

# Matrizen und ihre Anwendungen 1

**Springer**

*Berlin*

*Heidelberg*

*New York*

*Barcelona*

*Budapest*

*Hongkong*

*London*

*Mailand*

*Paris*

*Santa Clara*

*Singapur*

*Tokio*

Rudolf Zurmühl · Sigurd Falk

# Matrizen und ihre Anwendungen 1

Grundlagen

Für Ingenieure, Physiker und  
Angewandte Mathematiker

Siebente Auflage mit 73 Abbildungen



Springer

Dr.-Ing. Rudolf Zurmühl†

o. Professor an der Technischen Universität Berlin

Dr.-Ing. Sigurd Falk

o. Professor an der Technischen Universität Braunschweig

Die sechste Auflage erschien unter dem Titel: Matrizen und ihre Anwendungen 1 als „Springer-Lehrbuch“.

ISBN 3-540-61436-2 7. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

ISBN 3-540-53944-1 6. Aufl. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York

Die Deutsche Bibliothek – CIP-Einheitsaufnahme

Zurmühl, Rudolf: Matrizen und ihre Anwendungen: für Ingenieure, Physiker und angewandte Mathematiker/ Rudolf Zurmühl; Sigurd Falk. – Berlin; Heidelberg; New York; Barcelona; Budapest; Hongkong; London; Mailand; Paris; Santa Clara; Singapur; Tokio: Springer.

Bis 4. Aufl. u. d. T.: Zurmühl, Rudolf: Matrizen und ihre technischen Anwendungen

NE: Falk, Sigurd:

1. Grundlagen. – 7. Aufl. – 1997

ISBN 3-540-61436-2

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funksendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

© Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1950, 1958, 1961, 1964, 1984, 1992 and 1997

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, daß solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Sollte in diesem Werk direkt oder indirekt auf Gesetze, Vorschriften oder Richtlinien (z. B. DIN, VDI, VDE) Bezug genommen oder aus ihnen zitiert worden sein, so kann der Verlag keine Gewähr für Richtigkeit, Vollständigkeit oder Aktualität übernehmen. Es empfiehlt sich, gegebenenfalls für die eigenen Arbeiten die vollständigen Vorschriften oder Richtlinien in der jeweils gültigen Fassung hinzuzuziehen.

Einbandgestaltung: Struve & Partner, Heidelberg

Satzarbeiten: K + V Fotosatz, Beerfelden

Offsetdruck: Saladruck, Berlin; Bindearbeiten: Lüderitz & Bauer, Berlin

SPIN 10542410 60/3020-5 4 3 2 1 0 – Gedruckt auf säurefreiem Papier

## Vorwort zur siebenten Auflage

Die Konzeption dieses klassischen Mathematikbuches wurde auch bei der 7. Auflage beibehalten. Die neue Einbandgestaltung soll verdeutlichen, daß das vorliegende Werk Lehrbuch *und* Nachschlagewerk zugleich ist, und den Ingenieur über das Studium hinaus durch sein ganzes Berufsleben begleitet.

Braunschweig, im November 1996

Sigurd Falk

## Vorwort zur sechsten Auflage

Seit nach dem Erscheinen der fünften Auflage acht Jahre vergangen sind, erschien eine grundlegende Umgestaltung und Erweiterung unerlässlich. Es wurden daher die früheren Paragraphen 10, 18 und 19 fast vollständig gestrichen und Begriffe wie Elementarteiler und Elementarpolynome als nicht computergerecht ebenso wie die schwerfällige und aufwendige Numerik der Hauptvektorketten gestrichen und durch moderne Verfahren ersetzt, wodurch Platz für eine Reihe von Neuerungen geschaffen wurde.

Völlig umgestaltet wurde das II. Kapitel, das eine umfassende Transformationstheorie vorstellt, getrennt nach freien und gebundenen Transformationen, wobei das durch den Gaußschen Algorithmus erzeugte Pivotkreuz als die Grundkonfiguration der gesamten numerischen linearen Algebra herausgestellt wird. Das Rechnen mit beweglichem Pivot und im Zusammenhang damit die (seit Jahrzehnten vergessene) Pivotregulierung erspart nicht nur jegliches Vertauschen von Zeilen und Spalten, sondern ermöglicht darüber hinaus mittels des (ebenfalls lange verdrängten) Euklidischen Algorithmus eine ganzzahlige und damit fehlerfreie Numerik ganzzahliger Matrizen.

