

Springer-Lehrbuch

Uwe Schäfer

Das lineare Komplementaritätsproblem

Eine Einführung

 Springer

Priv.-Doz. Dr. Uwe Schäfer
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Universität Karlsruhe (TH)
76128 Karlsruhe
Uwe.Schaefer@math.uni-karlsruhe.de

ISBN 978-3-540-79734-0

e-ISBN 978-3-540-79735-7

DOI 10.1007/978-3-540-79735-7

Springer-Lehrbuch ISSN 0937-7433

Bibliografische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.d-nb.de> abrufbar.

Mathematics Subject Classification (2000): 90C33, 65F99, 65G40, 65L10, 91A05, 60H30

© 2008 Springer-Verlag Berlin Heidelberg

Dieses Werk ist urheberrechtlich geschützt. Die dadurch begründeten Rechte, insbesondere die der Übersetzung, des Nachdrucks, des Vortrags, der Entnahme von Abbildungen und Tabellen, der Funk- sendung, der Mikroverfilmung oder der Vervielfältigung auf anderen Wegen und der Speicherung in Datenverarbeitungsanlagen, bleiben, auch bei nur auszugsweiser Verwertung, vorbehalten. Eine Vervielfältigung dieses Werkes oder von Teilen dieses Werkes ist auch im Einzelfall nur in den Grenzen der gesetzlichen Bestimmungen des Urheberrechtsgesetzes der Bundesrepublik Deutschland vom 9. September 1965 in der jeweils geltenden Fassung zulässig. Sie ist grundsätzlich vergütungspflichtig. Zuwiderhandlungen unterliegen den Strafbestimmungen des Urheberrechtsgesetzes.

Die Wiedergabe von Gebrauchsnamen, Handelsnamen, Warenbezeichnungen usw. in diesem Werk berechtigt auch ohne besondere Kennzeichnung nicht zu der Annahme, dass solche Namen im Sinne der Warenzeichen- und Markenschutz-Gesetzgebung als frei zu betrachten wären und daher von jedermann benutzt werden dürften.

Satz: Datenerstellung durch den Autor unter Verwendung eines Springer $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Makropakets

Herstellung: le-tex publishing services oHG, Leipzig

Umschlaggestaltung: WMXDesign GmbH, Heidelberg

Gedruckt auf säurefreiem Papier

9 8 7 6 5 4 3 2 1

springer.de

für Gabriele Schäfer

Vorwort

Das vorliegende Buch entstand aus zwei aufeinander aufbauenden Vorlesungen, die ich im Sommersemester 2007 bzw. im Sommersemester 2008 an der Universität Karlsruhe in der Fakultät für Mathematik gehalten habe. Die Idee, ein Buch über das lineare Komplementaritätsproblem zu schreiben, entstand aus der Tatsache, dass das lineare Komplementaritätsproblem insbesondere im Grundstudium selten gelehrt wird, obwohl doch das lineare Komplementaritätsproblem mit wenig Grundkenntnissen behandelt werden kann, eine schöne geometrische Interpretation zulässt, eine Fülle von Anwendungen besitzt und insbesondere die lineare Programmierung als Spezialfall beinhaltet.

Um das lineare Komplementaritätsproblem in der Lehre zu etablieren, benötigt man Lehrbücher. Jedoch existieren hierzu nur sehr wenige Lehrbücher. Die Klassiker sind:

1. R. W. Cottle, J.-S. Pang, R. E. Stone, *The Linear Complementarity Problem*, Academic Press, 1992, 762 Seiten.
2. K. Murty, *Linear Complementarity, Linear and Nonlinear Programming*, Heldermann-Verlag, 1988, 605 Seiten.

Das vorliegende Buch ist in deutscher Sprache verfasst und gibt auf 268 Seiten zusammengefasst eine Einführung in die Problematik. Dabei werden auch neue Ergebnisse vorgestellt. Beispielsweise behandelt dieses Buch auch die Bewertung von amerikanischen Put-Optionen. Dass dies auf ein lineares Komplementaritätsproblem führt, wurde erst Ende der 1990er Jahre thematisiert.

Danken möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Götz Alefeld, der mich 1996 auf das lineare Komplementaritätsproblem aufmerksam machte und mir am Institut für Angewandte und Numerische Mathematik der Universität Karlsruhe die Gelegenheit gab, dieses Buch zu schreiben.

