektors
$\vec{f} = \operatorname{div} \underline{\underline{\sigma}} = \vec{\nabla} \bullet \underline{\underline{\sigma}} \rightarrow f_i = \sigma_{ji,j} = \sigma^{j}_{\bullet i}\big\|_j$	Divergenz eines Tensors
bzw. $f^i = \sigma^{ji}\big\|_j$	
$\vec{f} = \operatorname{rot} \vec{v} = \vec{\nabla} \times \vec{v} \rightarrow f_i = e_{ijk} v_{k,j}$	Rotation eines Vektors
bzw. $f^i = \varepsilon^{ijk} v_k\big\|_j$	
$\underline{\underline{\varepsilon}} = \operatorname{def} \vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{\nabla} \otimes \vec{u} + \vec{u} \otimes \vec{\nabla}\right) \rightarrow$	Deformator eines Vektors
$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) = \frac{1}{2}\left(u_i\big\|_j + u_j\big\|_i\right)$	

$\underline{\underline{\eta}} = \operatorname{ink} \underline{\underline{\varepsilon}} = \vec{\nabla} \times \underline{\underline{\varepsilon}} \times \vec{\nabla} \;\rightarrow$ $\eta_{ij} = e_{ikm}\, e_{j\ell n}\, \varepsilon_{mn,k\ell} = e_{ikm}\, e_{j\ell n}\, \varepsilon_{k\ell,mn}$ bzw. $\eta^{ij} = \varepsilon^{ikm} \varepsilon^{i\ell n} \varepsilon_{k\ell}\Big\vert_{mn}$	Inkompatibilität eines Tensors
$\Delta(\;) = \vec{\nabla} \bullet \vec{\nabla}(\;) \rightarrow \Delta(\;) = (\;)_{,ii} = (\;)\Big\vert_{i}^{i}$	LAPLACE-Operator im Raum
$\overline{\Delta}(\;) = (\;)_{,\alpha\alpha} = (\;)\Big\vert_{\alpha}^{\alpha}$	LAPLACE-Operator in der Ebene

Indizes

*Indizes **unten rechts** von einer Variablen*

$i, j, k, \ldots$	kovariante Tensorindizes mit den Werten 1, 2, 3
$i', j', k', \ldots$	kovariante Tensorindizes im transformierten Koordinatensystem
x, y, z	Koordinatenrichtungen im (x, y, z) -Koordinatensystem
r, φ, z	Koordinatenrichtungen im Zylinderkoordinatensystem
r, ϑ, φ	Koordinatenrichtungen im Kugelkoordinatensystem
$\alpha, \beta, \gamma, \ldots$	kovariante Tensorindizes mit den Werten 1, 2
$A, B, C, \ldots$	Vektor-/Matrixindizes mit den Werten 1, 2, …, 6
1, 2, 3	Zählindex bei Eigenwerten und Invarianten

*Symbole **unten rechts** von einer Variablen*

G	Gestaltänderung
N	Normalkraft, Stab
T	Temperatur, thermisch
V	Volumen, Volumenänderung
max	Maximalwert
okt	Oktaederebene
p	Druck
0	vorgegebene konstante Größe, Referenzzustand

*Indizes **unter** einer Variablen*

i, j	Koordinatenrichtung, z.B. ist $\underset{2}{\vec{e}}$ der Einheitsvektor in x_2 -Richtung
n	Schnittfläche mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$, z.B. ist $\underset{n}{\vec{t}}$ der Spannungsvektor, der in der Schnittfläche mit dem Normaleneinheitsvektor $\vec{n}$ wirkt

okt	Oktaeder-Schnittfläche
I, II, III	Hauptachsenrichtungen

Symbole ***unten links*** *von einer Variablen*

zeigt bei Invarianten den Tensor an, für welchen die Invariante gebildet wird, z.B. ist ${}_{\varepsilon}I_1$ die erste Invariante des Verzerrungstensors

Indizes ***oben rechts*** *von einer Variablen*

$i, j, k, \ldots$	kontravariante Tensorindizes mit dem Werten 1, 2, 3
$i', j', k', \ldots$	kontravariante Tensorindizes im transformierten Koordinatensystem
$\alpha, \beta, \ldots$	kontravariante Tensorindizes mit den Werten 1, 2