Bei den gebundenen (simultanen) Transformationen eines Matrizenpaares  $A; B$  wurde die Elementartransformation QUANT in den Vordergrund gerückt, die mittels einer unitären Ergänzung zwanglos zu den unitären (im Reellen orthogonalen) Transformationen führt und unter anderem die sogenannte schnelle Givens-Transformation ohne Zuhilfenahme von Winkelfunktionen auch im Komplexen ermöglicht. Ferner wurde die Ähnlichkeitstransformation einer quadratischen Matrix auf die Begleitmatrix (bzw. Kodiagonalmatrix) von Danilewski durch eine numerisch stabile Transformation ersetzt sowie die ganzzahlige Ähnlichkeitstransformation einer ganzzahligen quadratischen Matrix  $A$  auf eine ganzzahlige Hessenbergmatrix (Fastdreiecksmatrix)  $H$  erstmalig angegeben.

Dem für die Anwendungen so wichtigen wie für die Theorie grundlegenden Eigenwertproblem habe ich eine vollständige Numerik der Eigenzeilen und Eigen-

spalten einer singulären (auch rechteckigen) Matrix  $A$  vorangestellt, wodurch der Übergang auf das einparametrische Eigenwertproblem  $F(\lambda)\mathbf{x} = \mathbf{o}$  (speziell mit  $F(\lambda) = A - \lambda B$ ) auch in didaktischer Hinsicht wesentlich erleichtert wird. In diesem Zusammenhang wird die Theorie der Flächenpaare zweiter Ordnung und analog dazu die Theorie der linearisierten freien ungedämpften Schwingungen mit  $n$  Freiheitsgraden besonders ausführlich dargestellt.

Der Abschnitt 16 ist vorwiegend theoretischer Natur. Hier wird die Jordan-Form  $J; I_n$  eines Paares  $A; B$  einschließlich der Jordan-Spektralzerlegung ohne Zuhilfenahme von Hauptvektoren konstruiert, ein Vorgehen, das sich gegenüber den herkömmlichen Methoden auch als numerisch vorteilhaft erweist. Relativ umfassend abgehandelt werden die Matrixgleichungen (Abschnitt 19) mit zum Teil unveröffentlichten Algorithmen und die Matrizenfunktionen (Abschnitt 20), wobei die Heranziehung der bekannten Quasipolynome von Arnold zu überraschend einfachen Sätzen und Algorithmen führt.

Das in der Neuauflage innerhalb der Reihe „Springer-Lehrbuch“ erscheinende Buch enthält mehr als 170 vollständig durchgerechnete und zum Teil mit Computerausdrucken versehene Zahlenbeispiele an Matrizen der Ordnung  $n = 2$  bis  $n = 500$ .

Wieder habe ich einigen Mitarbeitern und Helfern für Rat und Tat zu danken. Es sind dies Frau Dr. Anna Lee und Prof. Dr. Paul Rózsa (beide Budapest), Herr Prof. Dr. Gerhard Zielke (Halle), Herr Dr.-Ing. Jörg Schneider (Volkswagenwerk Wolfsburg) und Herr math.-techn. Assistent Horst Budich (Braunschweig). Letzterer verdient ein besonderes Lob für die Erstellung und Kontrolle sämtlicher Zahlenbeispiele.

Schließlich gebührt mein Dank den Damen und Herren des Springer-Verlages für die kollegiale und reibungslose Zusammenarbeit sowie der Setzerei K + V Fotosatz GmbH (Beerfelden-Airlenbach) für die vorbildliche Gestaltung des nicht immer einfachen Satzbildes.

Dem Leser schließlich wünsche ich viel Freude und Gewinn beim Studium eines Kalküls, der durch das Aufkommen der digitalen Rechenautomaten in der Numerischen Mathematik eine zentrale Stellung einnimmt.

