

Springer-Lehrbuch

Rolf Mahnken

Lehrbuch der Technischen Mechanik – Statik

Grundlagen und Anwendungen

Prof. Dr.-Ing. Rolf Mahnken, M.Sc.
Universität Paderborn
Fakultät für Maschinenbau
Lehrstuhl für Technische Mechanik
Warburger Straße 100
33098 Paderborn
Deutschland
rolf.mahnken@ltm.upb.de

ISBN 978-3-642-21710-4 e-ISBN 978-3-642-21711-1
DOI 10.1007/978-3-642-21711-1
Springer Heidelberg Dordrecht London New York

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 2012

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Einbandentwurf: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

Springer ist Teil der Fachverlagsgruppe Springer Science+Business Media
(www.springer.de)

Vorwort

Die Statik ist die Lehre vom *Gleichgewicht von Körpern, die unter dem Einfluß von Kräften stehen*. Dabei denkt man zunächst an *ruhende* Körper - so wie die Baumeister der Antike, die bei der Errichtung monumentaler Gebäude großen Herausforderungen gegenüberstanden. Während damals die Bauausführungen vorwiegend auf Erfahrungen beruhten, sind im heutigen Ingenieuralltag außerdem zuverlässige und effiziente Berechnungsverfahren unerlässlich. Damit wird es möglich, immer höhere Gebäude und Brücken mit immer weiteren Spannweiten zu bauen. Jedoch weisen uns aktuelle Nachrichten, etwa über einsturzgefährdete Brücken und U-Bahnbaustellen oder auf Grund von Eis- und Schneelast umgestürzte Strommasten und Eissporthallen, immer wieder auf das Gefahrenpotenzial von Ingenieurkonstruktionen hin.

Berücksichtigt man, dass sich nicht nur ruhende, sondern auch *nicht beschleunigte* Körper im Gleichgewicht befinden, dann sind die Angabe des Übersetzungsverhältnisses für ein PKW-Getriebe oder die Berechnung von Kräften in Zahnradgetrieben bei konstanter Drehgeschwindigkeit ebenfalls Fragestellungen, die mit Methoden der Statik beantwortet werden können.

Für Studierende vieler Ingenieurbereiche ist eine eingehende Beschäftigung mit der Statik also von grundsätzlicher Bedeutung, um auch im späteren Berufsleben den Anforderungen an sichere Bauten und Maschinen unter wirtschaftlichen Rahmenbedingungen gerecht zu werden. Das vorliegende Buch richtet sich somit vorrangig an Studentinnen und Studenten der Fachrichtungen Maschinenbau, Bauingenieurwesen, Geologie, Elektrotechnik, Wirtschaftsingenieurwesen, Technomathematik, Ingenieurinformatik, Mechatronik, Verfahrenstechnik und Lehramt sowie an Ingenieure in der beruflichen Praxis. Entsprechend wird die Statik starrer Körper umfassend behandelt. Zum Verständnis des Buches werden Kenntnisse über Physik und Mathematik auf Abiturniveau vorausgesetzt.

Das Buch ist aus gleichnamigen Vorlesungen entstanden, die der Autor in den Wintersemestern 1997/98 und 1998/99 an der Universität Hannover für Studenten des Bauingenieurwesens gehalten hat und seit dem Wintersemester 2004/05 an der Universität Paderborn für Studenten des Maschinenbaus und des Wirtschaftsingenieurwesens hält. Dabei wurden und werden auch weiterhin die unterschiedlichen fachlichen Schwerpunkte der verschiedenen Hörerkreise berücksichtigt. Sie sind in dieses Buch eingegangen und tragen zu der umfassenden Darstellung der Statik starrer Körper bei.