Symbole ***oben rechts*** *von einer Variablen*

A	antisymmetrischer Anteil
D	deviatorischer Anteil
H	hydrostatischer Anteil
S	symmetrischer Anteil
T	Transponiert
th	thermisch
'	im transformierten Koordinatensystem
*	- Hauptachsenrichtung bei Normaleneinheitsvektoren $\vec{n}$ und bei Transformationsmatrizen $\underline{\underline{a}}$ - Vorgegebene Größe am Rand bei Spannungsvektoren $\vec{t}$ und bei Verschiebungsvektoren $\vec{u}$, z.B. t_i^*, t^{*i} - physikalische Komponenten, z.B. $(u_i)^*$, $(u^i)^*$ - Ergänzungsenergie (Kapitel 4) bei Energieausdrücken - Natürliche Basisinvarianten (Übung 2.2) bei Invarianten I_i
**	Hauptschubspannungsrichtung

Symbole ***über einer*** *Variablen*

$\overline{}$	- im Integral: Integrationsvariable - sonst: ebenes Problem, z.B. ist ${}_{\sigma}\overline{I}_1$ die erste Invariante des **ebenen** Spannungstensors $\underline{\underline{\overline{\sigma}}}$
$\hat{}$	eindimensionales Problem, z.B. ist $\hat{U}_N$ die Formänderungsenergie pro Längeneinheit (beim Stab) [J/m]

$\sim$	- bei Ortsvektoren und Punkten: Kennzeichnung der verformten Lage (Kapitel 3) - bei Energieausrücken: Näherung bei Vernachlässigung der quadratischen Anteile in der Temperaturänderung (Kapitel 4) - bei Superposition: Differenz zweier Lastfälle (Abschnitt 5.1) - bei α_T : Unterschiedliche Definitionen für ESZ und EVZ
$\bullet$	Ableitung nach der Zeit

Variablen und Abkürzungen

Große lateinische Buchstaben

A	$[\mathrm{m}^2]$	Flächeninhalt, Querschnittsfläche
B		Körper
$\mathbb{D}, D_{ijk\ell}$	$[\mathrm{GPa}^{-1}]$	Nachgiebigkeitstensor
$\underline{\underline{D}}, D_{AB}$	$[\mathrm{GPa}^{-1}]$	Nachgiebigkeits„matrix“
E	$[\mathrm{GPa}]$	Elastizitätsmodul
$E_{\parallel}$	$[\mathrm{GPa}]$	Elastizitätsmodul parallel zur Isotropieebene
$E_{\perp}$	$[\mathrm{GPa}]$	Elastizitätsmodul senkrecht zur Isotropieebene
$\mathbb{E}, E_{ijk\ell}$	$[\mathrm{GPa}]$	Elastizitätstensor
$\underline{\underline{E}}, E_{AB}$	$[\mathrm{GPa}]$	Elastizitäts„matrix“
EA	$[\mathrm{N}]$	Dehnsteifigkeit
EI	$[\mathrm{N\,m}^2]$	Biegesteifigkeit
EVZ		Ebener Verzerrungszustand
ESZ		Ebener Spannungszustand
F	$[\mathrm{MPa\,m}^2]$	AIRYsche Spannungsfunktion
$\vec{F}, F_i$	$[\mathrm{N}]$	punktförmige Kraft, Einzellast
G	$[\mathrm{GPa}]$	Schubmodul
G^{ik}		EINSTEIN-Tensor
$\vec{H}, H_i$	$[\mathrm{N\,m}]$	GALERKIN-Vektor
$\underline{\underline{H}}, H_{ij}$	[-]	Verschiebungsgradient
HNST		Hauptnormalspannungstrajektorien
HSST		Hauptschubspannungstrajektorien
$\underline{\underline{I}}$	[-]	Einheitsmatrix
I_i		Invariante, der Index unten links gibt den Tensor an, für den die Invariante gebildet wird, z.B. ist ${}_{\sigma}I_2$ die zweite