Braunschweig, im Sommer 1992  
Wendentorwall 15 A

Sigurd Falk

# Inhaltsverzeichnis<sup>1</sup>

<b>I. Kapitel Der Matrizenkalkül</b> .....	1
1 Grundbegriffe und einfache Rechenregeln .....	1
• 1.1 Lineare Transformation, Matrix und Vektor .....	1
• 1.2 Zeilen- und Spaltenvektoren .....	5
• 1.3 Einfache Rechenregeln .....	7
• 1.4 Transponierte Matrix, symmetrische und schiefssymmetrische Matrix .....	9
• 1.5 Diagonalmatrix, Skalarmatrix und Einheitsmatrix .....	11
• 1.6 Lineare Abhängigkeit, Rang, singuläre Matrix, Determinante ..	12
2 Das Matrizenprodukt .....	15
• 2.1 Einführung des Matrizenproduktes .....	15
• 2.2 Sätze über Matrizenmultiplikation .....	20
• 2.3 Diagonal- und Dreiecksmatrix .....	24
• 2.4 Skalares Produkt, Betrag und Winkel reeller Vektoren .....	26
• 2.5 Dyadisches Produkt .....	28
• 2.6 Potenzen und Polynome .....	30
• 2.7 Die Gaußsche Transformation .....	31
• 2.8 Orthogonale Matrizen .....	33
3 Die Kehrmatrix (Inverse) .....	35
• 3.1 Begriff und Herleitung der Kehrmatrix .....	35
• 3.2 Adjungierte Matrix. Formelmäßiger Ausdruck der $\alpha_{ik}$ .....	39
• 3.3 Matrizendivision .....	42
4 Komplexe Matrizen .....	43
• 4.1 Komplexe Matrizen und Vektoren .....	43
• 4.2 Sonderformen komplexer Matrizen .....	45
4.3 Reelle Darstellung komplexer Matrizen .....	48
• 4.4 Inverse, Adjungierte und Determinante einer hermiteschen Matrix .....	49

---

<sup>1</sup> Die mit dem Zeichen • versehenen Abschnitte bilden in sich ein geschlossenes Ganzes und sollten als erstes studiert werden.

<b>II.</b>	<b>Kapitel Transformationen und lineare Gleichungen</b>	<b>52</b>
5	Freie Transformationen	52
• 5.1	Ein- und beidseitige Transformationen	52
• 5.2	Reguläre Transformationen	56
• 5.3	Die drei Grundoperationen	56
• 5.4	Das Generalschema einer Äquivalenztransformation	63
• 5.5	Das Pivotkreuz	65
• 5.6	Die Normalform einer Matrix	66
• 5.7	Das vollständige System von Elevatoren	66
• 5.8	Potenzen und Polynome	71
5.9	Der Vertauschungssatz	73
• 5.10	Lineare Abbildungen	74
6	Die Algorithmen von Gauß, Banachiewicz und Gauß-Jordan	75
• 6.1	Zielsetzung	75
• 6.2	Das Nullenkreuz	76
• 6.3	Der Gaußsche Algorithmus in expliziter Durchführung	76
• 6.4	Der Gaußsche Algorithmus in impliziter Durchführung	78
• 6.5	Der Algorithmus von Banachiewicz	79
• 6.6	Der Algorithmus von Gauß-Jordan	82
• 6.7	Hermiteische (reelsymmetrische) Matrix	84
• 6.8	Rechenaufwand	85
• 6.9	Pivotregulierung	86
• 6.10	Pivotregulierung bei hermitescher Matrix	87
• 6.11	Bewegliches Pivot	91
• 6.12	Reelle ganzzahlige Äquivalenztransformationen	93
• 6.13	Der verkürzte Euklidische Algorithmus	98
• 6.14	Reelle ganzzahlige Kongruenztransformationen	101
6.15	Komplexe ganzzahlige Transformationen	102
6.16	Die Normalform	104
6.17	Dreieckszerlegung einer quadratischen Matrix	105
• 6.18	Eigenzeilen und Eigenspalten einer singulären Matrix	107
6.19	Die normierte Eigendyade als Projektor	111
• 6.20	Schlußbemerkung	114
7	Auflösung linearer Gleichungssysteme	115
• 7.1	Aufgabenstellung	115
• 7.2	Drei Kardinalforderungen	116
• 7.3	Der Algorithmus von Gauß	118
• 7.4	Der Algorithmus von Banachiewicz	122
• 7.5	Der Algorithmus von Gauß-Jordan	123
• 7.6	Reguläre quadratische Matrix. Determinante, Inverse und Adjungierte	124
7.7	Pivotregulierung. Wiederholung der Rechnung	126
• 7.8	Homogene Gleichungssysteme	128