Besonders bedanken möchte ich mich bei ehemaligen und jetzigen Mitarbeitern des Lehrstuhls für Technische Mechanik, Universität Paderborn, Dr.-Ing. Franz-Barthold Gockel, Dr.-Ing. Stefan Wilmanns, Dipl.-Ing. Kim Sauerland, Dr.-Ing. Ismael Caylak, Dipl.-Ing. Frederik Hankeln für die Unterstützung bei der Erstellung der Übungsaufgaben. Des Weiteren sei den Hilfsassistenten Martin Kage und Sebastian Heibel für die Bearbeitung der Übungsaufgaben sowie Herrn Kohlstedt für die Programmierung mit MATLAB gedankt. Den Hilfsassistenten Dominik Stümpel und Simon Maike sowie Herrn Kai Yang danke ich für die sorgfältige Anfertigung der anschaulichen Abbildungen. Dem Springer Verlag und insbesondere Frau Eva Hestermann-Beyerle möchte ich für die gute Zusammenarbeit danken.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	1
1.1	Was ist Mechanik?	1
1.2	Einige Meilensteine in der Geschichte der Mechanik	3
1.3	Einteilung der Mechanik	5
1.4	Einteilung und Inhalte des Buches	5
1.5	Ziele des Buches	8

Teil I Grundlagen der Statik

2	Grundbegriffe	13
2.1	Die Newtonsche Kraft	13
2.1.1	Definition Betrag einer Kraft	13
2.1.2	Definition des Kraftvektors	15
2.1.3	Flächen- und Volumenkräfte	16
2.1.4	Lastermittlung für Ingenieurkonstruktionen	17
2.1.5	Freischneiden und Freikörperbild	20
2.1.6	Einteilung von Kräften	22
2.1.7	Aufgaben zu Abschnitt 2.1	23
2.2	Der Starrkörper	26
2.3	Der Freiheitsgrad eines Körpers	26
2.4	Lager- und Reaktionskräfte	27
2.4.1	Allgemeines	27
2.4.2	Lagerarten für ebene Systeme	28
2.4.3	Lagerarten für räumliche Systeme	31
2.4.4	Zwischenlagerungen	33
2.4.5	Aufgaben zu Abschnitt 2.4	35
3	Axiome, Gesetze und Idealisierungen	37
3.1	Das Gleichgewichtssaxiom zweier Kräfte am Starrkörper	37
3.2	Wechselwirkung zwischen zwei Kräften: Gesetz und Axiom	40
3.3	Das Axiom vom Kräfteparallelogramm	41

3.4	Gleichgewicht verschiedenartiger Kräfte	44
3.4.1	Das Gravitationsgesetz von Newton für zwei Massen	44
3.4.2	Das Coulombsche Gesetz für zwei elektrische Ladungen	45
3.4.3	Kräfte auf stromdurchflossene Leiter im magnetischen Feld	47
3.4.4	Das Hookesche Gesetz für Schraubenfedern	49
3.5	Statisch äquivalente Kraftsysteme und Gleichgewicht von Kraftsystemen . . .	50
3.6	Anwendung der Axiome auf idealisierte Körper	51
3.7	Aufgaben zu Kapitel 3	55
4	Zentrale Kraftsysteme in der Ebene	59
4.1	Vom realen System zum zentralen Kraftsystem	59
4.2	Zeichnerische Lösungen der drei Grundaufgaben	60
4.2.1	Erste Grundaufgabe: Reduktion auf eine Einzelkraft	60
4.2.2	Zweite Grundaufgabe: Gleichgewicht	62
4.2.3	Praktische Berechnung von zentralen Kraftsystemen	64
4.2.4	Gleichgewicht von drei Kräften	68
4.2.5	Das Superpositionsgesetz	70
4.2.6	Dritte Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft	72
4.2.7	Zerlegung eines Kraftvektors in kartesischen Koordinaten	73
4.2.8	Aufgaben zu Abschnitt 4.2	75
4.3	Rechnerische Lösungen der drei Grundaufgaben	81
4.3.1	Erste Grundaufgabe: Reduktion auf eine Einzelkraft	81
4.3.2	Zweite Grundaufgabe: Gleichgewicht	82
4.3.3	Dritte Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft	84
4.3.4	Die Systemmatrix	85
4.4	Statische Bestimmtheit eines Massenpunktes in der Ebene	86
4.5	Numerische Methoden für Gleichgewichtsaufgaben	89
4.6	Aufgaben zu den Abschnitten 4.3 bis 4.5	91
5	Nichtzentrale Kraftsysteme in der Ebene	95
5.1	Vom realen System zum nichtzentralen Kraftsystem	95
5.2	Reduktion von zwei parallelen Kräften	96
5.3	Das Kräftepaar und dessen Moment	97
5.3.1	Definitionen und Gesetze	97
5.3.2	Reduktion und Gleichgewicht für Momente von Kräftepaaren	101
5.4	Parallelverschiebung einer Kraft	103
5.5	Das polare Moment einer Kraft	103
5.6	Aufgaben zu den Abschnitten 5.2 bis 5.5	106
5.7	Die drei Grundaufgaben der Starrkörperstatik	109
5.7.1	Erste Grundaufgabe: Reduktion	109
5.7.2	Zweite Grundaufgabe: Gleichgewicht	114
5.7.3	Statisch äquivalente Gleichgewichtsbedingungen für den Starrkörper .	116
5.7.4	Dritte Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft	118
5.7.5	Die Systemmatrix	120