		Invariante des Spannungstensors. Die Einheit hängt von i und vom Index unten links ab
$\underline{\underline{J}}$		JACOBI-Matrix
$J = \det \underline{\underline{J}}$		JACOBI-Determinante
J_2	$[\mathrm{MPa}^2]$	zweite Invariante des Spannungsdeviators
J_n	[-]	BESSELfunktion erster Art der Ordnung n
K	$[\mathrm{GPa}]$	Kompressionsmodul
$\vec{M}, M$	$[\mathrm{N\,m}]$	Moment bzw. Biegemoment
N	$[\mathrm{N}]$	Normalkraft
$\vec{N}, N_i$	[-]	Normalenvektor, nicht-normiert
R		Krümmungsskalar
R_{ij}		RICCI-Tensor
$R^{n}_{\bullet ijk}$, R_{nijk}		RIEMANN-CHRISTOFFELscher Krümmungstensor bzw. RIEMANN-CHRISTOFFEL-Tensor
S		Oberfläche eines Körpers
S_u		Teil der Oberfläche, an dem die Verschiebungen vorgegeben sind
S_t		Teil der Oberfläche, an dem der Spannungsvektor vorgegeben ist
T, T_o	[°C, K]	Temperatur, Ausgangstemperatur
U	$[\mathrm{J\,m^{-1}}]$	Formänderungsenergiedichte, Formänderungsenergie pro Volumeneinheit
U^*	$[\mathrm{J\,m^{-3}}]$	Ergänzungsenergiedichte, Ergänzungsenergie pro Volumeneinheit
V	$[\mathrm{m}^3]$	Volumeninhalt
W	$[\mathrm{J\,m^{-3}}]$	Formänderungsarbeitsdichte, Formänderungsarbeit pro Volumeneinheit
Z	$[\mathrm{N\,m}]$	LOVEsche Verschiebungsfunktion

Kleine lateinische Buchstaben

$\underline{\underline{a}}, a_{i'j}, a_{i'\bullet}^{\;\;j}, a^{i'}_{\bullet j}$	[-]	Transformationsmatrix
$\vec{b}, b_i$	$[\mathrm{m}]$	BURGERS-Vektor
c_P	$[\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}]$	spezifische Wärme bei konstantem Druck
c_V	$[\mathrm{J\,kg^{-1}\,K^{-1}}]$	spezifische Wärme bei konstantem Volumen
$\cos\alpha_i$	[-]	Richtungskosinus
dA	$[\mathrm{m}^2]$	infinitesimales Flächenelement

det		Determinante. Die Einheit hängt von der Dimension der Elemente der Determinante ab
ds	[m]	infinitesimales Linienelement
$d\vec{x}, dx_i$	[m]	materielles Linienelement
dV	[m^3]	infinitesimales Volumenelement
e	[-]	Spur des Verzerrungstensors, Volumendilatation
$\bar{\mathsf{e}}$	[-]	Spur des Verzerrungstensors in der Ebene, „Flächen“dilatation
e_{ijk}	[-]	Permutationstensor oder LEVI-CEVITA-Tensor in kartesischen Koordinaten
$\vec{f}, f_i, f^i$	[$\mathrm{N\,m^{-3}}$]	Räumlich verteilte Kräfte, Volumenlasten
g		Determinante des Metriktensors
g	[$\mathrm{J\,m^{-3}}$]	Dichte der freien GIBBS-Enthalpie (Kap. 4.6)
g_{ij}, g^{ij}		Kovariante und kontravariante Komponenten des Metriktensors
k	[$\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-1}\,K^{-1}}$]	Wärmeleitfähigkeit
ℓ	[m]	Länge
$\vec{n}, n_i, n^i$	[-]	Normaleneinheitsvektor
p	[$\mathrm{N\,m^{-2}}$]	Druck
$\vec{p}, p_i$	[$\mathrm{N\,m^{-2}}$]	flächig verteilte Kräfte, Flächenlasten
$\vec{q}, q_i$	[$\mathrm{N\,m^{-1}}$]	linienförmig verteilte Kräfte, Linienlasten
r	[m]	Radius bei Polarkoordinaten (r, φ)
$\vec{r}, r_i$	[m]	Ortsvektor
s	[m]	Bogenlänge
s	[$\mathrm{J\,m^{-3}\,K^{-1}}$]	Entropiedichte (Kapitel 4.6)
s	[MPa]	Spur des Spannungstensors
$\vec{t}, t_i, t^i$	[MPa]	Spannungsvektor
tr		Spur eines Tensors. Die Einheit hängt von der Dimension der Elemente ab von der die Spur gebildet wird
$\vec{u}, u_i, u^i$	[m]	Verschiebungsvektor
u, v, w	[m]	Verschiebungen in x-, y-, bzw. z-Richtung
u_r, u_φ, u_z		Verschiebungen in Koordinatenrichtung der Zylinderkoordinaten (r, φ, z)
$u_r, u_\vartheta, u_\varphi$		Verschiebungen in Koordinatenrichtung der Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)

x_i	[m]	kartesische Koordinaten
$\vec{x}, x_i$	[m]	Ortsvektor
x, y, z	[m]	kartesisches Koordinatensystem