• 7.9	Hermitesche (reellsymmetrische) Matrix	130
7.10	Allgemeine inhomogene Gleichungssysteme	132
7.11	Ganzzahlige Gleichungssysteme	140
• 7.12	Zusammenfassung	142
8	Orthogonalsysteme	144
8.1	Die Normalform eines Matrizenproduktes	144
8.2	Biorthonormalsysteme	146
8.3	Das vervollständigte Matrizenprodukt	148
8.4	Kongruenztransformation. Orthogonalsysteme	151
8.5	Eine Variante	155
8.6	Überbestimmte Gleichungssysteme. Kondensation. Die Pseudoinverse	156
9	Lineare Abhängigkeit und Rang	159
• 9.1	Die Pivotmatrix	159
• 9.2	Die Basis	160
9.3	Dyadische Zerlegung	161
9.4	Der dominierende Minor	162
9.5	Lineare Abhängigkeit von Vektoren und Matrizen	163
9.6	Der Rang eines Matrizenproduktes	164
10	Gebundene Transformationen	167
• 10.1	Die simultane Äquivalenztransformation	167
• 10.2	Die dyadische Zerlegung eines Matrizenpaares	170
• 10.3	Die Spektralzerlegung eines Matrizenpaares	173
• 10.4	Normale Matrizenpaare	175
• 10.5	Potenzen und Polynome	177
10.6	Die Produktzerlegung einer diagonalähnlichen Matrix	181
• 10.7	Normalformen von Matrizenpaaren	182
• 10.8	Die strikte Ähnlichkeitstransformation. Die drei Grundoperationen	184
• 10.9	Die gequantelte Ähnlichkeitstransformation	188
10.10	Die Ähnlichkeitstransformation auf die Begleitmatrix	192
• 10.11	Normiert-unitäre Transformationen. Unitäre Ergänzung	196
10.12	Nicht-normiert unitäre Transformationen	201
10.13	Unitäre Transformation auf obere Hessenberg-Matrix	204
10.14	Ganzzahlige Ähnlichkeitstransformation auf obere Hessenberg- Matrix	208
10.15	Lineare Abbildungen	212
• 10.16	Zusammenfassung. Ausblick	215

<b>III. Kapitel Quadratische Formen nebst Anwendungen</b> .....	218
11 Quadratische Formen .....	219
• 11.1 Darstellung quadratischer und bilinearer Formen .....	219
• 11.2 Definite quadratische Formen .....	222
11.3 Indefinite quadratische Formen .....	224
11.4 Transformation quadratischer Formen. Invarianten .....	227
• 11.5 Hermitesche Formen .....	230
• 11.6 Flächen zweiten Grades .....	231
12 Einige Anwendungen quadratischer Formen .....	234
12.1 Anwendung in der Ausgleichsrechnung .....	234
12.2 Vektoriell Produkt und Abstandsquadrat .....	238
12.3 Massen- und Flächenmoment zweiten Grades .....	239
12.4 Die kinetische Energie eines starren Körpers .....	242
12.5 Die potentielle Energie einer elastischen Feder .....	243
<b>IV. Kapitel Die Eigenwertaufgabe</b> .....	245
13 Eigenwerte und Eigenvektoren .....	246
• 13.1 Das allgemeine einparametrische Eigenwertproblem .....	246
• 13.2 Reguläre Äquivalenztransformation. Invarianten .....	249
• 13.3 Polynommatrizen .....	250
• 13.4 Das lineare Eigenwertproblem (Matrizenpaare) .....	251
• 13.5 Orthogonalität der Links- und Rechtseigenvektoren .....	253
• 13.6 Das spezielle Eigenwertproblem .....	255
• 13.7 Die charakteristische Gleichung .....	257
• 13.8 Kondensation. Der Formenquotient .....	260
13.9 Die Eigenwerte eines Matrizenproduktes .....	261
13.10 Reelle Paare mit konjugiert-komplexen Eigenwerten .....	264
13.11 Der Satz von Cayleigh-Hamilton .....	267
14 Diagonalähnliche Matrizenpaare .....	269
• 14.1 Die Diagonalmatrix für $s = n$ .....	269
• 14.2 Die Block-Diagonalmatrix für $s < n$ .....	270
• 14.3 Die Spektralzerlegung eines diagonalähnlichen Paares. Eigenwerte und Eigensterme .....	273
• 14.4 Eine spezielle lineare Vektordifferentialgleichung zweiter Ordnung .....	276
14.5 Das Minimalpolynom .....	279
15 Diagonalkongruente (normale) Matrizenpaare .....	282
• 15.1 Die Normalitätseigenschaft .....	282
• 15.2 Hermitesche (reellsymmetrische) Paare .....	284
15.3 Schiefhermitesche (schiefsymmetrische) Matrix .....	286
15.4 $B$ -unitäres Matrizenpaar .....	286
• 15.5 Reelle Flächenpaare zweiten Grades. Das Hauptachsenproblem .	287