5.8 Statische Bestimmtheit eines Starrkörpers in der Ebene 121

5.9 Aufgaben zu den Abschnitten 5.7 und 5.8 126

6 Kraftsysteme im Raum 131

6.1 Darstellung von Kraftvektoren in kartesischen Koordinaten 131

6.2 Zentrale Kraftsysteme im Raum 132

6.2.1 Erste Grundaufgabe: Reduktion auf eine Einzelkraft 132

6.2.2 Zweite Grundaufgabe: Gleichgewicht 134

6.2.3 Dritte Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft 136

6.2.4 Statische Bestimmtheit eines Massenpunktes im Raum 137

6.2.5 Aufgaben zu Abschnitt 6.2 137

6.3 Nichtzentrale Kraftsysteme im Raum 139

6.3.1 Der Momentenvektor eines Kräftepaars 139

6.3.2 Parallelverschiebung einer Kraft 141

6.3.3 Der polare Momentenvektor einer Kraft 142

6.3.4 Der axiale Momentenvektor einer Kraft 145

6.3.5 Aufgaben zu den Abschnitten 6.3.1 bis 6.3.4 147

6.3.6 Erste Grundaufgabe: Reduktion 148

6.3.7 Zweite Grundaufgabe: Gleichgewicht 152

6.3.8 Statisch äquivalente Gleichgewichtsbedingungen 152

6.3.9 Dritte Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft 154

6.3.10 Statische Bestimmtheit eines Starrkörpers im Raum 155

6.3.11 Aufgaben zu den Abschnitten 6.3.6 bis 6.3.10 158

7 Kinematik des Starrkörpers in der Ebene 161

7.1 Die finite ebene Bewegung eines Körpers 161

7.2 Die infinitesimale ebene Bewegung eines Körpers 162

7.3 Drei Grundaufgaben der Starrkörperkinematik 164

7.3.1 Erste Grundaufgabe: Verschiebungen eines Starrkörpers ermitteln . . . 164

7.3.2 Zweite Grundaufgabe: Momentanpol eines Starrkörpers ermitteln . . . 166

7.3.3 Dritte Grundaufgabe: Polplan eines mehrteiligen Systems ermitteln . . 169

7.4 Verschiebungen von Punkten in kartesischen Koordinaten 172

7.5 Kinematische Bestimmtheit eines Starrkörpers in der Ebene 173

7.6 Statische und kinematische Bestimmtheit eines Starrkörpers in der Ebene . . 175

7.7 Aufgaben zu Kapitel 7 176

Teil II Anwendungen der Statik

8 Schwerpunkte 183

8.1 Der Schwerpunkt einer Körpergruppe 183

8.1.1 Definition und Berechnung 183

8.1.2 Aufgaben zu Abschnitt 8.1 186

8.2 Der Schwerpunkt eines inhomogenen Körpers 187

8.3	Geometrische Mittelpunkte für Volumina, Flächen und Linien	188
8.3.1	Volumenmittelpunkte	188
8.3.2	Flächenmittelpunkte	188
8.3.3	Linienmittelpunkte	190
8.4	Praktische Auswertung der Integrale	191
8.5	Die Resultierende von Streckenlasten	202
8.6	Geometrische Mittelpunkte für zusammengesetzte Körper	204
8.7	Aufgaben zu den Abschnitten 8.2 bis 8.6	213
8.8	Die zwei Regeln von Pappus-Guldin	218
8.8.1	Herleitung der Regeln	218
8.8.2	Aufgaben zu Abschnitt 8.8	220
9	Gleichgewicht von Balkentragwerken	223
9.1	Einteilung von Tragwerken und statische Systeme	223
9.2	Praktische Berechnung von Gleichgewicht für Tragwerke	224
9.3	Einteilige Tragwerke in der Ebene	224
9.3.1	Statische Bestimmtheit und Gleichgewicht	224
9.3.2	Aufgaben zu Abschnitt 9.3	232