Große griechische Buchstaben

Γ		Kurve (Berandung)
ΔA	$[\mathrm{m}^2]$	endliches Flächenelement
$\Delta\ell$	[m]	Längenänderung
θ	[°C, K]	Temperaturänderung
Λ	$[\mathrm{N\,m}^{-2}]$	Potenzial der Volumenlasten
Π	[J]	Gesamtenergie
Φ	$[\mathrm{m}^2]$	skalares Verschiebungspotenzial (Abschnitt 5.4)
Φ	[N]	LAMÉsches Dehnungspotenzial (Abschnitt 5.4)
Φ	$[\mathrm{m}^2]$	thermo-elastisches Verschiebungspotenzial (Abschnitt. 5.7)
$\underline{\underline{\Phi}}, \Phi_{ij}$	$[\mathrm{MPa\,m}^2]$	Tensor der Spannungsfunktionen
$\vec{\Psi}, \Psi_i$	$[\mathrm{m}^2]$	vektorielles Verschiebungspotenzial

Kleine griechische Buchstaben

α_T	$[\mathrm{K}^{-1}]$	linearer Temperaturausdehnungskoeffizient
$\tilde{\alpha}_T = \begin{cases} (1+\nu)\alpha_T \\ \alpha_T \end{cases}$	$[\mathrm{K}^{-1}]$	EVZ ESZ
α_{ij}	$[\mathrm{K}^{-1}]$	Temperaturausdehnungstensor
β_T	$[\mathrm{N\,m}^{-2}\,\mathrm{K}^{-1}]$	thermo-elastischer Koeffizient
β_{ij}	$[\mathrm{N\,m}^{-2}\,\mathrm{K}^{-1}]$	thermo-elastischer Tensor
γ_{ij}	[-]	Verzerrungstensor in krummlinigen Koordinaten
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$	[-]	technische Gleitungen
δ_{ij}, δ_i^j	[-]	KRONECKER-Symbol, Einheitstensor
$\varepsilon, \varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	[-]	Dehnungen
$\underline{\underline{\varepsilon}}, \varepsilon_{ij}$	[-]	Verzerrungstensor
$\vec{\varepsilon}, \varepsilon_A$	[-]	Verzerrungs„vektor“
ε_{ijk}	[-]	LEVI-CIVITÀ-Tensor, Permutationstensor
$\underline{\underline{\eta}}, \eta_{ij}$	$[\mathrm{m}^{-2}]$	Inkompatibilitätstensor

ϑ		Meridianer Winkel in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)
κ	[-]	Elastizitätskonstante für ebene Probleme
$\kappa = \begin{cases} (3-4\nu) \\ \dfrac{3-\nu}{1+\nu} \end{cases}$		EVZ ESZ
λ, μ	[GPa]	LAMÉsche Konstanten
$\vec{\mu}, \mu_i$	[MPa m]	Momentenspannungsvektor
ν	[-]	Querkontraktionszahl
$\nu_{\parallel}$	[-]	Querkontraktion parallel zur Isotropieebene
$\nu_{\perp}$	[-]	Querkontraktion senkrecht zur Isotropieebene
ξ^i		krummlinige Koordinaten
ρ, ρ_0	$[\mathrm{kg\,m^{-3}}]$	Dichte bzw. Dichte in der Ausgangskonfiguration
σ	[MPa]	Normalspannung
$\underline{\underline{\sigma}}, \sigma_{ij}$	[MPa]	Spannungstensor in kartesischen Koordinaten
$\vec{\sigma}, \sigma_A$	[MPa]	Spannungs„vektor“
σ_i	[MPa]	Haupt(normal)spannung
$\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$	[MPa]	Haupt(normal)spannungen nach ihrer Größe sortiert $\sigma_I \geq \sigma_{II} \geq \sigma_{III}$
$\sigma_{mI}, \sigma_{mII}, \sigma_{mIII}$	[MPa]	mittlere Normalspannungen in den Schnittrichtungen der Hauptschubspannungen
τ	[MPa]	Schubspannung
$\tau_I, \tau_{II}, \tau_{III}$	[MPa]	Hauptschubspannungen
τ^{ij}		Spannungstensor in krummlinigen Koordinaten
φ	[-]	Umfangswinkel bei Polarkoordinaten (r, φ) und Zylinderkoordinaten (r, φ, z), azimutaler Winkel bei Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ)
φ	$[\mathrm{J\,m^{-3}}]$	Dichte der freien HELMHOLZ-Energie (Abschnitt 4.6)
φ_0, φ_i	$[\mathrm{N\,m^{-1}}]$	PAPKOVICH-NEUBER-Potenziale
ω	[-]	Drehung
$\underline{\underline{\omega}}, \omega_{ij}$	[-]	Rotationstensor
$\vec{\omega}, \omega_i$	[-]	Rotationsvektor