Des Weiteren danke ich Prof. Dr. Florian Potra. Er hielt im Juni/Juli 2006 im internen Seminar des Instituts für Angewandte und Numerische Mathematik an der Universität Karlsruhe eine Vortragsreihe über Innere-Punkte-Verfahren. Das sechste Kapitel dieses Buches basiert auf seinen Ausführungen,

die er mir in zahlreichen persönlichen Gesprächen weiter erläutert hat.

Bedanken möchte ich mich auch bei den Gutachtern für ihre hilfreichen Hinweise und für ihre wertvollen Anregungen.

Für das Korrekturlesen möchte ich mich herzlichst bei Dr. Marco Schnurr und cand. math. Thomas Donauer bedanken.

Zuletzt danke ich Frau Katja Röser von der Firma le-tex sowie Frau Agnes Herrmann und Herrn Clemens Heine vom Springer-Verlag für die freundliche und gute Zusammenarbeit.

Karlsruhe, im Juli 2008

Uwe Schäfer

Inhaltsverzeichnis

1	Die Problemstellung	1
1.1	Zur Namensgebung	2
1.2	Wie man prinzipiell das LCP lösen kann	3
2	Der Lemke-Algorithmus	7
2.1	Motivation	7
2.2	Initialisierung des Lemke-Algorithmus	9
2.3	Allgemeiner Pivotschritt	11
2.4	Abbruchkriterien des Lemke-Algorithmus	13
2.5	Möglichkeit eines Zyklus	18
2.6	Der lexikographische Lemke-Algorithmus	23
2.7	Bemerkung zur Ray-Termination	31
3	Klassen von Matrizen	35
3.1	P-Matrizen	36
3.1.1	Komplementäre Kegel	42
3.1.2	Geometrische Interpretation eines Pivotschrittes im Lemke-Algorithmus	48
3.1.3	Das Beispiel von Murty	53
3.1.4	Positiv definite Matrizen	59
3.1.5	Streng diagonaldominante Matrizen	60
3.2	Positiv semidefinite Matrizen	62
3.3	Z-Matrizen	65
3.4	M-Matrizen	71
4	Anwendungen	75
4.1	Zwei-Personen-Spiele	75
4.1.1	Das Nash-Gleichgewicht	77
4.1.2	Das Nash-Gleichgewicht und das LCP	82
4.1.3	Der lexikographische Lemke-Howson-Algorithmus	86
4.2	Lineare Programme	97

4.2.1	Grundlagen	97
4.2.2	Dualitätstheorie	99
4.2.3	Lineare Programme und das LCP	102
4.2.4	Quadratische Programme	103
4.2.5	Quadratische Programme und das LCP	106
4.3	Intervallrechnung	110
4.3.1	Intervallmatrizen	111
4.3.2	Lineare Intervallgleichungssysteme	115
4.3.3	Lineare Intervallgleichungssysteme und das LCP	119
4.4	Freie Randwertprobleme	123
4.4.1	Gewöhnliche freie Randwertprobleme	123
4.4.2	Existenz- und Eindeutigkeitsaussagen	126
4.4.3	Freie Randwertprobleme und das LCP	133
4.4.4	Bewertung von Optionen	136
4.4.5	Die Black-Scholes-Ungleichung	140
4.4.6	Amerikanische Put-Optionen und das LCP	142
5	Iterative Lösungsverfahren	149
5.1	Das PSOR-Verfahren	149
5.2	Der Modulus-Algorithmus	162
5.3	Ein Vergleich	168
6	Innere-Punkte-Verfahren	173
6.1	Das Korrektor-Prädiktor-Verfahren von Potra	174
6.2	Der Aufwand des Verfahrens	176
6.3	Die Analyse des Korrektor-Prädiktor-Verfahrens	177
6.3.1	Analyse des Korrektor-Schritts	180
6.3.2	Analyse des Prädiktor-Schritts	183
7	Einschließungsmethoden von Lösungen	191
7.1	Fehlerschranken	194
7.2	Verifikationsverfahren	199
7.3	Praktische Umsetzung	207
A	Hilfsmittel	217
A.1	Matrixnormen	217
A.2	Fixpunktsatz von Brouwer, Lemma von Farkas	224
A.3	Stochastische Differentialgleichungen	227
	Lösungen der Aufgaben	229
	Symbolverzeichnis	259
	Literaturverzeichnis	261
	Sachverzeichnis	267