9.4	Mehrteilige Tragwerke	236
9.4.1	Statische Bestimmtheit und Gleichgewicht	236
9.4.2	Dreigelenkbogen	239
9.4.3	Gelenkbalken (Gerberträger)	242
9.4.4	Aufgaben zu Abschnitt 9.4	246
9.5	Einteilige Tragwerke im Raum	250
9.5.1	Statische Bestimmtheit und Gleichgewicht	250
9.5.2	Aufgaben zu Abschnitt 9.5	252
10	Gleichgewicht von Fachwerken	255
10.1	Grundlagen und Einteilungen	255
10.2	Idealisierungen und Regeln für das ideale Fachwerk	258
10.3	Statische Bestimmtheit von Fachwerken	259
10.4	Die drei Bildungsgesetze	263
10.5	Praktische Berechnung von Stabkräften	266
10.5.1	Nullstäbe	266
10.5.2	Das Knotenpunktverfahren: Grundgedanke	267
10.5.3	Das zeichnerische Knotenpunktverfahren	268
10.5.4	Das rechnerische Knotenpunktverfahren	270
10.5.5	Das numerische Knotenpunktverfahren	271
10.5.6	Das Rittersche Schnittverfahren	277
10.6	Aufgaben zu Kapitel 10	278

11	Werkzeuge und Maschinen	283
11.1	Begriffe	283
11.2	Kinematische Untersuchungen für Bewegungs- und Ruhezustand	284
11.3	Gleichgewicht an verschieblichen Systemen mit Haltekraftgrößen	286
11.4	Kraft- und Wegübertragung in Hebeln	290
11.5	Momenten- und Drehwinkelübertragungen in Getrieben	297
11.5.1	Übertragungsfaktoren in ruhenden Systemen	297
11.5.2	Momentenwandlung, Drehzahl und Übersetzung in bewegten Systemen	299
11.5.3	Übertragung von Kräfte- und Bewegungsgrößen in Radpaaren	303
11.5.4	Mehrstufige Getriebe	308
11.6	Kraft- und Wegübertragung in Flaschenzügen	311
11.7	Kräfte in Zahnradgetrieben	316
11.7.1	Allgemeines	316
11.7.2	Die Zahnradkraft	316
11.8	Aufgaben zu Kapitel 11	323
12	Schnittgrößen	331
12.1	Definition von Schnittgrößen	331
12.2	Gleichgewichtsmethode für einteilige Balkentragwerke	333
12.3	Zusammenhang zwischen Belastungen und Schnittgrößen	337
12.4	Praktische Berechnung von Schnittgrößen	339
12.5	Berechnen der Schnittgrößen durch Lösen der Differenzialgleichungen	350
12.6	Schnittgrößen in räumlichen Tragwerken	354
12.7	Schnittgrößen in Werkzeugen und Maschinen	357
12.8	Aufgaben zu Kapitel 12	361
13	Reibung	367
13.1	Grundlagen zur Reibung	367
13.2	Reibungsgesetze für Haft- und Gleitreibung	369
13.2.1	Vier Zustände eines Körpers bei Reibung	369
13.2.2	Haftreibung für Gleichgewicht im Zustand I	370
13.2.3	Das Haftreibungsgesetz im Grenzzustand II	371
13.2.4	Die beschleunigte Bewegung im Zustand III	372
13.2.5	Das Gleitreibungsgesetz im Zustand IV mit gleichförmiger Bewegung	372
13.3	Praktische Berechnung von Systemen mit Reibung	373
13.4	Haftreibungswinkel, Haftreibungskegel und Selbsthemmung	376
13.5	Reibung in Keilen	379
13.6	Reibung in Schrauben und Gewinden	381
13.6.1	Schrauben mit Flachgewinde	381
13.6.2	Schrauben mit Spitzgewinde	383
13.6.3	Schrauben mit Vorspannkraft	385
13.7	Seilreibung	386
13.8	Wirkungsgrad für allgemeine Reibungsverluste	390
13.9	Aufgaben zu Kapitel 13	391