• 15.6	Lineare Schwingungssysteme .....	292
15.7	Die hermiteschen Komponenten eines normalen Paares .....	299
15.8	Fragen der Normierung .....	301
15.9	Die singulären Werte eines allgemeinen Matrizenpaares .....	303
• 15.10	Die Struktur eines Matrizenpaares .....	306
16	Die Block-Diagonalmatrix. Strukturfragen .....	307
• 16.1	Zielsetzung .....	307
• 16.2	Die Transformation auf obere Dreiecksmatrix .....	311
• 16.3	Die Transformation auf Block-Diagonalmatrix .....	318
16.4	Die Struktur der Eigenmatrix. Natürliche Charakteristik .....	324
16.5	Die Normierung der Kodiagonale .....	327
16.6	Die Transformation auf die Strukturmatrix .....	330
16.7	Die Jordan-Matrix .....	333
16.8	Die Jordan-Spektralzerlegung .....	335
16.9	Ein Rückblick von höherer Warte .....	339
16.10	Eigen- und Hauptvektoren .....	340
16.11	Zusammenfassung. Historisches .....	346
17	Eigenwerte spezieller Matrizen .....	347
17.1	Spaltensummenkonstante und stochastische Matrizen .....	347
17.2	Schachbrettmatrizen .....	350
17.3	Zyklische Matrizen .....	354
17.4	Spezielle dreireihige Bandmatrizen .....	356
17.5	Die Matrix von Boothroyd/Dekker .....	361
18	Parametermatrizen .....	362
18.1	Problemstellung .....	362
18.2	Spektralzerlegung einer diagonalähnlichen Parametermatrix ....	362
18.3	Diagonalähnliche Matrizen-Tupel .....	368
18.4	Selbstnormierende Tupel .....	370
18.5	Über die Eigenwerte von Matrizenprodukten .....	371
18.6	Parameternormale Matrizen .....	372
18.7	Lineare Abhängigkeit von einem Leitpaar .....	376
<b>V.</b>	<b>Kapitel Matrizengleichungen und Matrizenfunktionen .....</b>	<b>379</b>
19	Matrizengleichungen .....	379
• 19.1	Problemstellung .....	379
• 19.2	Die Matrizengleichung $AXB = C$ .....	380
• 19.3	Die mehrgliedrige lineare Matrizengleichung .....	384
• 19.4	Die zweigliedrige lineare Matrizengleichung .....	385
19.5	Elimination .....	390
19.6	Dekomposition (Entflechtung) .....	393
19.7	Rekursion .....	396
19.8	Entkopplung .....	397