14 Arbeit, Potenzial und Stabilität	399
14.1 Die Arbeit einer Kraft entlang einer Bahn	399
14.1.1 Vorbetrachtungen zum Arbeitsbegriff	399
14.1.2 Berechnung der Arbeit im allgemeinen Fall	400
14.1.3 Das Arbeitsdifferenzial in kartesischen Koordinaten	402
14.1.4 Arbeit bei einer Kreisbewegung	404
14.1.5 Aufgaben zu Abschnitt 14.1	405
14.2 Das Prinzip der virtuellen Arbeit	407
14.2.1 Definitionen der virtuellen Arbeiten von Kräften und Momenten	407
14.2.2 Herleitung des Prinzips der virtuellen Arbeit	408
14.2.3 Praktische Berechnung von Systemen mit einem Freiheitsgrad	410
14.2.4 Berechnung von Haltekräften in verschieblichen Systemen	411
14.2.5 Festlegung einzelner Systemparameter für Gleichgewicht	413
14.2.6 Ermittlung von Gleichgewichtslagen bei verschieblichen Systemen	413
14.2.7 Berechnung von Kraftgrößen in statisch bestimmten Systemen	414
14.2.8 Variationelle Verschiebungen für Systeme mit mehreren Freiheitsgraden	420
14.2.9 Aufgaben zu Abschnitt 14.2	423
14.3 Potenzialkräfte	424
14.3.1 Wegunabhängigkeit von Gewichts- und Federkräften	424
14.3.2 Potenzialfunktionen für Gewichts- und Federkräfte	426
14.3.3 Das P.d.v.A für starre Körper mit Potenzialkräften	427
14.4 Stabilität von Gleichgewichtslagen	430
14.4.1 Allgemeines	430
14.4.2 Stabilität von Potenzialsystemen	431
14.4.3 Praktische Untersuchung der Stabilität von Systemen mit einem Freiheitsgrad	432
14.4.4 Aufgaben zu Abschnitt 14.4	436
15 Anhang	437
A Einheiten	437
B Notwendige und hinreichende Bedingungen in der Statik	437
C Grundlagen der Vektorrechnung	438
C.1 Rechenoperationen	439
C.2 Vektorbasis und Basisdarstellung von Vektoren	441
D Grundlagen der Matrixrechnung	442
E Anhang zu Kraftsystemen in der Ebene	444
E.1 Beweis des Reduktionsgesetzes (5.9) für Drehmomente in der Ebene	444
E.2 Beweis der Gleichgewichtsbedingungen (5.10) für Drehmomente in der Ebene	444
E.3 Beweis der statisch äquivalenten Gleichgewichtsbedingungen (5.27)	445
F Anhang zu Kraftsystemen im Raum	446
F.1 Beweis des Verschiebungsgesetzes (6.18.1) für Drehmomentenvektoren	446
F.2 Beweis des Reduktionsgesetzes (6.18.2) für Drehmomentenvektoren	446
F.3 Beweise zu den Regeln (6.29) des axialen Momentenvektors	447

E	Lösungen zu den Aufgaben	448
Literaturverzeichnis	455
Index	457