19.9	Algebraisch nichtlineare Matrixgleichungen .....	398
19.10	Zusammenfassung. Ausblick .....	400
20	Matrizenfunktionen .....	401
• 20.1	Der Austausch von Eigenwerten. Deflation .....	401
• 20.2	Was ist eine Matrizenfunktion? .....	404
• 20.3	Die skalare Taylor-Entwicklung .....	405
• 20.4	Die Taylor-Entwicklung im Gesamtraum .....	407
• 20.5	Die Taylor-Entwicklung im Eigenraum (Hauptunterraum). Quasipolynome .....	409
20.6	Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten ..	414
20.7	Mehrdeutige Funktionen .....	419
<b>VI.</b>	<b>Kapitel Ergänzungen</b> .....	<b>422</b>
21	Kondensation. Der Rayleigh-Quotient und sein Wertebereich ...	423
• 21.1	Was ist ein Kondensat? .....	423
• 21.2	Der Rayleigh-Quotient eines normalen Paares. Der Wertebereich .....	423
21.3	Der Einfluß einer Störung .....	427
21.4	Der Wertebereich eines nichtnormalen Paares .....	429
21.5	Kondensation höherer Ordnung .....	434
22	Blockmatrizen .....	438
• 22.1	Die Matrizenmultiplikation in Blöcken .....	438
• 22.2	Die reduzierte Blockmatrix .....	439
• 22.3	Blockdreiecksmatrizen .....	444
• 22.4	Inverse und Adjungierte einer vierteiligen Hypermatrix .....	445
• 22.5	Die Identität von Frobenius/Schur/Woodbury .....	450
22.6	Abgeänderte (gestörte, benachbarte) Gleichungssysteme .....	454
22.7	Singuläre Matrizenpaare .....	457
23	Expansion von Polynomen und Polynommatrizen .....	462
• 23.1	Zielsetzung .....	462
• 23.2	Expansion von Günther .....	463
23.3	Diagonalexpansion .....	464
23.4	Wiederholte Diagonalexpansion .....	474
23.5	Diagonalexpansion mit konstanten Defekten .....	476
23.6	Diagonalexpansion mit variablen Defekten .....	481
• 23.7	Zusammenfassung .....	482
	<b>Schlußbemerkung</b> .....	<b>483</b>
	<b>Weiterführende Literatur</b> .....	<b>485</b>
	Lehr- und Fachbücher .....	485
	Einzelveröffentlichungen .....	487
	<b>Namen- und Sachverzeichnis</b> .....	<b>489</b>

## **Inhalt des 2. Teils**

### **Numerische Methoden und technische Anwendungen**

#### **VII. Kapitel. Grundzüge der Matrizennumerik**

- 24. Grundbegriffe und einfache Rechenregeln
- 25. Norm, Kondition, Korrektur und Defekt
- 26. Kondensation und Ritzsches Verfahren

#### **VIII. Kapitel. Theorie und Praxis der Transformationen**

- 27. Ein Exkurs über Transformationsmatrizen
- 28. Freie Transformationen
- 29. Gebundene Transformationen

#### **IX. Kapitel. Lineare Gleichungen und Kehrmatrix (Inverse)**

- 30. Endliche Algorithmen zur Auflösung linearer Gleichungssysteme
- 31. Iterative Methoden zur Auflösung linearer Gleichungssysteme
- 32. Einschließung und Fehlerabschätzung
- 33. Kehrmatrix (Inverse). Endliche und iterative Methoden
- 34. Lineare Matrizengleichungen

#### **X. Kapitel. Die einparametrische Eigenwertaufgabe**

- 35. Vorbereitende Studien
- 36. Die charakteristische Gleichung

#### **XI. Kapitel. Die lineare Eigenwertaufgabe**

- 37. Selektionsalgorithmen
- 38. Globalalgorithmen
- 39. Einschließung von Eigenwerten und Eigenvektoren
- 40. Die Expansion des charakteristischen Polynoms

#### **XII. Kapitel. Nichtlineare und mehrparametrische Eigenwertaufgaben**

- 41. Eigenwerte und Eigenvektoren von Polynommatrizen
- 42. Skalare Polynome
- 43. Die nichtpolynomische Eigenwertaufgabe
- 44. Die mehrparametrische Eigenwertaufgabe

#### **XIII. Kapitel. Lineare Vektordifferentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten**

- 45. Die homogene Differentialgleichung erster Ordnung
- 46. Die homogene Differentialgleichung höherer Ordnung
- 47. Die inhomogene Differentialgleichung erster und höherer Ordnung

**XIV. Kapitel. Lineare Quadratmittelprobleme und Pseudoinverse**

48. Lineare Quadratmittelprobleme

49. Die Pseudoinverse

50. Singulärwertzerlegung

**XV. Kapitel. Ergänzungen**